

# Kvantna teorija polja I

Aleksandar Bogojević  
Institut za fiziku

decembar, 1998.



# Sadržaj

<b>1 Kanonička kvantizacija</b>	<b>1</b>
1.1 Druga kvantizacija . . . . .	1
1.2 Dejstvo . . . . .	3
1.3 Lagranžijan . . . . .	4
<b>2 Slobodna teorija: skalarno polje</b>	<b>7</b>
2.1 Kvantizacija . . . . .	7
2.2 Feynmanov propagator . . . . .	9
2.3 Simetrije u teoriji polja . . . . .	11
<b>3 Slobodna teorija: spinorsko polje</b>	<b>17</b>
3.1 Diracova jednačina . . . . .	18
3.2 Fermi bilineari . . . . .	19
3.3 Rešavanje Diracove jednačine . . . . .	19
3.4 Propagator . . . . .	20
3.5 Majorana fermioni . . . . .	21
<b>4 Slobodna teorija: vektorsko polje</b>	<b>25</b>
4.1 Elektrodinamika . . . . .	25
4.2 Fiksiranje gejdža . . . . .	26
4.3 Kvantizacija slobodne elektrodinamike . . . . .	27
4.4 Masivno vektorsko polje . . . . .	29
<b>5 Interakcije</b>	<b>31</b>
5.1 Renormalizabilnost . . . . .	32
5.2 Interakciona slika . . . . .	33
<b>6 Feynmanova pravila</b>	<b>37</b>
6.1 Wickovi identiteti . . . . .	37
6.2 Wickovi identiteti za fermione . . . . .	39
6.3 Feynmanovi dijagrami . . . . .	40

<b>7</b>	<b>S-matrica</b>	<b>41</b>
7.1	Asimptotika . . . . .	42
7.2	Källén–Lehmanova reprezentacija . . . . .	42
7.3	LSZ redukcija . . . . .	44
<b>8</b>	<b>QED: elementarni procesi</b>	<b>47</b>
8.1	Elementarni procesi . . . . .	48
8.2	Tragovi gama matrica . . . . .	50
8.3	Mandelstamove varijable . . . . .	52
8.4	Simetrija ukrštanja . . . . .	54
<b>9</b>	<b>QED: elementarni procesi (nastavak)</b>	<b>57</b>
9.1	Wardov identitet . . . . .	57
9.2	Comptonovo rasejanje . . . . .	59
<b>10</b>	<b>QED: radijacione popravke</b>	<b>63</b>
10.1	Puni fotonski propagator . . . . .	64
10.2	Polarizacija vakuuma do na jednu petlju . . . . .	65
10.3	Feynmanovi parametri . . . . .	66
10.4	Dimenziona regularizacija . . . . .	67
10.5	Integralne formule . . . . .	68
<b>11</b>	<b>QED: radijacione popravke (nastavak)</b>	<b>73</b>
11.1	Tročestična verteksna funkcija . . . . .	73

# Predgovor

Ove lekcije predstavljaju celokupni materijal jednosemestralnog kursa “Kvantna teorija polja I”, prvog od tri kursa iz kvantne teorije polja na poslediplomskim studijama u grupi za elementarne čestice i gravitaciju Instituta za fiziku u Beogradu. Predavanja se u ovom obliku drže od 1995. godine.

Prva polovina knjige daje uvod u osnove operatorskog formalizma kvantne teorije polja. Krajnji cilj ovog dela je izvodjenje Feynmanovih pravila za Greenove funkcije i S-matrične elemente. Drugi deo knjige se bavi primenom dobijenog formalizma na računanje osnovnih procesa u kvantnoj elektrodinamici (QED). U toku ovoga se, do na dijagrame sa jednom petljom, prezentuje renormalizacija kvantne elektrodinamike.

Kvantna teorija polja se razvila radi opisa elementarnih čestica, međjutim, razvijeni formalizam ima znatno širu oblast primene. Zbog toga je na samom kraju ove knjige dato i nekoliko osnovnih primena kvantne teorije polja u fizici kondenzovanog stanja.

Prezentovani materijal je u celini dostupan postdiplomcima fizike, kao i studentima četvrte godine dodiplomskih studija.

# Lekcija 1

## Kanonička kvantizacija

Elementarne čestice su objekti koji moraju biti opisani teorijama koje su istovremeno kvantne i relativističke. Najpoznatija relacija u specijalnoj teoriji relativnosti,  $E = mc^2$ , nam govori da možemo menjati energiju za masu. Koristeći ovo, zajedno sa kvantnomehaničkom relacijom neodređenosti  $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$ , dolazimo do zaključka da u relativističkoj kvantnoj teoriji broj čestica nije održana veličina.

Kvantna mehanika je standardno data nad Hilbertovim prostorom fiksno broja čestica. Ovo dobro radi u nerelativističkoj teoriji gde je broj čestica očuvan. Postoji, međutim, ekvivalentna formulacija kvantne mehanike identičnih čestica, tzv. druga kvantizacija, u okviru koje je lako menjati broj čestica. Centralni objekti u ovom formalizmu su polja. Podsetimo se zato na formalizam druge kvantizacije.

### 1.1 Druga kvantizacija

Posmatrajmo nerelativističku kvantnu mehaniku  $n$  identičnih čestica čija je dinamika data Hamiltonijanom

$$H = \sum_a \left( \frac{1}{2} \vec{p}_a^2 + V^{(1)}(\vec{x}_a) \right) + \sum_{a \neq b} V^{(2)}(\vec{x}_a, \vec{x}_b) . \quad (1.1)$$

Kvantizacija se vrši tako što namećemo kanoničke komutacione relacije<sup>1</sup>

$$[x_a^i, p_b^j] = i \delta_{ab} \delta^{ij} \quad (1.2)$$

$$[x_a^i, x_b^j] = [p_a^i, p_b^j] = 0 . \quad (1.3)$$

Naš dalji posao je da rešavamo svojstvenu jednačinu  $H\psi = E\psi$  nad prostorom simetričnih (bozoni) ili antisimetričnih (fermioni) talasnih funkcija  $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ . Ova  $S_n$  simetrija bitno komplikuje stvari. Pogledajmo zato gornji problem iz jednog drugog ugla.

---

<sup>1</sup>Od sada ćemo, jednostavnosti radi, raditi u tzv. *Božijim jedinicama* u kojima je  $\hbar = c = 1$ .

Umesto da radimo u prostoru  $\mathcal{H}^{(n)}$  posmatraćemo širi prostor  $\prod_{k \geq 0} \mathcal{H}^{(k)}$  i u njemu uvesti operator kreacije čestice (u tački  $\vec{x}$ )

$$a^\dagger(\vec{x})|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}\rangle = \sqrt{n} |\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}\rangle . \quad (1.4)$$

Analogno sa standardnim tretmanom harmonijskog oscilatora, kreacioni operator u potpunosti određujemo sledećim komutacionim (odnosno antikomutacionim) relacijama

$$[a(\vec{x}), a^\dagger(\vec{y})]_{\mp} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.5)$$

$$[a(\vec{x}), a(\vec{y})]_{\mp} = [a^\dagger(\vec{x}), a^\dagger(\vec{y})]_{\mp} = 0 . \quad (1.6)$$

Iz ovoga se vidi da  $a(\vec{x})$  smanjuje broj čestica. To je tzv. anihilacioni operator. Vakuumsko stanje  $|0\rangle$  je određeno relacijom  $a(\vec{x})|0\rangle = 0$  i predstavlja bazis u  $\mathcal{H}^{(0)}$ . Bazis u  $\mathcal{H}^{(1)}$  čine sva stanja oblika  $|\vec{x}\rangle = a^\dagger(\vec{x})|0\rangle$ . U opštem slučaju, bazis u  $\mathcal{H}^{(n)}$  je dat sa  $|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^\dagger(\vec{x}_1) a^\dagger(\vec{x}_2) \cdots a^\dagger(\vec{x}_n)|0\rangle$ . Primitimo da algebra  $a$ -ova automatski vodi računa o  $S_n$  simetriji. Lako je proveriti da je gornji bazis ortonormiran, kao i da anihilacioni operator deluje kao

$$a(\vec{x})|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) |\vec{x}_1, \dots, \widehat{\vec{x}}_i, \dots, \vec{x}_n\rangle . \quad (1.7)$$

Kapica nad  $\vec{x}_i$  znači da je ta čestica izostavljena. Operator  $a^\dagger(\vec{x})a(\vec{x})$  je gustina čestica, dok je  $N = \int d\vec{x} a^\dagger(\vec{x})a(\vec{x})$  operator ukupnog broja čestica. On zadovoljava  $N|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\rangle = n|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\rangle$ . Jednostavnom primenom bazičnih komutatora (ili antikomutatora) se lako može izvesti

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n | \sum_a V^{(1)}(\vec{x}_a) &= \\ &= \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n | \int d\vec{x} V^{(1)}(\vec{x}) a^\dagger(\vec{x})a(\vec{x}) . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Na sličan način možemo pokazati da važi

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n | \sum_{a,b} V^{(2)}(\vec{x}_a, \vec{x}_b) &= \\ &= \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n | \int d\vec{x} d\vec{y} a^\dagger(\vec{y})a^\dagger(\vec{x}) V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) a(\vec{x})a(\vec{y}) , \end{aligned} \quad (1.9)$$

kao i

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n | \sum_a \frac{1}{2} \vec{p}_a^2 &= \\ &= \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n | \int d\vec{x} \frac{1}{2} \nabla a^\dagger \cdot \nabla a . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Na osnovu gornjih relacija vidimo da je Hamiltonijan druge kvantizacije dat sa

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \int d\vec{x} \left( \frac{1}{2} \nabla a^\dagger \cdot \nabla a + v(\vec{x}) a^\dagger(\vec{x}) a(\vec{x}) \right) + \\ + \int d\vec{x} d\vec{y} a^\dagger(\vec{y}) a^\dagger(\vec{x}) v(\vec{x}, \vec{y}) a(\vec{x}) a(\vec{y}) . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Projekcija ovog operatora na  $\mathcal{H}^{(n)}$  je naš početni Hamiltonijan (1.1) uz zamenu

$$V^{(1)}(\vec{x}) = v(\vec{x}) + v(\vec{x}, \vec{x}) \quad (1.12)$$

$$V^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) = v(\vec{x}, \vec{y}) . \quad (1.13)$$

Kao što smo videli, osnovni objekti u drugoj kvantizaciji su polja. Iz ovog razloga se ovaj formalizam češće zove kvantna teorija polja. U teoriji polja najčešće imamo posla sa *lokalnim* interakcijama kao npr.  $v(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda \delta(\vec{x} - \vec{y})$ . U ovom slučaju imamo  $V^{(1)}(\vec{x}) = v(\vec{x}) + \lambda \delta(0)$ . Nismo ni počeli a već smo se sreli sa prvom beskonačnošću! Ova beskonačnost, međjutim, nije opasna. Odbacivanje člana  $\lambda \delta(0)$  prosto odgovara redefiniciji nule energije, tj. energije vakuuma. Mi samo merimo *razlike* energija<sup>2</sup>. Kasnije ćemo sresti opasnije primere beskonačnosti.

Primetimo da smo do sada imali posla sa modelom u kome je broj čestica očuvan, tj. u kome  $[\mathbf{H}, N] = 0$ . Ovo je jednostavno posledica toga što je Hamiltonijan sa kojim smo radili sačinjen od jednakog broja kreacionih i anihilacionih operatora. Sada možemo lako izaći van okvira standardne kvantne mehanike i uvesti interakcione članove, kao što je  $a^\dagger a a$ , koji eksplicitno menjaju broj čestica. Kao što vidimo, druga kvantizacija (odnosno kvantna teorija polja) je prirodni okvir za opis relativističkih kvantnih teorija<sup>3</sup>.

## 1.2 Dejstvo

U Heisenbergovoj slici operatori nose svu vremensku zavisnost. Jednačine kretanja za  $a(\vec{x}, t)$  i  $a^\dagger(\vec{x}, t)$  glase

$$\dot{a} = i [\mathbf{H}, a] \quad (1.14)$$

$$\dot{a}^\dagger = i [\mathbf{H}, a^\dagger] . \quad (1.15)$$

Podsetimo se kako smo došli do ovih jednačina. Prvo smo krenuli od  $n$ -čestične klasične teorije sa Hamiltonijanom  $H$ . Zatim smo tu teoriju kvantovali na standardan način. Na kraju smo prešli u formalizam druge kvantizacije, određivši drugo kvantovan Hamiltonijan  $\mathbf{H}$  i odgovarajuće jednačine kretanja. Centralni dinamički objekti su sada operatori polja. Kao što smo videli, formalizam druge

<sup>2</sup>Sem u gravitaciji, gde je i sama vakuumska energija (kosmološka konstanta) merljiva.

<sup>3</sup>S druge strane, kvantna teorija polja je izuzetno korisna i u slučaju nerelativističkih teorija sa velikim brojem identičnih čestica.



kvantizacije radi i kad broj čestica nije očuvan. Medjutim, ovakav način izvođenja jednačina druge kvantizacije podrazumeva postojanje odgovarajuće prvo kvantizovane teorije, a ova postoji samo ako se broj čestica ne menja. Srećom, postoji i drugi, jednostavniji, način da dodjemo do jednačina (1.15). Pogledajmo ovo na primeru bozonskih polja. Podjimo od *klasičnih* polja  $a(\vec{x}, t)$  i  $a^*(\vec{x}, t)$  koji zadovoljavaju Poissonove zgrade

$$\{a(\vec{x}, t), a(\vec{y}, t)\} = \frac{1}{i} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.16)$$

$$\{a(\vec{x}, t), a(\vec{y}, t)\} = \{a^*(\vec{x}, t), a^*(\vec{y}, t)\} = 0. \quad (1.17)$$

Posmatrajmo sad dejstvo  $I = \int dt L$  gde je

$$L = \int d\vec{x} \frac{i}{2} (a^* \dot{a} - \dot{a}^* a) - \mathbf{H}. \quad (1.18)$$

Lako se može pokazati da jednačine kretanja koje slede iz ovog dejstva, nakon kvantizacije

$$a \rightarrow \hat{a} \quad (1.19)$$

$$a^* \rightarrow \hat{a}^\dagger \quad (1.20)$$

$$\{, \} \rightarrow \frac{1}{i} [, ], \quad (1.21)$$

daju drugo kvantizovane jednačine kretanja (1.15). Istovremeno, Poissonove relacije (1.17) daju bazične komutatore druge kvantizacije (1.6).

Kao što smo obećali, izveli smo jednačine druge kvantizacije bez pozivanja na prvo kvantizovani formalizam. No kako dolazimo do klasičnog Hamiltonijana polja  $\mathbf{H}$ ? Mnogo je jednostavnije ovo izvođenje okrenuti naglavačke i poći od dejstva. Dejstvo je invarijanta, te ga je u principu, mnogo lakše konstruisati od Hamiltonijana. Ovo ćemo uraditi u sledećem odeljku.

### 1.3 Lagranžijan

U lokalnoj teoriji polja Lagranžijan je prostorni integral Lagrangeove gustine  $\mathcal{L}$ , dok je dejstvo integral ove gustine po prostorvremenu

$$\int dx \mathcal{L}. \quad (1.22)$$

Od sad ćemo  $\mathcal{L}$  zvati Lagranžijanom. Kao i uvek, Lagranžijan zavisi od osnovnih dinamičkih varijabli (polja) i njihovih vremenskih izvoda. Od sad ćemo polja generičkog modela označavati sa  $\phi(x)$ . U relativističkoj teoriji moramo imati  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ . Variranjem dejstva dobijamo

$$\delta I = \int dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \partial_\mu \phi \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi + \\
&+ \int dx \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) .
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Poslednji integral se korišćenjem Stokesove teoreme svodi na površinski integral

$$\oint_\infty dS_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi , \tag{1.24}$$

gde se integracija vrši po površini u beskonačnosti. Klasične jednačine kretanja se dobijaju iz stacionarnosti dejstva pod varijacijama koje iščezavaju na granici. Dakle, jednačine kretanja glase

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 . \tag{1.25}$$

Sve što nam ostaje je da konstruišemo Lagranžijan za neki model. Pozabavimo se prvo jednostavnim modelima. Iz (1.25) vidimo da su jednačine kretanja linearne u slučaju da su Lagranžijani kvadratični po poljima. Kao što smo videli, ovakvi modeli su trivijalno rešivi i zovu se slobodne teorije polja. U sledeće tri lekcije ćemo se baviti ovakvim modelima.

Za realno skalarno polje mase  $m$  najopštiji relativistički invarijantni Lagranžijan glasi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 . \tag{1.26}$$

$m_0$  je neka masena skala, ne nužno  $m$ . Na nivou klasične teorije zaista imamo  $m = m_0$ , no (u opštem slučaju) to neće važiti i nakon kvantizacije.  $m_0$  se zove gola masa. Predjimo sada na Hamiltonov formalizam. Impuls konjugovan polju  $\phi$  glasi

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} , \tag{1.27}$$

tako da za Hamiltonijan našeg modela dobijamo

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 . \tag{1.28}$$

Ovo je u stvari gustina Hamiltonijana, a Hamiltonijan je  $\mathbf{H} = \int d\vec{x} \mathcal{H}$ . Iz gornjeg izraza vidimo da moramo imati  $m_0^2 \geq 0$ , u suprotnom energija ne bila ograničena odozdo.

## ZADACI

- 1.1 Dokažite relacije (1.8-1.10) koje povezuju formalizme prve i druge kvantizacije.
- 1.2 Nadjite klasične jednačine kretanja koje slede iz (1.18). Kvantizujte ih i pokažite da su istovetne sa jednačinama druge kvantizacije.
- 1.3 Ponovite dokaz iz prethodnog zadatka za slučaj fermiona. Sada morate uzeti da klasična polja  $a$  i  $a^*$  antikomutiraju, tj.  $a(\vec{x})a(\vec{y})^* = -a(\vec{y})^*a(\vec{x})$ ,  $a(\vec{x})a(\vec{y}) = -a(\vec{y})a(\vec{x})$  i  $a^*(\vec{x})a^*(\vec{y}) = -a^*(\vec{y})a^*(\vec{x})$ . Ovakvi objekti se zovu polja nad Grassmannovim brojevima.
- 1.4 U Božijim jedinicama se sve veličine mogu izraziti preko mase. Pokažite da važi  $[L] = [T] = [M]^{-1}$ . Koristeći ovo nadjite jedinice za skalarno polje  $\phi$  i pokažite da je  $m_0$  zaista maseni parametar.

## Lekcija 2

# Slobodna teorija: skalarno polje

U prethodnoj lekciji smo izveli Lagranžijan za realno slobodno skalarno polje

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 . \quad (2.1)$$

Cilj današnje lekcije je da izvršimo kanoničku kvantizaciju ove teorije u  $d$ -dimenzijonom prostorvremenu<sup>1</sup>

### 2.1 Kvantizacija

Kao što smo videli, polju  $\phi(x)$  je konjugovan impuls

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi} . \quad (2.2)$$

Hamiltonijan je zato

$$\mathbf{H} = \int d\vec{x} \mathcal{H} = \int d\vec{x} \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 \right) . \quad (2.3)$$

Kanonička kvantizacija se uspostavlja promovisanjem  $\phi$  i  $\pi$  u operatore koji zadovoljavaju

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.4)$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0 . \quad (2.5)$$

Heisenbergove jedančine kretanja<sup>2</sup> sada glase

$$i \dot{\phi} = [\phi, \mathbf{H}] = i \pi \quad (2.6)$$

$$i \dot{\pi} = [\pi, \mathbf{H}] = -i (m_0^2 \phi - \nabla^2 \phi) . \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Skalarni proizvod je dat sa  $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - \dots - x^{d-1} y^{d-1}$ .

<sup>2</sup>Prisetimo da radimo u Heisenbergovoj slici. U ovoj slici operatori zavise kako od prostora tako i od vremena što bitno olakšava rad u slučaju relativističkih teorija.

Samo polje  $\phi$  dakle zadovoljava  $\ddot{\phi} = -m_0^2\phi + \nabla^2\phi$ , što se može napisati na manifestno kovarijantan način kao

$$(\partial^2 + m_0^2)\phi = 0. \quad (2.8)$$

Ovo je Klein–Gordonova jednačina<sup>3</sup>. Klein–Gordonova jednačina je linearna, te je rešavamo primenom Fourier transforma. Pogodno je da Fourier transform izvršimo po prostornim koordinatama. Tako dobijamo

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(t, \vec{p}), \quad (2.9)$$

a modovi  $\tilde{\phi}$  zadovoljavaju

$$(\partial_t^2 + E_{\vec{p}}^2)\tilde{\phi}(t, \vec{p}) = 0, \quad (2.10)$$

gde je  $E_{\vec{p}} = \sqrt{m_0^2 + \vec{p}^2}$ . Dakle, skalarno polje je ekvivalentno beskonačnom skup nezavisnih harmonijskih oscilatora — po jedan za svaki mod  $\vec{p}$ . Opšte rešenje jednačine (2.10) se može napisati kao

$$\tilde{\phi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t} + b_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}}t} \right), \quad (2.11)$$

dako da dobijamo

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) = \\ &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

U zadnjem koraku smo uveli  $p^0 = E_{\vec{p}}$ . Uslov realnosti klasičnog polja  $\phi$ , nakon kvantizacije daje  $\phi(x) = \phi^\dagger(x)$ . Na jeziku modova odavde sledi  $a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$ . Na kraju imamo

$$\phi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \quad (2.13)$$

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = -i \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right). \quad (2.14)$$

Sa druge strane, lako se pokazuje da modovi zadovoljavaju komutacione relacije

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^{d-1} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.15)$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \quad (2.16)$$

Ovi komutatori, zajedno sa (2.14), impliciraju kanoničke komutacione relacije (2.5).

<sup>3</sup>Ovo je istog oblika kao i klasična jednačina kretanja koja sledi iz Lagranžijana (2.1).

Izražen preko modova, Hamiltonijan je jednak

$$\mathbf{H} = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \delta^{d-1}(0) \int d\vec{p} E_{\vec{p}} . \quad (2.17)$$

Drugi deo ovog izraza predstavlja energiju vakuuma. Reč je o beskonačnom komutirajućem članu — zbir konačnih energija osnovnog stanja beskonačnog broja oscilatora. Kao što smo videli u prethodnoj lekciji, nas će interesovati samo razlike energetske nivoa. Iz ovog razloga ovaj član odbacuje. Smisao operatora modova se vidi iz njihovi komutatora sa Hamiltonijanom

$$[\mathbf{H}, a_{\vec{p}}^\dagger] = E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \quad (2.18)$$

$$[\mathbf{H}, a_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}} . \quad (2.19)$$

Odavde se vidi da  $a_{\vec{p}}$  prevodi energetska eigenstanja u druga sa nižom energijom. Vakuum, stanje najniže energije, je određen sa  $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$ . Celokupni prostor stanja slobodnog skalarnog polja se sad dobija, na standardan način, primenom operatora  $a_{\vec{p}}^\dagger$  na vakuum  $|0\rangle$ .

## 2.2 Feynmanov propagator

Dejstvo svake slobodne teorije polja je kvadratična forma oblika

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \phi_i \Delta_{ij}^{-1} \phi_j . \quad (2.20)$$

Centralni objekt u kvantnoj teoriji polja je inverzna matrica od one koja definiše gornju kvadratičnu formu, dakle  $\Delta_{ij}$ . Ovo je *propagator* odgovarajuće teorije.

Kao što smo videli, u slučaju skalarnog polja imamo

$$I = \frac{1}{2} \int dx ((\partial\phi)^2 - m_0^2\phi^2) . \quad (2.21)$$

Parcijalnom integracijom se ovo svodi na gornji oblik<sup>4</sup>. U ovom slučaju indeksi postaju  $i \rightarrow (x^0, x^1, \dots, x^{d-1})$  i  $j \rightarrow (y^0, y^1, \dots, y^{d-1})$ , dok  $\sum_{i,j} \rightarrow \int dx dy$ . Matrica kvadratične forme je sad

$$\Delta^{-1}(x, y) = -(\partial^2 + m_0^2) \delta(x - y) . \quad (2.22)$$

Dakle, propagator slobodne scalarne teorije polja je dat sa

$$-(\partial^2 + m_0^2) \Delta(x, y) = \delta(x - y) . \quad (2.23)$$

<sup>4</sup>Prilikom ovoga smo odbacili jedan površinski integral. To često činimo u kvantnoj teoriji polja, a razlog je zato što posmatrani integrandi generalno dovoljno brzo opadaju u beskonačnosti. Izuzeci ovom pravilu su neke teorije u  $d = 2$  i  $d = 3$  dimenzije prostorvremena gde površinski članovi mogu dati bitne doprinose.

Translaciona invarijantnost nam daje  $\Delta(x, y) = \Delta(x - y)$ , te Fourier transformom dobijamo

$$\Delta(x - y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (2.24)$$

U gornjem izrazu  $\varepsilon$  je podesno izabrani regularizacioni parametar. Na kraju računa uzimamo limes  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Bez regularizacionog parametra gornji integral je singularan pošto integrand ima polove na konturi integracije. Postoji beskonačno mnogo (neekvivalentnih) načina da se regulariše gornji singularni integral. Ispostavlja se da je upravo  $i\varepsilon$  preskripcija ona koja nam treba u kvantnoj teoriji polja. Izraz (2.24) definiše tzv. Feynmanov propagator.

Feynmanov propagator se u opštem slučaju ne može izraziti preko elementarnih funkcija. Obično je upravo oblik (2.24) najpogodniji za rad. Ipak, biće korisno da u gornjem izrazu odradimo integraciju po  $k^0$ . Dakle, imamo

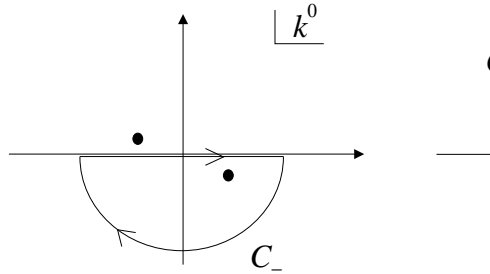
$$\Delta(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{e^{-ik^0 t}}{k^{02} - E^2 + i\varepsilon}, \quad (2.25)$$

gde je  $E = \sqrt{m_0^2 + \vec{k}^2}$  energija relativističke čestice mase  $m_0$ . Integral po  $k^0$  se jednostavno računa metodom konturnih integrala. Integrand ima jednostruke polove u  $k^0 = \pm E \mp i\varepsilon$ . Vidimo da  $i\varepsilon$  član diže poleove sa konture integracije. Videćemo da upravo ovakav način pomeranja polova (ili ekvivalentno deformacije konture integracije) daje propagatoru ispravne osobine kauzalnosti.

Za  $t > 0$  konturu zatvaramo u donjoj  $k^0$  poluravni, a integral po  $k^0$  postaje

$$I = \oint_{C_-} \frac{dz}{2\pi} \frac{e^{-izt}}{z^2 - E^2 + i\varepsilon} = -\frac{i}{2} \frac{e^{-iEt}}{E}. \quad (2.26)$$

Minus dolazi od toga što konturu prolazimo u negativnom smeru.



Slika 2.1: Konture integracije

Na sličan način za  $t < 0$  biramo konturu  $C_+$ . U ovom slučaju doprinos dolazi od drugog pola, i dobijamo

$$I = \int_{C_+} \frac{dz}{2\pi} \frac{e^{-izt}}{z^2 - E^2 + i\varepsilon} = -\frac{i}{2} \frac{e^{iEt}}{E}. \quad (2.27)$$

Na osnovu ovoga vidimo da se Feynmanov propagator može napisati u obliku

$$\Delta(x) = \theta(t) \Delta^+(x) + \theta(-t) \Delta^-(x) , \quad (2.28)$$

gde smo uveli pomoćne funkcije

$$\Delta^\pm(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2iE} e^{\mp iEt + i\vec{k}\cdot\vec{x}} . \quad (2.29)$$

Vidimo da je  $\Delta$  Lorentz invariantan, kompleksan, kao i to da signale propagira kako u budućnost, tako i u prošlost. Primetimo da nas i u klasičnoj teoriji interesuju propagatori. Oni nam tu služe da bi našli rešenja za jednačine kretanja u prisustvu spoljnih polja, dakle linearnih nehomogenih jednačina kretanja. U slučaju skalarnog polja u spoljnom polju  $J(x)$  imamo

$$(\partial^2 + m_0^2)\phi(x) = J(x) . \quad (2.30)$$

Klasični propagator zadovoljava

$$-(\partial^2 + m_0^2)G(x, y) = \delta(x - y) . \quad (2.31)$$

Fourier transform od  $G$  je opet singularan integral. Ovog puta, kao što znamo iz elektrodinamike, integral regularišemo tako da dobijemo tzv. retardovani propagator. Retardovani propagator je Lorentz invariant, realan, i signale propagira samo u budućnost. Nema misterije u tome zašto klasična teorija koristi retardovan, a kvantna Feynmanov propagator. Oni se prosto koriste za različite poslove. Na primer, u klasičnoj teoriji propagator služi da bi rešili nehomogene jednačine po realnim poljima. Iz tog razloga asocirani propagator mora biti realan. Kao što ćemo videti, u kvantnoj teoriji polja je propagator samo jedna (kompleksna) amplituda.

## 2.3 Simetrije u teoriji polja

U ovom odeljku ćemo se malo odmoriti od slobodnih teorija polja. Cilj nam je da ispitamo osnovne konsekvence kontinualnih simetrija dejstva neke opšte klasične teorije polja. Razmotrimo infinitezimalne transformacije

$$x \rightarrow x' = x + \delta x \quad (2.32)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) . \quad (2.33)$$

Pored totalne varijacije  $\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x)$  korisno je uvesti i pojam form varijacije  $\delta_0\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ . Ove dve varijacije stoje u jednostavnoj vezi  $\delta\phi(x) = \delta_0\phi(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x)$ . Pozabavimo se prvo računanjem Jacobiana gornje koordinatne transformacije. Jednostavan račun daje

$$J = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = |\delta_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu| = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu . \quad (2.34)$$



Dejstvo se pod gornjim transformacijama menja u

$$\begin{aligned}
 I \rightarrow I' &= \int dx' \mathcal{L}'(x') = \int dx J \mathcal{L}'(x') = \\
 &= \int dx (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) (\mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x)) = \\
 &= I + \int dx (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu) .
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Dakle

$$\delta I = \int dx (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu) . \tag{2.36}$$

Iz činjenice da je Lagranžijan oblika  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ , sledi da mu je form varijacija  $\delta_0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \partial_\mu \phi$ , što daje

$$\delta I = \int dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \partial_\mu \phi + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu \right) . \tag{2.37}$$

Korišćenjem klasičnih jednačina kretanja, kao i činjenice da su varijacije  $\delta_0$  i  $\partial_\mu$  nezavisne (tj. da komutiraju) dobijamo

$$\delta I = \int dx \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) . \tag{2.38}$$

Naše transformacije nam daju  $\delta x$  i  $\delta \phi$  kao funkcije skupa nezavisnih parametara  $\omega^a$ . Iskazana preko ovih varijacija, promena dejstva je jednaka

$$\delta I = \int dx \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\delta \phi - \delta x^\nu \partial_\nu \phi) + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) . \tag{2.39}$$

Ako transformacije koje razmatramo predstavljaju simetriju klasične teorije onda imamo  $\delta I = 0$ . Kao posledicu toga dobijamo

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 , \tag{2.40}$$

gde smo uveli struje

$$j_a^\mu = T^\mu{}_\nu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial \omega^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \delta \phi}{\partial \omega^a} . \tag{2.41}$$

Ove struje su date preko kanoničkog tenzora energije-impulsa

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu . \tag{2.42}$$

Za svaki parametar simetrije smo dobili po jednu očuvanu struju, tj. struju nulte divergencije.

Sledeći korak je da definišemo odgovarajuća naelektrisanja preko

$$Q_a = \int d\vec{x} j_a^0, \quad (2.43)$$

Oдавde sledi

$$\partial_0 Q_a = \int dV \partial_0 j_a^0 = - \int d\vec{x} \partial_i j_a^i = - \oint_{S_\infty} d\vec{S} \cdot \vec{j}_a = 0. \quad (2.44)$$

U zadnjem koraku smo opet pretpostavili da polja dovoljno brzo opadaju u beskonačnosti da bi napisani površinski integral bio nula. Pod ovom pretpostavkom, svakoj očuvanoj struji (dakle svakoj kontinualnoj simetriji dejstva) je pridruženo jedno očuvano naelektrisanje, tj konstanta kretanja.

Simetrije sa  $\delta x = 0$  se zovu unutrašnje. U ovom slučaju očuvane struje ne zavise od  $T^{\mu\nu}$  i imamo

$$j_a^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \delta \phi}{\partial \omega^a}. \quad (2.45)$$

Sve relativističke teorije su invarijantne na dve prostornovremenske simetrije (simetrije za koje  $\delta x \neq 0$ ) — na prostornovremenske translacije i Lorentz rotacije. Za translacije imamo  $\delta x^\mu = a^\mu$  i  $\delta \phi = 0$ . Asocirana očuvana struja je upravo tenzor energije-impulsa. Očuvana naelektrisanja su komponente vektora energije-impulsa

$$P_\nu = \int d\vec{x} T^0{}_\nu. \quad (2.46)$$

Pod Lorentzovim rotacijama imamo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.47)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = D(\Lambda)\phi(x), \quad (2.48)$$

gde je  $D(\Lambda)$  data reprezentacija Lorentzove grupe koja deluje na komponente polja  $\phi$ . Za infinitezimalne transformacije dobijamo

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (2.49)$$

$$D(\Lambda) = 1 - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}, \quad (2.50)$$

gde su  $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$  parametri, a  $\Sigma_{\mu\nu}$  odgovarajući generatori<sup>5</sup>. Dakle,

$$\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.51)$$

$$\delta \phi = -\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \phi, \quad (2.52)$$

<sup>5</sup>Transformacija koordinata data u (2.49) se može napisati i kao  $x \rightarrow (1 - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \ell_{\mu\nu})x$ , gde je  $\ell_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ .

odakle sledi

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu \delta x^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi &= T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{i}{2} \Sigma^{\nu\rho} \phi \omega_{\nu\rho} = \\ &= \frac{1}{2} \left( T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Sigma^{\nu\rho} \phi \right) \omega_{\nu\rho} . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Očuvana struja je tenzor ugaonog momenta

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Sigma^{\nu\rho} \phi , \quad (2.54)$$

Dok su odgovarajuća naelektrisanja komponente ugaonog momenta

$$J_{\nu\rho} = \int d\vec{x} M^0{}_{\nu\rho} . \quad (2.55)$$

Primetite da se ugaoni momenat sastoji iz dva dela — iz orbitalnog ugaonog momenta

$$L_{\nu\rho} = \int d\vec{x} (x_\nu T_\rho^0 - x_\rho T_\nu^0) , \quad (2.56)$$

i spinskog ugaonog momenta

$$S_{\nu\rho} = -2i \int d\vec{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \Sigma_{\nu\rho} \phi . \quad (2.57)$$

## ZADACI

- 2.1 Izračunajte bezmaseni skalarni propagator u  $d = 2$  dimenzije prostorvremena u zatvorenom obliku.
- 2.2 Ponovite gornji račun za slučaj bezmasenog skalarnog propagatora u  $d = 4$  dimenzije.
- 2.3 Operator vremenskog uređenja proizvoda dva bozonska polja je definisan sa

$$T\phi(x)\phi(y) = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) .$$

Koristeći razvoj slobodnog skalarnog polja po modovima, dat u (2.13), pokažite da je vakuumska očekivana vrednost  $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$  jednaka  $i\Delta(x-y)$ .

- 2.4 Dokažite identitet iz prethodnog zadatka na drugi način — ovog puta pokažite da leva i desna strana zadovoljavaju istu jednačinu kretanja, kao i iste granične uslove.
- 2.5 Izračunajte komutator  $[\phi(x), \phi(y)]$  slobodne skalarne teorije polja i pokažite da je jednak nuli kad  $x-y$  leži van svetlosnog konusa, tj. kada je  $(x-y)^2 < 0$ . Da li je Feynmanov propagator nula van svetlosnog konusa?
- 2.6 Slobodno kompleksno skalarno polje ima Lagranžijan

$$\mathcal{L} = |\partial\phi|^2 - m_0^2 |\phi|^2 .$$

Lako se vidi da je jedno kompleksno skalarno polje ekvivalentno paru realnih polja. Gornji model ima unutrašnju simetriju  $\phi \rightarrow e^{i\omega}\phi$ . Konstruišite odgovarajuće naelektrisanje  $Q$ . Predjite sad na kvantnu teoriju i pokažite da je i operator  $Q$  vremenski nezavisan, tj. da data simetrija važi i na kvantnom nivou.

- 2.7 Izvedite Lorentzovu algebru — podjite od generatora  $\ell_{\mu\nu}$  (datih u petoj fusnoti) i izračunajte  $[\ell_{\mu\nu}, \ell_{\rho\sigma}]$ . Pokažite da generatori  $J_{\mu\nu}$  slobodnog skalarnog polja zadovoljavaju istu ovu algebru.
- 2.8 Konstruišite tenzor ugaonog momenta za fotone. U ovom slučaju Lagranžijan je  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , gde je  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .



## Lekcija 3

# Slobodna teorija: spinorsko polje

Cilj današnje lekcije je da zasnujemo slobodnu teoriju polja čestice spina pola. U slučaju skalarnog polja smo izuzetno lako došli do odgovarajućeg Lagranžijana odnosno jednačina kretanja. Ovog puta ćemo imati nešto teži zadatak. Iz tog razloga vredi pogledati Lagranžijan bezmasenog skalarnog polja u  $d = 1$ . Imali smo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi \partial_t^2 \phi = -\frac{1}{2} (\partial_t^2 \phi) \phi . \quad (3.1)$$

Druga jednakost sledi posle primene dve parcijalne integracije. Iz gornjeg izraza vidimo da klasična polja komutiraju. Ovo ima smisla. Na kvantnom nivou imamo  $[\phi(t), \pi(t)] = i\hbar$ . Klasična teorija se dobija formalnim limesom  $\hbar \rightarrow 0$ . Dakle, u klasičnoj teoriji bozona svi objekti komutiraju.

Pogledajmo sad fermione. U ovom slučaju umesto komutatora imamo antikomutatore. Klasično fermionsko polje  $\psi$  treba dakle da bude opisano objektima koji antikomutiraju. Ovakvi objekti se zovu Grassmannovi brojevi. Lagranžijan za  $\psi$  ne može biti isti kao za slobodno skalarno polje jer bi tad imali

$$\psi \partial_t^2 \psi = (\partial_t^2 \psi) \psi = -\psi \partial_t^2 \psi = 0 . \quad (3.2)$$

Prva jednakost sledi posle dve parcijalne integracije, druga sledi iz antikomutiranja. Očigledno je da kinetički operator mora biti neparnog stepena po izvodima. Najjednostavniji kandidat bi bio  $\mathcal{L} = \psi \partial_t \psi$ , pa bi i asocirana jednačina kretanja bila prvog reda. Udaljimo se sada od ovog trivijalnog modela. Predjimo na teoriju u  $d$  dimenzija sa  $m \neq 0$ . Takodje, za početak se nećemo ograničavati na realna polja.

### 3.1 Diracova jednačina

Posmatrajmo opštu Lorentz invarijantnu, homogenu, linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda. Ona se može napisati kao

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi = 0 . \quad (3.3)$$

Ovo je Diracova jednačina. Kao i pre,  $m_0$  je gola masa. Da bi gornja klasična jednačina kretanja opisivala čestice mase  $m_0$  iz nje mora da sledi Klein-Gordonova jednačina  $(\partial^2 + m_0^2) \psi = 0$ , odnosno njen Fourier transform  $p^2 = m^2$ . Da bi ovo dobili zahtevaćemo da važi

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu + m_0)(i \gamma^\mu \partial_\mu - m_0) = -(\partial^2 + m_0^2) . \quad (3.4)$$

Odavde dobijamo da koeficijenti  $\gamma^\mu$  zadovoljavaju

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} , \quad (3.5)$$

gde je  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1)$  metrika prostorvremena. Matrica  $\eta^{\mu\nu}$  je inverzna od metrike. Antikomutatori (3.5) definišu tzv. Cliffordovu algebru. Očigledno je da  $\gamma^\mu$  ne mogu biti brojevi, već matrice. Može se pokazati da nam u  $d = 2n$  i  $d = 2n + 1$  dimenzija trebaju matrice koje su (bar)  $2^n \times 2^n$ . Odavde sledi da polje  $\psi$  ima  $2^n$  komponenti.

Pozabavimo se sada Lorentzovim transformacijama. Pod njima imamo

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (3.6)$$

$$\partial_\mu \rightarrow (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \quad (3.7)$$

$$\psi(x) \rightarrow D_{1/2}(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x) , \quad (3.8)$$

gde je  $D_{1/2}(\Lambda)$  odgovarajuća reprezentacija Lorentzove algebre na prostoru komponenti od  $\psi$ . Na osnovu gornjih transformacija imamo

$$\begin{aligned} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi(x) &\rightarrow \\ &\rightarrow (i \gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m_0) D_{1/2}(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= D_{1/2}(\Lambda) D_{1/2}(\Lambda)^{-1} (i \gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m_0) D_{1/2}(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}x) = \\ &= D_{1/2}(\Lambda) (i (D_{1/2}(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu D_{1/2}(\Lambda)) - m_0) \psi(\Lambda^{-1}x) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Lorentz kovarijantnost implicira da desna strana mora biti jednaka

$$D_{1/2}(\Lambda) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi(\Lambda^{-1}x) . \quad (3.10)$$

Odavde sledi

$$D_{1/2}(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu D_{1/2}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu . \quad (3.11)$$

Uslov (3.11) nam omogućava da odredimo reprezentaciju  $D_{1/2}(\Lambda)$ , dakle da odredimo spin od  $\psi$ . Kao i uvek, prelazimo na infinitezimalne transformacije (2.49), (2.50). Stavljajući ovo u jednačinu (3.11) dobijamo

$$[\gamma^\mu, \Sigma^{\rho\sigma}] = i (\delta^\mu_\alpha \delta^\rho_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\rho_\alpha) \gamma^\nu . \quad (3.12)$$

Generator  $\Sigma^{\mu\nu}$  se sastoji od gama matrica. Imajući u vidu identitet

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\} , \quad (3.13)$$

postaje očigledno da je  $\Sigma$  kvadratično po  $\gamma$ . Lako dobijamo da važi

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] . \quad (3.14)$$

Može se pokazati da su sve reprezentacije Cliffordove algebre unitarno ekvivalentne. Konkretni izbor gama matrica je stvar konvencije. Mi ćemo od sada raditi sa gama matricama koje zadovoljavaju  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ ,  $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ .

## 3.2 Fermi bilineari

Skoro smo spremni da se vratimo dejstvu. Pre toga treba samo da pogledamo kako se transformišu razni bilineari od  $\psi$ . Prvo nam je potrebno da konstruišemo bilinearnu invarijantu — ona će igrati ulogu masenog člana u dejstvu. Kao što smo videli, imamo

$$\psi \rightarrow D_{1/2}(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (3.15)$$

$$\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)D_{1/2}(\Lambda)^\dagger . \quad (3.16)$$

Odavde dobijamo

$$\psi^\dagger\psi \rightarrow \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)D_{1/2}(\Lambda)^\dagger D_{1/2}(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) , \quad (3.17)$$

medjutim,  $D_{1/2}(\Lambda)^\dagger D_{1/2}(\Lambda) \neq 1$  (reprezentacija nije unitarna — vidi zadatak 3.3), tako da gornji bilinear nije invarijantan. Lako se može pokazati da se polje  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  transformiše kao

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)D_{1/2}(\Lambda)^{-1} . \quad (3.18)$$

Odavde sledi da je  $\bar{\psi}\psi$  Lorentzova invarijanta. Jednako lako možemo pokazati da se bilinear  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  transformiše kao vektor. Sad vidimo i da je naš traženi Lagranžijan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m_0)\psi . \quad (3.19)$$

Ovde smo uveli standardnu notaciju  $A = \gamma^\mu A_\mu$ .

## 3.3 Rešavanje Diracove jednačine

U ovom odeljku ćemo se pozabaviti rešavanjem Diracove jednačine (3.3). Sve ide kao i kod Klein–Gordonove jednačine, ovde polje samo imamo više komponenti<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Jednačina kretanja je linearna, te se pri njenom rešavanju ne srećemo sa Grassmannovskom prirodom spinornog polja.



Lako se vidi da je (za  $p^0 > 0$ ) rešenje oblika  $\psi = u(p)e^{-ip \cdot x}$ , gde  $u(p)$  zadovoljava algebarsku (matričnu) jednačinu

$$(\not{p} - m_0)u(p) = 0 . \quad (3.20)$$

Nije teško pokazati da ova jednačina ima dva linearno nezavisna rešenja  $u^s(p)$ ,  $s = 1, 2$  (koji će odgovarati spinu  $s = 1/2$  odnosno  $s = -1/2$ ). Na isti način, za  $p^0 < 0$  je rešenje oblika  $\psi = v(p)e^{-ip \cdot x}$ , a  $v(p)$  je rešenje od

$$(\not{p} - m_0)v(p) = 0 . \quad (3.21)$$

Kao i pre, i sad imamo dva nezavisna rešenja  $v^s(p)$ . Primitimo da su  $u(p)$  i  $v(p)$  spinori baš kao i  $\psi$ . Opšte rešenje Diracove jednačine je linearna kombinacija gornjih, dakle,

$$\psi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left( a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s \dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.22)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left( b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{s \dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} \right) . \quad (3.23)$$

Kanonički antikomutator je sada

$$\{\psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\alpha\beta} , \quad (3.24)$$

gde indeksi  $\alpha$  i  $\beta$  prebrojavaju komponente spinora. Odavde sledi da je algebra modova data sa

$$\{a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{q}}^{r \dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{q}}^{r \dagger}\} = \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} . \quad (3.25)$$

Vakuum je sada opisan stanjem kje zadovoljava  $a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0$ , dok za Hamiltonijan dobijamo

$$\mathbf{H} = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \sum_s E_{\vec{p}} \left( a_{\vec{p}}^{s \dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s \dagger} b_{\vec{p}}^s \right) . \quad (3.26)$$

U gornjem izrazu smo, kao i u slučaju skalarnog polja odbacili beskonačni komutirajući član, tj. napravili redefiniciju vakuumske energije.

### 3.4 Propagator

Videli smo da propagator skalarnog polja zadovoljava

$$-(\partial^2 + m_0^2) \Delta(x) = \delta(x) . \quad (3.27)$$

Feynmanov propagator je jednoznačno određen regularizacijom  $m_0^2 \rightarrow m_0^2 - i\varepsilon$ . Na sličan način, propagator spinorskog polja zadovoljava

$$(i \not{\partial} - m_0) S(x) = \delta(x) . \quad (3.28)$$

Primitimo da je sada  $S$  matrica u spinornom prostoru. Lako se može pokazati da je Feynmanov propagator za spinornu česticu

$$S(x) = (i \not{\partial} + m_0) \Delta(x) . \quad (3.29)$$

### 3.5 Majorana fermioni

Diracov fermion u spoljnom elektromagnetnom polju je opisan Lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - e_0\rlap{\not{A}} - m_0)\psi = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m_0)\psi - e_0A_\mu j^\mu, \quad (3.30)$$

gde je  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . Ovo se dobija iz Diracovog Lagranžijana standardnom preskripcijom  $p_\mu \rightarrow p^\mu - e_0A_\mu$ , odnosno  $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - e_0A_\mu$ , gde je  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  elektromagnetni potencijal, a  $e_0$  (golo) naelektrisanje. Lako se vidi da je  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , što je direktna posledica invarijantnosti teorije na fazne rotacije

$$\psi \rightarrow e^{i\omega}\psi \quad (3.31)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\omega}\bar{\psi}. \quad (3.32)$$

Odgovarajuća jednačina kretanja glasi

$$(i\rlap{\not{\partial}} - e\rlap{\not{A}} - m_0)\psi = 0. \quad (3.33)$$

Kao što smo videli, ova jednačina opisuje česticu gole mase  $m_0$  i golog naelektrisanja  $e_0$ .

Razmotrimo sada operaciju konjugacije naelektrisanja. Pod ovom operacijom  $\psi \rightarrow \psi^c$ , gde  $\psi^c$  opisuje polje iste mase ali suprotnog naelektrisanja od  $\psi$ . Imamo dakle,

$$(i\rlap{\not{\partial}} + e_0\rlap{\not{A}} - m_0)\psi^c = 0. \quad (3.34)$$

Cilj nam je da konstruišemo polje  $\psi^c$ . Da bismo ovo uradili pogledajmo prvo jedančinu za konjugovano polje  $\bar{\psi}$ . Iz Lagranžijana (3.30) dobijamo

$$\bar{\psi}(-i\overleftarrow{\not{\partial}} - e\rlap{\not{A}} - m_0) = 0. \quad (3.35)$$

Strelica na  $\overleftarrow{\partial}_\mu$  nam govori da u gornjem izrazu izvod deluje na levo. Transponovanjem jednačine (3.35) dobijamo

$$(-\gamma^\mu \text{T}(i\partial_\mu + e_0A_\mu) - m_0)\bar{\psi}^{\text{T}} = 0. \quad (3.36)$$

Može se pokazati da u Cliffordovoj algebri postoji matrica  $C$  koja zadovoljava  $C\gamma^\mu \text{T}C^{-1} = -\gamma$ . Koristeći ovo dobijamo

$$(i\rlap{\not{\partial}} + e_0\rlap{\not{A}} - m_0)C\bar{\psi}^{\text{T}} = 0, \quad (3.37)$$

dakle, polje konjugovanog naelektrisanja je dato sa

$$\psi^c = C\bar{\psi}^{\text{T}}. \quad (3.38)$$

Iz ovog razloga se  $C$  zove matrica konjugacije naelektrisanja. Iz osobine  $C^\dagger C = 1$  sledi da je  $(\psi^c)^c = \psi$ .

Sada smo u poziciji da govorimo i o realnim, odnosno Majorana fermionima, dakle o nenaelektrisanim fermionima. Ovi fermioni zadovoljavaju Majorana uslov

$$\psi = \psi^c . \quad (3.39)$$

Lagranžijan za slobodne Majorana fermione glasi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_0) \psi . \quad (3.40)$$

Normalizacion factor 1/2 je uobičajen kad imamo posla sa realnim poljima. Ako u gornjem Lagranžijanu iskoristimo Majorana uslov, a zatim izvršimo parcijalnu integraciju i na kraju iskoristimo definiciju (3.38) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_0) \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi}^c (i \not{\partial} - m_0) \psi^c = \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m_0) \psi = -\frac{1}{2} \psi^T (i \overleftarrow{\not{\partial}} - m_0)^T \bar{\psi}^T . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Kad bi komponente od  $\psi$  bili brojevi onda bi imali  $\mathcal{L} = -\mathcal{L} = 0$ . Medjutim, kao što znamo, komponente spinora su Grassmannovi brojevi. U ovom slučaju kod transponovanja imamo dodatni znak minus. Na primer

$$\left( (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \right)^T = - \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}^T (\varphi_1, \varphi_2)^T = -(\chi_1, \chi_2) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} . \quad (3.42)$$

Dodatni znak minus mas spašava. Sada vidimo da Lagranžijan za Majorana fermione implicira da su polja Grassmannovska.

**ZADACI**

- 3.1 Izvedite komutacionu relaciju (3.12) i pokažite da je (3.14) njeno rešenje.
- 3.2 Pokažite da generatori  $\Sigma$  dati u (3.14) zadovoljavaju Lorentzovu algebru.
- 3.3 Pokažite da su generatori rotacija Hermitski, a da generatori boostova to nisu. Dakle, reprezentacija  $D_{1/2}(\Lambda)$  nije unitarna. Lorentzova grupa nije kompaktna, tako da nema konačno dimenzionalnih unitarnih reprezentacija. Ovo nije problem u kvantnoj teoriji polja. Sa druge strane, bio bi nerazrešivi problem  $\psi$ -ovi bili talasne funkcije jednočestične teorije.
- 3.4 Schrödingerova jednačina za nerelativističku slobodnu česticu je asocirana sa očuvanom strujom verovatnoće. Konstruišite ovu struju. Na sličan način, Diracova jednačina za posledicu ima jednu očuvanu struju. Konstruišite ovu struju i pokažite da ona ne odgovara verovatnoći. Čemu ona odgovara, tj. šta je očuvano?
- 3.5 Pokažite da se pod Lorentzovim transformacijama polje  $\bar{\psi}$  transformiše kao u jednačini (3.18), odnosno kao konjugovani spinor.
- 3.6 Diracovo dejstvo dato u (3.19) nije Hermitsko. Pokažite da se ovo jednostavno rešava dodavanjem člana koji je totalna divergencija (te ne menja jednačine kretanja).
- 3.7 Pokažite da se u  $d = 2n$  dimenzija sve  $2^n \times 2^n$  matrice mogu napisati kao linearne kombinacije od antisimetričnih proizvoda gama matrica

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &\gamma^\mu \\
 &\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\
 &\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} \\
 &\vdots \\
 &\gamma^{[\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_d]} .
 \end{aligned}$$

1 je bazis u prostoru  $\Gamma_0$ ,  $\gamma^\mu$  u prostoru  $\Gamma_1$ , itd. Nadjite dimenzije prostora  $\Gamma_i$  i pokažite da prostor  $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_d$  ima  $2^{2n}$  dimenzija.

- 3.8 Pokažite kako se transformiše opšti fermionsi bilinear  $\bar{\psi}\Gamma\psi$ .
- 3.9 Prostor  $\Gamma_i$  i  $\Gamma_{d-i}$  su medjusobno dualni. Konstruišite eksplicitno preslikavanje iz  $\Gamma_i$  u  $\Gamma_{d-i}$  i pokažite da je reč o dualnosti, tj. da mu je kvadrat jednak jedinici.

3.10 U parnom broju dimenzija je zgodno definisati matricu  $\gamma = C \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{d-1}$ , gde je  $C$  neka konstanta. Pokažite da važi  $\{\gamma, \gamma^\mu\} = 0$  i  $\gamma^\dagger = \gamma$ . Odredite  $C$  tako da važi  $\gamma^2 = 1$ . U  $d = 4$  imamo  $\gamma = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ . Ovaj objekat se često obeležava sa  $\gamma_5$ , mada je reč o lošoj notaciji.

3.11 Pokažite da je u  $d = 4$  prostor  $\Gamma$  razapet bazisom

$$\begin{aligned} &1 \\ &\gamma^\mu \\ &\Sigma^{\mu\nu} \\ &\gamma^\mu \gamma \\ &\gamma . \end{aligned}$$

Pokazžite da su odgovarajući bilineari (redom) skalar, vektor, tenzor, pseudovektor (ili aksialni vektor) i pseudoskalar.

3.12 Izračunajte divergencije struja  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  i  $j_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma \psi$ . Kada su ove struje očuvane? Pokažite da je  $j^\mu$  struja koja odgovara simetriji na fazne rotacije  $\psi \rightarrow e^{i\omega} \psi$ . Čemu odgovara aksijalna struja  $j_A^\mu$ ?

3.13 U našem “izvodjenju” dejstva za slobodne fermione smo došli do zaključka da kinetički operator mora biti prvog reda po izvodima. Za bozone je on bio drugog reda. No dali baš mora tako da bude? Pokušajte da konstruišete dejstvo za skalarno polje koje je prvog reda a ekvivalentno standardnom dejstvu. Pored polja  $\phi$  možete uvesti i dodatna pomoćna polja. Ekvivalenciju pokažite na nivou jednačina kretanja.

3.14 Izvedite kanoničku relaciju (3.24). U prvom trenutku nemojte gledati da li je reč o komutatoru ili antikomutatoru, već prosto podjite od odgovarajućih Poissonovih zagrada. U sledećem delu zadatka kvatizujte teoriju polazeći od

$$[\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b^\dagger(t, \vec{y})] = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab} .$$

Nadjite Hamiltonijan i objasnite zašto ovakva kvantizacija nije dobra.

3.15 Dokažite da važe sledeće relacije kompletnosti (tzv. spinske sume)

$$\begin{aligned} \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \not{p} + m_0 \\ \sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) &= \not{p} - m_0 . \end{aligned}$$

3.16 U slobodnoj skalarnoj teoriji smo imali  $i \Delta(x - y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ . Na sličan način, u slobodnoj spinornoj teoriji imamo  $i S_{\alpha\beta}(x - y) = \langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle$ . Kako je definisano vremensko uredjenje proizvoda dva spinorna polja?

3.17 Konstruišite jednu reprezentaciju gama matrica u  $d = 3$  dimenzije. Nadjite matricu  $C$  i pomoću nje raspišite Lagranžijan bezmasenih Majorana spinora po komponentama.

## Lekcija 4

# Slobodna teorija: vektorsko polje

Naš današnji zadatak je da konstruišemo slobodnu teoriju vektorskog polja  $A_\mu$ . Prirodni kandidat za Lagranžijan je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 A_\mu^2 . \quad (4.1)$$

Prostorne komponente polja dolaze sa istim znakom kao što je bio slučaj kod skalarnog polja. Nasuprot njima, vremenska komponenta  $A_0$  dolazi sa suprotnim znakom. Zbog ovoga njen doprinos energiji dolaziti sa pogrešnim znakom, te energija gornjeg modela nije ograničena odozdo. Mogli bi sada da pokušamo da modifikujemo gornji Lagranžijan dodavanjem drugih, manifestno kovarijantnih, bilinearnih članova, sve u cilju dobijanja smisaone teorije. Srećom mi već znamo jednu ispravnu teoriju, doduše bezmasenog, vektorskog polja — elektrodinamiku.

### 4.1 Elektrodinamika

U kovarijantnoj notaciji Maxwellove jednačine glase

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (4.2)$$

$$\partial^{(\lambda} F^{\mu\nu)} = 0 , \quad (4.3)$$

gde je  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  tenzor jačine elektromagnetnog polja. U drugoj jednačini se indeksi unutar obične zagrade simetrizuju. Posledica ove jednačine je da se jačina polja može izraziti preko potencijala  $A_\mu$  kao

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (4.4)$$

Potencijal jednoznačno određuje jačinu polja. Obrnut slučaj, međjutim, ne važi pošto je jačina polja invarijantna na gejdž (gauge) simetriju

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega . \quad (4.5)$$

Polja  $A_\mu$  i  $A'_\mu$  su gejdž ekvivalentna, tj. pripadaju istoj gejdž orbiti. Sva polja duž jedne gejdž orbite imaju istu jačinu polja. Primetimo da antisimetričnost jačine polja implicira da struja  $j^\mu$  mora biti očuvana, tj. struja asocirana sa izvorom polja mora biti očuvana.

Raspisane preko potencijala  $A_\mu$ , Maxwellove jednačine glase

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu (\partial \cdot A) = j^\mu . \quad (4.6)$$

Ove jednačine seledi iz Lagranžijana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu , \quad (4.7)$$

gde je jačina polja izražena preko potencijala kao u (4.4). Drugi deo gornjeg Lagranžijana predstavlja interakciju fotona sa spoljnim izvorima. Slobodni fotoni su dakle opisani sa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)^2 + \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2 . \quad (4.8)$$

Za razliku od bezmasene verzije dejstva (4.1), ovo dejstvo daje energiju koja jeste ograničena odozdo. Pored toga, gornje dejstvo je invarijantno u odnosu na gejdž transformacije (4.5).

## 4.2 Fiksiranje gejdža

Dva polja koja leže na istoj gejdž orbiti odgovaraju istom fizičkom stanju. Iz ovog razloga je gejdž teoriji moguće nametnuti dodatne uslove (tzv. gejdž uslove) koji jednoznačno biraju predstavnika iz svake gejdž orbite. Najpoznatiji je Lorentzov uslov

$$\partial \cdot A = 0 . \quad (4.9)$$

Lako se može pokazati da je ovo zaista dobar gejdž uslov. Pored toga, Lorentzov uslov ima dodatnu pogodnost što je manifestno kovarijantan<sup>1</sup>. Sa gejdž simetrijom i gejdž uslovima smo se sreli i u klasičnoj elektrodinamici. Tamo, međjutim, oni igraju sasvim usputnu ulogu. U narednom odeljku ćemo videti da to nije slučaj i u kvantnoj teoriji.

Na prvi pogled bi se reklo da su dejstva (4.1) i (4.8) ekvivalentna, pošto su im Lagranžijani isti u slučaju Lorentzovog gejdž uslova. Ipak, reče je o sasvim različitim teorijama. To se odmah vidi iz odgovarajućih energija. Stvar je u tome što Lagranžijani služe za dobijanje jednačina kretanja. Jednačine kretanja se dobijaju diferenciranjem. Prvo se, dakle, vrši diferenciranje, pa se tek onda fiksira gejdž.

<sup>1</sup>Fizika ne zavisi od izbora gejdža. Nekovarijantni gejdž uslov daje teoriju koja nije *manifestno* kovarijantna. Ipak, i u ovakvom gejdžu, krajnji rezultati svih fizički merljivih veličina su i dalje kovarijantni. Međjutim, račun je često bitno jednostavniji u kovarijantnom gejdžu kada je kovarijantnost eksplicitna u svakom koraku.

### 4.3 Kvantizacija slobodne elektrodinamike

Predjimo sada na kanoničku kvantizaciju slobodne teorije polja fotona. Da bi ovo uradili moramo preći u Hamiltonov formalizam. Prvi korak je da nadjemo impulse konjugovane fotonskom polju  $A^\mu$ . Iz dejstva (4.8) dobijamo

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ \dot{A}^\mu & \mu = 1, 2, \dots, d-1 \end{cases} . \quad (4.10)$$

Sledeći korak je da sve vremenske izvode (brzine) izrazimo preko koordinata  $A^\mu$  i impulsa  $\pi^\mu$ . Nažalost ovo nije moguće uraditi. Iz gornjeg izraza vidimo da je  $\pi^0 = 0$ , dakle, imamo  $d$  brzina a samo  $d-1$  impulsa. Vidimo da u slučaju dejstva (4.8) standardni algoritam za prelazak na Hamiltonovu dinamiku ne radi<sup>2</sup>.

Sa druge strane, kvantizacija bezmasene verzije dejstva (4.1) ide trivijalno. Impulsi su sada

$$\pi^\mu = \dot{A}^\mu , \quad (4.11)$$

tako da nemamo nikakvih problema da nadjemo Hamiltonijan  $\mathcal{H}$ . Kanonički komutatori su u ovom slučaju

$$[A^\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{y})] = -\eta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (4.12)$$

dok Heisenbergove jednačine kretanja daju

$$\partial^2 A^\mu = 0 . \quad (4.13)$$

U ovom slučaju prosto imamo  $d$  nezavisnih kopija (bezmasenog) skalarnog polja. Rešenje gornje jednačine se može napisati kao

$$A^\mu = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) \left( a_{r,\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + a_{r,\vec{k}}^\dagger e^{ik \cdot x} \right) , \quad (4.14)$$

gde je  $k^0 = E_{\vec{k}} = |\vec{k}|$ . Gornji izraz za vektorsko polje je dat preko  $d$  polarizacionih vektora  $\varepsilon_0^\mu, \varepsilon_1^\mu, \dots, \varepsilon_{d-1}^\mu$ , po jedan za svaki stepen slobode. Najjednostavniji izbor bi bio  $\varepsilon_0^\mu = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\varepsilon_1^\mu = (0, 1, \dots, 0)$ , itd. Ipak, kao što ćemo videti, mnogo korisniji izbor polarizacionih vektora je da uzmemo  $\varepsilon_0^\mu = (1, 0, \dots, 0)$  i  $\varepsilon_r^\mu = (0, \vec{\varepsilon}_r)$ .  $d-1$  jediničnih prostornih vektora  $\vec{\varepsilon}_r$  su određeni tako da je poslednji od njih longitudinalan, tj.  $\vec{\varepsilon}_{d-1} = \vec{k}/|\vec{k}|$ , dok su ostali vektori transverzalni, dakle imamo  $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_r(\vec{k}) = 0$  za  $r = 1, 2, \dots, d-2$ . Ovakvi polarizacioni vektori zadovoljavaju

$$\varepsilon_r^\mu(\vec{k}) \varepsilon_{s,\mu}(\vec{k}) = -\zeta_r \delta_{rs} \quad (4.15)$$

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) \varepsilon_r^\nu(\vec{k}) = -\eta^{\mu\nu} , \quad (4.16)$$

<sup>2</sup>Dirac je izveo generalizovanu preskripciju za uspostavljanje Hamiltonovog formalizma za ovakve teorije, no mi se nećemo time baviti u okviru ovih lekcija. Prisetimo samo da uzrok problema leži u gejdž simetriji fotonske teorije.



gde smo uveli pogodnu oznaku  $\zeta_0 = -1, \zeta_r = 1$ .

Problem sa pogrešnim znakom vremenskih komponenti polja je naravno ostao. Energija i dalje nije ograničena odozdo. Povrh toga prostor stanja nije pozitivno definitan, dakle, naivna kanonička kvantizacija daje verovatnoće koje nisu pozitivne. Nalazimo se u neprijatnoj situaciji. Sa jedne strane imamo dejstvo koje daje ispravnu klasičnu teoriju a koje ne znamo da kvantizujemo. Sa druge strane imamo dejstvo koje znamo da kvantizujemo, ali koje ima neizlečive probleme kako na klasičnom tako i na kvantnom nivou. Povrh toga, ta dva dejstva su jednaka za polja koja zadovoljavaju Lorentzov gejdž uslov.

Ispostavlja se da je to upravo ono što nas spašava. Nametnimo zato Lorentzov uslov na teoriju koju smo upravo kvantovali. Lako je videti da  $\partial \cdot A = 0$  nije moguće shvatiti kao operatorski identitet, pošto bi došli u koliziju sa kanoničkim komutatorima. Ideja Gupte i Bleulera je bila da se u ukupnom prostoru stanja definiše podprostor *fizičkih stanja*. Fizička stanja imaju tu osobinu da je u njima očekivana vrednost od  $\partial \cdot A$  jednaka nuli, dakle

$$\langle \text{phys} | \partial \cdot A | \text{phys} \rangle = 0 , \quad (4.17)$$

ili, ekvivalentno tome

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)} | \text{phys} \rangle = 0 . \quad (4.18)$$

$A_\mu^{(+)}$  je pozitivno frekventni deo od  $A_\mu$ , dakle onaj deo koji se sastoji od anihilacionih operatora. Korišćenjem rešenja (4.14), kao i našeg izbora polarizacionih vektora, ovo se može napisati i kao

$$(a_{d-1, \vec{k}} - a_{0, \vec{k}}) | \text{phys} \rangle = 0 . \quad (4.19)$$

Jednostavna posledica ovoga je da važi

$$\begin{aligned} \langle \text{phys} | (a_{d-1, \vec{k}}^\dagger a_{d-1, \vec{k}} - a_{0, \vec{k}}^\dagger a_{0, \vec{k}}) | \text{phys} \rangle &= \\ &= \langle \text{phys} | a_{d-1, \vec{k}}^\dagger (a_{d-1, \vec{k}} - a_{0, \vec{k}}) | \text{phys} \rangle = 0 . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Oдавde sledi

$$\begin{aligned} \langle \text{phys} | \mathbf{H} | \text{phys} \rangle &= \\ &= \langle \text{phys} | \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} E_{\vec{k}} \sum_{r \in \text{trans}} a_{r, \vec{k}}^\dagger a_{r, \vec{k}} | \text{phys} \rangle . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sada vidimo da je Gupta–Bleulerov uslov obezbedio da energija (na podprostoru fizičkih stanja) zavisi samo od transverzalnih stepeni slobode, te da bude ograničena odozdo. Na sličan način i sve ostale fizičke veličine zavise samo od trasverzalnih fotona. Pored ovog, fizička stanja imaju pozitivnu normu. Gupta–Bleulerov metod nam je omogućio da na konzistentan način izvršimo kovarijantnu kvantizaciju elektrodinamike u Lorentzovom gejdžu.

Za kraj ovog odeljka spomenimo i to da moderni metodi kovarijantne kvantizacije gejdž teorija problem vremenskih i longitudinalnih fotona rešavaju na sasvim drugi način. Umesto da izbacuju vremenske i longitudinalne fotone, oni *dodaju* nove stepene slobode (tzv. polja duhova). Doprinos duhova je upravo takav da se krati sa doprinosom vremenskih i longitudinalnih fotona.

## 4.4 Masivno vektorsko polje

Do sada smo se bavili bezmasenim vektorskim poljem. Novine u kvantizaciji ove teorije potiču od gejdž invarijantnosti (4.5). Teoriji je lako dodati maseni član, no time gubimo gejdž invarijantnost<sup>3</sup>. Teorija masenog vektorskog polja ima Lagranžijan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_0^2 A_\mu^2 . \quad (4.22)$$

Odavde sledi jednačina kretanja

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_0^2 A^\nu = 0 . \quad (4.23)$$

Diferenciranjem gornje jednačine dobijamo uslov konzistentnosti  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Primećimo da ovo *nije* gejdž uslov, već uslov konzistentnosti. Gornja teorija uopšte nije gejdž invarijantna. Korišćenjem uslova konzistentnosti dobijamo

$$(\partial^2 + m_0^2) A^\mu = 0 . \quad (4.24)$$

---

<sup>3</sup>Za sada nam je gejv simertija samo komplikovala život. Ipak, ispostavlja se da su upravo gejdž teorije one koje daju konzistentan opis fundamentalnih interakcija.

## ZADACI

- 4.1 Pokažite da Lagranžijan (4.7) zaista dovodi do jednačine kretanja (4.6).
- 4.2 Pokažite da je  $\partial \cdot A = 0$  dobar gejdž uslov.
- 4.3 Izvedite komutatore operatora modova i pokažite da u asociranom “Hilbertovom prostoru” postoje stanja negativne norme.
- 4.4 Pokažite da Lorentzov uslov  $\partial \cdot A = 0$  nije moguće shvatiti kao operatorski identitet. On tada ne bi bio uskladjen sa kanoničkim komutacionim relacijama.
- 4.5 Nadjite Feynmanov propagator za slobodne fotone u Lorentzovom gejdžu.
- 4.6 Pokažite da Gupta–Bleulerov uslov obezbedjuje da fizička stanja imaju pozitivnu normu.
- 4.7 Dugo se verovalo da masa kviri gejdž invarijantnost. Srećom postoji nekoliko načina da se iz gejdž teorije dobiju masene čestice. Standardni model za ovo koristi spontano narušenje simetrije. Najteži, ali i naj elegantniji, način da ovo uradimo je preko anomalija. Pored ovog, u nekim dimenzijama prostora-vremena je moguće dejstvu dodati “topološke članove” koji fotonima daju masu. Najjednostavniji način da uvedemo masu je dodavanjem pomoćnog skalarnog polja  $f$  — tzv. Stuckelbergovog polja. Pokušajte da konstruišete gejdž invarijantni Lagranžijan  $\mathcal{L}(A_\mu, f)$  koji opisuje maseno vektorsko polje.

## Lekcija 5

# Interakcije

Do sada smo se bavili slobodnim teorijama polja. Vreme je da predjemo na tretman teorija sa interakcijama. Pogledajmo tri primera interagujućih teorija. Prvi model je tzv.  $\phi^4$  teorija data Lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 . \quad (5.1)$$

Konstanta  $\lambda_0$  predstavlja (golu) interakciju skalarnog polja sa samim sobom. Drugi primer koji ćemo razmatrati je kvantna elektrodinamika. Ova teorija je opisana sa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i \not{\partial} - m_0)\psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - e_0 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu = \\ &= \bar{\psi}(i \not{D} - m_0)\psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Prva dva dela ovog Lagranžijana opisuju slobodno spinorsko, odnosno vektorsko polje. Interakcija između elektrona i fotona je data kao proizvod vektorske struje  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  i fotonskog polja  $A^\mu$ . Jačina interakcije je određena (golim) naelektrisanjem  $e_0$ . Iz drugog reda gornje jednačine vidimo da se kvantna elektrodinamika dobija iz slobodne teorije elektrona i fotona primenom minimalne supstitucije. Treći primer interagujuće teorije koji ćemo razmotriti je tzv. Yukawa teorija data sa

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m_0)\psi + \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - g_0 \bar{\psi} \psi \phi . \quad (5.3)$$

Kao i u prethodnom primeru, i u Yukawa teoriji je interakcija kubnog tipa. Jačina interakcije je određena golom konstantnom interakcije  $g_0$ .

U svim primerima koje smo naveli interakcija je *lokalna*, odnosno data preko proizvoda polja u istoj tački. U sadašnjem trenutku razvoja kvantne teorije polja se čini da je skup lokalnih teorija polja dovoljno bogat da opiše sve fundamentalne interakcije. Pored toga, gornji primeri su takvi da u interakcijama (dakle u članovima koji se sastoje od proizvoda tri ili više polja) ne figurišu izvodi. Postoje veoma važni modeli kod kojih interakcije sadrže izvode (npr. kvantna hromodinamika) no oni donekle usložnjavaju formalizam, te ih mi nećemo razmatrati u ovim lekcijama.

## 5.1 Renormalizabilnost

Lokalne kvantne teorije polja generalno boluju od UV beskonačnosti, tj. beskonačnosti koje se očituju na velikim energijama odnosno malim rastojanjima. Regularizacija ovih beskonačnosti se postiže uvođenjem nekog parametra  $\Lambda$  dimenzija mase čija je svrha da odseče efekte na energetskim skalama većim od  $\Lambda$ . U ovako regularisanoj teoriji sve vreme baratamo sa konačnim veličinama. Na samom kraju računa uzimamo limes  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Posmatrajmo sada neku generičku teoriju. Neka  $f(g_0)$  označava amplitudu za proces koji nas interesuje. Radi jednostavnosti posmatramo model koji je dat preko samo jedne konstante interakcije  $g_0$  dimenzije  $[g_0] = M^K$ . Uvođenjem regulatora  $\Lambda$  naša amplituda postaje  $f(g_0/\Lambda^K)$ . Ovo direktno sledi iz dimenzione analize pošto amplitude, pa time i verovatnoće, moraju biti bezdimenzione. Zamislimo da smo  $f$  računali kao Taylorov razvoj po  $g_0$ . U tom slučaju vidimo da za  $K < 0$  limes  $\Lambda \rightarrow \infty$  dovodi do toga da amplituda  $f$  divergira! Na osnovu ovog jednostavnog argumenta vidimo da su sve teorije opisane konstantom interakcije čije su dimenzije masa na negativni stepen bolesne. Za ovakve teorije kažemo da nisu renormalizabilne. Jedine teorije koje treba da nas interesuju prilikom opisa fundamentalnih interakcija imaju ili  $K = 0$ , dakle bezdimenzione konstante interakcije, ili  $K < 0$ . Prve su renormalizabilne, a druge super renormalizabilne teorije. Ovim pitanjem ćemo se detaljnije baviti u kasnijim lekcijama, sada samo želimo da iskoristimo gornji kriterijum u cilju ograničavanja broja kandidata za zdrave interagujuće kvantne teorije polja.

Skalarno (a i svako drugo tenzorsko) polje u  $d$  dimenzija prostorvremena ima dimenzije  $[\phi] = M^{(d-2)/2}$ . Odavde sledi da su dimenzije konstante interakcije  $\phi^4$  teorije  $[\lambda_0] = M^{4-d}$ . Dakle,  $\phi^4$  teorija je nerenormalizabilna za  $d > 4$ , renormalizabilna za  $d = 4$ , a super renormalizabilna za  $d < 4$ . Spinorno polje ima dimenzije  $[\psi] = M^{(d-1)/2}$ . Odavde vidimo da konstanta interakcije kvantne elektrodinamike ima dimenzije  $[e_0] = M^{(4-d)/2}$ . Kao i u prethodnom slučaju  $d = 4$  daje renormalizabilnu teoriju. Elektrodinamika u višim dimenzijama je nerenormalizabilna teorija. Isto važi i za Yukawa model. Iz ovih primera vidimo da zahtev renormalizabilnosti bitno ograničava moguće modele. Npr. jedine interagujuće skalarne teorije u  $d = 4$  dimenzije su  $\phi^3$  i  $\phi^4$  modeli. Ni jedna čisto spinorna teorija nije moguća u  $d = 4$ , dok je jedina dozvoljena interakcija skalarnog i spinornog polja Yukawinog oblika.

Što je veći broj dimenzija to je uslov renormalizabilnosti restriktivniji. Ovo je jedan od osnovnih razloga zašto smo mogli da konstruišemo standardni model elementarnih čestica.

U nižim dimenzijama je znatno lakše zadovoljiti zahtev renormalizabilnosti. Na primer, u  $d = 2$  dimenzije postoje renormalizabilni čisto spinorski modeli. Jedan takav je i poznati masivni Thirringov model

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m_0)\psi - \frac{1}{2}g_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2. \quad (5.4)$$

Sa druge strane, u ovom broju dimenzija su bozonska polja bezdimenziona, tako da su sve njihove interakcije dozvoljene. Ovo nam omogućava da imamo modele sa nepolinomijalnim interakcijama. Primer ovoga je sinus–Gordonov model

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{\alpha_0}{\beta^2} (\cos \beta\phi - 1) . \quad (5.5)$$

Ovde je  $[\alpha_0] = M^2$ , dok je  $[\beta] = 1$ , tako da je model super renormalizabilan<sup>1</sup>.

## 5.2 Interakciona slika

U kvantnoj mehanici se najčešće radi u tzv. Schrödingerovoj slici u kojoj se celokupna vremenska zavisnost nalazi u stanjima. U kvantnoj teoriji polja je, međutim, korisno da imamo manifestnu Lorentz invarijantnost. Ovo podrazumeva da vreme i prostor ulaze u formalizam na ravnopravan način. Iz ovog razloga je najpodesnija Heisenbergova slika. Stanja su sada vremenski nezavisna, dok operatori (polja) zavise od vremena  $t$  (kao i od položaja  $\vec{x}$ ). Veza izmedju dve slike je data sa

$$O^{\mathbf{H}}(t) = e^{i\mathbf{H}(t-t_0)} O^{\mathbf{S}} e^{-i\mathbf{H}(t-t_0)} , \quad (5.6)$$

gde je  $t_0$  neko referentno vreme.

Želimo da nadjemo način da računamo  $n$ -čestične Greenove funkcije

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle , \quad (5.7)$$

gde je  $|\Omega\rangle$  vakuum interagujuće teorije<sup>2</sup>, dok je  $\phi(x)$  polje u Heisenbergovoj slici.

U ostatku ove lekcije ćemo se baviti  $\phi^4$  modelom. Generalizacija dobijenih rezultata na opšti model će biti očigledna. Takodje, jednostavnosti radi, posmatraćemo samo dvočestičnu Greenovu funkciju.

Za razliku od slobodne teorije polja, ovog puta nije moguć direktan pristup u kome bi prvo rešili jednačinu kretanja za polje  $\phi(x)$ , a potom to iskoristili za računanje Greenovih funkcija. Razlog za ovo je jednostavan — interagujuće teorije polja su opisane nelinearnim jednačinama kretanja koje neznamo da rešimo. Ono što znamo da rešimo su jednačine slobodne teorije. Iz ovog razloga je izuzetno korisna tzv. interakciona slika

$$O^{\mathbf{I}}(t) = e^{i\mathbf{H}_0(t-t_0)} O^{\mathbf{S}} e^{-i\mathbf{H}_0(t-t_0)} , \quad (5.8)$$

u kojoj polja  $\phi_{\mathbf{I}}(x)$  zadovoljavaju slobodne jednačine kretanja. Odavde sledi

$$\phi_{\mathbf{I}}(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) . \quad (5.9)$$

<sup>1</sup>Jedan od velikih kurioziteta kvantne teorije polja je i činjenica da su sinus-Gordonov i masivni Thirringov model ekvivalentni. Ovakva veza izmedju jedne bozonske i fermionske teorije se zove bozonizacija. Bozonizacija je moguća samo u  $d = 2$  dimenzije.

<sup>2</sup>Simbol  $|0\rangle$  će označavati vakuum slobodne teorije.

Veza izmedju Heisenbergove i interakcione slike je data sa

$$O^{\mathbf{H}}(t) = U^\dagger(t, t_0) O^{\mathbf{I}} U(t, t_0) , \quad (5.10)$$

gde evolucionni operator  $U = e^{i\mathbf{H}_0(t-t_0)} e^{-i\mathbf{H}(t-t_0)}$  zadovoljava jednačinu kretanja

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = \mathbf{H}_I(t) U(t, t_0) , \quad (5.11)$$

gde je  $U(t_0, t_0) = 1$ . U slučaju  $\phi^4$  teorije  $\mathbf{H}_I(t) = \int d\vec{x} \frac{\lambda_0}{4!} \phi_1^4(x)$ . Kada bi  $\mathbf{H}_I(t)$  komutirao sa  $\mathbf{H}_I(t')$  za sve  $t$  i  $t'$  onda bi evolucionni operator bio

$$U(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t dt \mathbf{H}_I(t)} . \quad (5.12)$$

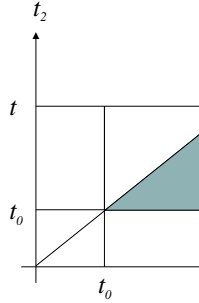
Ovo, medjutim, *nije* slučaj. Ipak, rešenje nije teško naći. Lako se vidi da u opštem slučaju (5.11) ima rešenje

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \mathbf{H}_I(t_1) + \\ & (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2) + \\ & (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2) \mathbf{H}_I(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

U gornjem izrazu operatori stoje u vremenskom uredjenju. Važno pojednostavljenje dolazi kad primetimo da je

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T(\mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2)) . \quad (5.14)$$

Ova jednakost se direktno očitava sa slike 5.1.



Slika 5.1: Oblast integracije

Iz istog razloga je moguća formalna zamena

$$\int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \rightarrow \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T , \quad (5.15)$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \mathbf{H}_I(t_1) + \\
&(-i)^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T(\mathbf{H}_I(t_1) \mathbf{H}_I(t_2)) + \dots = \\
&= T \left( e^{-i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}_I(t')} \right) .
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Poslednja linija je samo kompaktan zapis gornjeg beskonačnog reda.

Sada nam preostaje da nadujemo izraz za vakuumsko stanje  $|\Omega\rangle$ . U tom cilju pogledajmo identitet

$$\begin{aligned}
e^{-i \mathbf{H} T} |0\rangle &= \sum_n e^{-i E_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle = \\
&= e^{-i E_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-i E_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle ,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

gde su  $|n\rangle$  energetska eigenstanja interagujuće teorije, dok su  $E_n$  odgovarajuće energije. Uzmimo sada limes velikih vrednosti parametra  $T$ . Preciznije rečeno, uzmimo  $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$ , gde je  $\epsilon$  neki novi regularizacioni parametar koji će na kraju ići u nulu. Ovako izabrani limes ubija sve članove u gornjem razvoju sem prvog koji odgovara doprinosu vakuuma. Dakle

$$\begin{aligned}
|\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-i E_0(t_0+T)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{A} U(t_0, -T) |0\rangle .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Na sličan način dobijamo i

$$\begin{aligned}
\langle \Omega| &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-i E_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle)^{-1} \langle 0|U(T, t_0)|0\rangle = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{B} \langle 0|U(T, t_0) .
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Sad možemo da predjemo na računanje dvočestične Greenove funkcije. Za  $x^0 > y^0 > t_0$  dobijamo

$$\begin{aligned}
\langle \Omega| T \phi(x) \phi(y) | \Omega\rangle &= \langle \Omega| \phi(x) \phi(y) | \Omega\rangle = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{A} \mathcal{B} \langle 0| U(T, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U(x^0, t_0) \cdot \\
&\quad \cdot U^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U(y^0, t_0) U(t_0, -T) |0\rangle = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{A} \mathcal{B} \langle 0| U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) |0\rangle = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{A} \mathcal{B} \langle 0| T (U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T)) |0\rangle .
\end{aligned}$$



Pod operacijom vremenskog uredjenja sve komutira, tako da gornji izraz postaje

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{AB} \langle 0| T (\phi_I(x)\phi_I(y)U(T, -T)) |0\rangle = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{AB} \langle 0| T \left( \phi_I(x)\phi_I(y)e^{-i \int_{-T}^T dt' \mathbf{H}_I(t')} \right) |0\rangle . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Na sličan način dobijamo i

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \mathcal{AB} \langle 0| T \left( e^{-i \int_{-T}^T dt' \mathbf{H}_I(t')} \right) |0\rangle . \quad (5.21)$$

Na kraju

$$\langle \Omega | T \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0| T \left( \phi_I(x)\phi_I(y)e^{-i \int_{-T}^T dt' \mathbf{H}_I(t')} \right) |0\rangle}{\langle 0| T \left( e^{-i \int_{-T}^T dt' \mathbf{H}_I(t')} \right) |0\rangle} . \quad (5.22)$$

Mi smo gornju relaciju izveli za slučaj kad je  $x^0 > y^0$ . Lako se može videti da analogno izvodjenje za  $x^0 < y^0$  daje isti rezultat. Očigledno je da se ista vrsta relacije dobija i za  $n$ -čestične Greenove funkcije.

Relacija (5.22) i njene  $n$ -čestične generalizacije predstavljaju osnovne formule u kvantnoj teoriji polja. Leva strana, vakuumska očekivana vrednost interagujuće teorije (Heisenbergova slika), je prikazana na desnoj strani preko vakuumskih očekivanih vrednosti slobodne teorije polja (interakciona slika)<sup>3</sup>. Gornja veza korelatora interagujuće teorije sa korelatorima njoj pridružene slobodne teorije je ujedno i razlog zašto smo do sada toliko vremena posvetili slobodnim teorijama polja.

Na desnoj strani je sve dato preko veličina koje su, bar u principu, poznate. Praktični problem, međjutim, dolazi pri računanju eksponenta interakcionog člana. Stvari postaju jednostavne samo u slučaju da je interakcioni član mali. Tada gornji eksponent možemo računati *perturbativno*, dakle razvojem u stepeni red po  $\lambda_0$ . U sledećoj lekciji ćemo razviti aparat za jednostavnu primenu perturbativnog računa.

---

<sup>3</sup>Polja u interakcionoj slici zadovoljavaju slobodne jednačine kretanja, dok  $|0\rangle$  predstavlja vakuum slobodne teorije.

## Lekcija 6

# Feynmanova pravila

Svako *slobodno* polje se može razdvojiti na pozitivno i negativno frekventni deo

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) , \quad (6.1)$$

gde je pozitivno frekventni deo  $\phi^+(x)$  sačinjen od anihilacionih operatora, dok se negativno frekventni deo  $\phi^-(x)$  sastoji od kreacionih operatora. Ovakvo razdvajanje nije moguće u slučaju interagujućih polja.

U sledećem odeljku ćemo iskoristiti gornje razdvajanje da uvedemo pojam normalnog uredjenja polja i izvedemo Wickove identitete.

### 6.1 Wickovi identiteti

Posmatrajmo za početak bozonska polja. Normalno uredjenje definišemo tako da važi

$$N\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \phi(x) \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} N(\phi(x)\phi(y)) &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) + 2\phi^-(x)\phi^+(y) = \\ &= \phi(x)\phi(y) - [\phi^+(x), \phi^-(y)] . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dakle, normalno uredjenje menja obični proizvod tako što negativno frekventne delove stavlja levo od pozitivno frekventnih. Komutator u gornjem izrazu je broj, tako da važi

$$\begin{aligned} [\phi^+(x), \phi^-(y)] &= \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(y)] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \phi^+(x)\phi^-(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ovim smo izveli osnovni Wickov identitet koji glasi

$$N(\phi(x)\phi(y)) = \phi(x)\phi(y) - \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle . \quad (6.5)$$

Sličan Wickov identitet povezuje normalno i vremensko uredjenje proizvoda dva polja<sup>1</sup>. Naime,

$$N(\phi(x)\phi(y)) = T(\phi(x)\phi(y)) - \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle. \quad (6.6)$$

Ovo se takodje lako dokazuje.

$$\begin{aligned} T(\phi(x)\phi(y)) - \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle &= \\ &= \theta(x^0 - y^0)(\phi(x)\phi(y) - \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle) + \\ &+ \theta(y^0 - x^0)(\phi(y)\phi(x) - \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle) = \\ &= \theta(x^0 - y^0)N(\phi(x)\phi(y)) + \theta(y^0 - x^0)N(\phi(y)\phi(x)) = \\ &= N(\phi(x)\phi(y)). \end{aligned}$$

U poslednjem koraku smo koristili očiglednu činjenicu da polja komutiraju pod znakom normalnog uredjenja. Već smo se sreli sa ovom osobinom kod vremenskog uredjenja.

Na isti način bi mogli da nadjemo odgovarajuće Wickove identitete za proizvode tri, četiri i više polja. Postoji, međjutim, i jednostavniji način da dodjemo do svih ovih rezultata. Pre nego što počnemo podsetimo se na našu pojednostavljenu notaciju u kojoj polje označavamo sa  $\phi_i$ , a indeks  $i$  u sebi nosi  $t, \vec{x}$  kao i sve diskretne indekse. U ovoj notaciji  $J_i\phi_i$  označava odgovarajuću sumu po svim diskretnim indeksima i integracije po  $t$  i  $\vec{x}$ . U celoj ovoj lekciji će  $J_i$  biti brojevi.

Normalno uredjenje eksponenta slobodnih polja zadovoljava

$$Ne^{J_i\phi_i} = e^{J_i\phi_i^-} e^{J_i\phi_i^+}. \quad (6.7)$$

Korišćenjem poznatog identiteta  $e^A e^B = e^{A+B} e^{1/2[A,B]}$ , koje važi kad  $[A, B]$  komutira sa  $A$  i  $B$ , dobijamo

$$\begin{aligned} Ne^{J_i\phi_i} &= e^{J_i\phi_i} e^{-1/2J_i[\phi_i^+, \phi_i^-]J_i} = \\ &= e^{J_i\phi_i} e^{-1/2J_i\langle 0|\phi_i\phi_j|0\rangle J_i}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Primitimo da se normalno uredjenje eksponenta slobodnih polja svodi samo na množenje sa odgovarajućim brojem. Zamenom  $J_i \rightarrow iJ_i$  gornji identitet možemo prepisati i u nešto korisnijem obliku kao

$$e^{iJ_i\phi_i} = e^{-1/2J_i\langle 0|\phi_i\phi_j|0\rangle J_i} Ne^{iJ_i\phi_i}. \quad (6.9)$$

Kao i ranije, sličan Wickov identitet povezuje  $T$  i  $N$  uredjenja, naime

$$Te^{iJ_i\phi_i} = e^{-1/2J_i\langle 0|T\phi_i\phi_j|0\rangle J_i} Ne^{iJ_i\phi_i}. \quad (6.10)$$

<sup>1</sup>Ovakvi identiteti su od posebnog značaja u kvantnoj teoriji polja. U prethodnoj lekciji smo videli da su Greenove funkcije date preko vakuumskih očekivanih vrednosti vremenski uredjenih proizvoda slobodnih polja. S druge strane, vakuumske očekivane vrednosti normalnih proizvoda polja su izuzetno jednostavne za računanje. Tu vidimo i korist Wickovih identiteta koji povezuju  $T$  i  $N$  uredjenja.

U kvantnoj teoriji polja nas najviše interesuju vakuumske očekivane vrednosti vremenski uredjenih proizvoda slobodnih polja. Centralnu ulogu igra tzv. slobodni generišući funkcional  $Z_0[J] = \langle 0|Te^{iJ_i\phi_i}|0\rangle$ .  $n$ -ti izvod po  $J$  od ovog objekta (u  $J = 0$ ) generiše vakuumsku očekivanu vrednost vremenski uredjenog proizvoda od  $n$  slobodnih polja. Korišćenjem gornjeg Wickovog identiteta dobijamo

$$Z_0[J] = \langle 0|Te^{iJ_i\phi_i}|0\rangle = e^{-i/2J_i\Delta_F ijJ_j} . \quad (6.11)$$

Ovim smo u jednom koraku rešili sve Greenove funkcije jedne slobodne teorije polja. Sve one su, dakle, date preko odgovarajućeg Feynmanovog propagatora.

Kao i u slobodnoj teoriji, centralni objekt u interagujućoj teoriji je opet odgovarajući generišući funkcional, ovog puta  $Z[J] = \langle \Omega|Te^{iJ_i\phi_i}|\Omega\rangle$ . U ovom slučaju, međjutim, ne važe Wickovi identiteti.

Korišćenjem rezultata iz prethodne lekcije dobijamo (za slučaj skalarnoh polja)

$$\begin{aligned} Z[J] &= \langle \Omega|Te^{i\int dx J(x)\phi(x)}|\Omega\rangle = \\ &= \frac{\langle 0|Te^{i\int dx J(x)\phi_1(x)}e^{-i\int dx \mathbf{H}_1}|0\rangle}{\langle 0|Te^{-i\int dx \mathbf{H}_1}|0\rangle} = \\ &= \frac{\langle 0|Te^{-i\int dx (\mathbf{H}_1 - J\phi_1)}|0\rangle}{\langle 0|Te^{-i\int dx \mathbf{H}_1}|0\rangle} . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Slične formule važe i za čestice sa nenultim spinom. Vidimo, dakle, da  $J$ -ovi igraju ulogu spoljnih polja<sup>2</sup>. Jednu kvantnu teoriju polja znamo ako znamo sve njene Greenove funkcije, ili, ekvivalentno, ako znamo njen generišući funkcional. Kvantna teorija polja je dakle određena ako poznamo amplitudu prelaska iz vakuuma u vakuum u prisustvu opšteg spoljnog polja.

## 6.2 Wickovi identiteti za fermione

Vreme je da se pozabavimo fermionima. Da bi sve teklo kao i kod bozona potreban nam je analogon izraza  $e^{i\int dx J(x)\phi(x)}$ . Analogon komutirajućeg izvora  $J$  je par antikomutirajućih izvora (Grassmanovi brojevi)  $\bar{\eta}$  i  $\eta$  – jedan za polje  $\psi$ , a drugi za  $\bar{\psi}$ . Analogon Wickovog identitea (6.10) je sada

$$\begin{aligned} Te^{i\int dx (\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x))} &= \\ &= e^{-i\int dx dy \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)} Ne^{i\int dx (\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x))} . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ovo se razlikuje od Bose formule za faktor  $1/2$  u eksponentu, no ova razlika je trivijalna. Ako napišemo analogon od (6.10) za kompleksno bozonsko polje faktor  $1/2$  opet neće biti prisutan.

<sup>2</sup>Drugi uobičajeni naziv za spoljna polja su izvori.

Generišući funkcional za slobodne fermione sledi iz prethodnog Wickovog identiteta i glasi

$$\begin{aligned} Z_0[\eta, \bar{\eta}] &= \langle 0 | T e^{i \int dx (\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x))} | 0 \rangle = \\ &= e^{-i \int dx dy \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)} . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Kao i kod bozona, Feynmanov propagator određuje sve Greenove funkcije slobodne teorije.

### 6.3 Feynmanovi dijagrami

Peskin i Schroeder, str. 91-99. (izvodjenje Feynmanovih pravila)

#### ZADACI

- 6.1 Dokažite Wickove identite (6.10) i (6.13).
- 6.2 Korišćenjem identiteta (6.13) izvedite izraze za  $T$  uredjenje svih proizvoda od dva slobodna Fermi polja.
- 6.3 Izračunajte  $T(\psi_{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)\psi_{\alpha_3}(x_3)\psi_{\alpha_4}(x_4))$ .

## Lekcija 7

### $S$ -matrica

Do sada smo videli da su Greenove funkcije osnovni objekti koji nas interesuju u jednoj kvantnoj teoriji polja. U prethodnoj lekciji smo izveli Feynmanova pravila za računanje opšte Greenove funkcije. Same Greenove funkcije, međutim, nisu direktno opservabilne veličine nego pomoćni objekti iz kojih dobijamo fizičke veličine, npr. amplitude za razna rasejanja. Veza između Greenovih funkcija i ovih amplitude je upravo predmet današnje lekcije. Kao i nekoliko puta do sada, jednostavnosti radi, radićemo sa skalarnim teorijama polja. Krajnji rezultati će se lako generalisati na opšti slučaj.

Slobodno skalarno polje je dato sa

$$\phi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) . \quad (7.1)$$

Želimo sada da invertujemo ovo, tj. da izrazimo  $a_{\vec{p}}$  preko  $\phi(x)$ . Ovo se lako može uraditi preko inverznog Fourier transforma. Lakše je, međutim, da uočimo da je gornji izraz prosto suma nezavisnih harmonijskih oscilatora

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \quad (7.2)$$

$$p(t) = \dot{q} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}) . \quad (7.3)$$

Odavde dobijamo poznati izraz

$$\begin{aligned} a &= e^{i\omega t} \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q(t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} p(t) \right) = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t} \overleftrightarrow{\partial}_t q(t) , \end{aligned} \quad (7.4)$$

gde smo uveli sledeću pogodnu notaciju  $u \overleftrightarrow{\partial} v = u\partial v - (\partial u)v$ . Sada je očigledno da za skalarno polje dobijamo

$$a_{\vec{p}} = \frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int d\vec{x} e^{ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) . \quad (7.5)$$

## 7.1 Asimptotika

Videli smo da se pri radu sa interagujućim teorijama polja koriste Heisenbergova i interakciona slika. Veza izmedju njih je bila data sa

$$\phi(x) = U^\dagger(t, t_0)\phi_I(x)U(t, t_0) , \quad (7.6)$$

gde je  $t_0$  neko referentno vreme. Svaki izbor referentnog vremena nam daje drugo polje  $\phi_I$ , odnosno drugu interakcionu sliku. Dva izbora referentnog vremena su od posebnog značaja. Sa  $\phi_{\text{in}}$  ćemo označiti polje u interakcionoj slici u kojoj je  $t_0 = -\infty$ . Na sličan način,  $\phi_{\text{out}}$  je polje u interakcionoj slici za koju je referentno vreme  $t_0 = +\infty$ . Polja  $\phi_{\text{in}}$  i  $\phi_{\text{out}}$  su oba slobodna, ali odgovaraju *različitim* interakcionim slikama.

U našem dosadašnjem radu sa interakcionom slikom rezultati nisu zavisili od izbora  $t_0$ , tako da u svim dosadašnjim formulama možemo umesto  $\phi_I$  da pišemo ili  $\phi_{\text{in}}$  ili  $\phi_{\text{out}}$ .

Iz (7.6) bismo očekivali da za  $t \rightarrow -\infty$  polje  $\phi(x)$  teži  $\phi_{\text{in}}(x)$ , dok za  $t \rightarrow +\infty$  polje teži  $\phi_{\text{out}}$ . Videćemo već u sledećem poglavlju da ovaj zaključak ne stoji, odnosno da u ovim limesima  $U$  nije unitarni operator. Umesto ovoga ćemo dobiti

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x) &= Z^{1/2}\phi_{\text{in}} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(x) &= Z^{1/2}\phi_{\text{out}} . \end{aligned} \quad (7.7)$$

Gornji limesi svakako ne mogu važiti kao operatorski iskazi, jer bi (za  $Z \neq 1$ ) narušavali kanoničke komutacione relacije. Kao što ćemo videti, oni važe samo unutar matričnih elemenata. No koju ulogu igra broj  $Z$ ? Grubi odgovor na ovo je da  $\phi_{\text{in}}$  u sebi sadrži samo jednočestična stanja, dok polje  $\phi$  pored ovih u sebi nosi i višečestična stanja.  $Z$  dakle služi da obezbedi razliku u normalizaciji.

## 7.2 Källen–Lehmanova reprezentacija

Za slobodna polja imamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= i \Delta(x - y; m) = \\ &= \int \frac{dq}{(2\pi)^{d-1}} \delta(q^2 - m^2) \left( e^{-iq \cdot (x-y)} - e^{iq \cdot (x-y)} \right) . \end{aligned} \quad (7.8)$$

Pogledajmo sada analogon ovoga za interagujuću teoriju. Tada imamo

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle = \sum_{\alpha} \langle \Omega | \phi(x) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(y) | \Omega \rangle - (x \rightleftharpoons y) . \quad (7.9)$$

Iz translacione invarijantnosti sledi da je  $\phi(x) = e^{ip \cdot x} \phi(0) e^{-ip \cdot x}$ , odakle dobijamo da se gornji izraz može napisati i kao

$$\sum_{\alpha} \langle \Omega | \phi(0) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(0) | \Omega \rangle \left( e^{-ip_{\alpha} \cdot (x-y)} - e^{ip_{\alpha} \cdot (x-y)} \right) . \quad (7.10)$$

Da bi ovo preveli u oblik koji više podseća na slučaj slobodne teorije polja ubacićemo  $1 = \int dq \delta(q - p_\alpha)$ . Sledi

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle = \int \frac{dq}{(2\pi)^{d-1}} \rho(q) \left( e^{-iq \cdot (x-y)} - e^{iq \cdot (x-y)} \right), \quad (7.11)$$

gde smo uveli gustinu

$$\rho(q) = (2\pi)^{d-1} \sum_{\alpha} \delta(q - p_{\alpha}) |\langle 0 | \phi(0) | \alpha \rangle|^2. \quad (7.12)$$

Ovu gustinu je naravno užasno teško izračunati. Medjutim, neke njene osobine se odmah vide, naime,  $\rho(q)$  je pozitivna, Lorentz invarijantna gustina koja je različita od nule samo u tačkama koje odgovaraju masama višestičnih ekscitacija. Ove mase su date sa  $p_{\alpha}^2 = m_{\alpha}^2$ . Dakle, ova gustina se može napisati i kao

$$\rho(q) = \int_0^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2) \delta(q^2 - m'^2), \quad (7.13)$$

gde je  $\sigma$  neka pozitivna funkcija. Na kraju, Källén–Lehmanova reprezentacija za vakuumsku očekivanu vrednost komutatora glasi

$$\begin{aligned} \langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle &= i \int_0^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2) \Delta(x-y; m') = \\ &= iZ \Delta(x-y; m) + i \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2) \Delta(x-y; m'), \end{aligned} \quad (7.14)$$

gde je  $m$  masa čestice, a  $m_1$  višestični prag<sup>1</sup>.

Uzimanjem vremenskog izvoda gornje relacije, pa zatim limesa  $y^0 \rightarrow x^0$ , dobijamo

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2). \quad (7.15)$$

Iz pozitivnosti  $\sigma$  sledi da imamo  $Z \geq 0$ . Pored toga, iz gornjeg izraza vidimo da važi i  $Z < 1$ . Dakle,

$$0 \leq Z < 1. \quad (7.16)$$

Teorija sa  $Z = 1$  nema višestičnih ekscitacija, dakle reč je o slobodnoj teoriji.

Primetimo da pomoćna funkcija  $\Delta(x-y; m)$  teži nuli kada  $|x^0 - y^0| \rightarrow \infty$ . Pored toga, što je veće  $m$  to ona brže teži nuli. Kao posledica ovoga, Källén–Lehmanova reprezentacija nam daje da su za veliko  $|x^0 - y^0|$  doprinosi višestičnih ekscitacija subdominantni. Takodje, iz Källén–Lehmanove reprezentacije (7.14) dobijamo asimptotske relacije (7.7). Ujedno, sada postaje jasno zašto asimptotski uslovi ne važe kao operatorski iskazi.

<sup>1</sup>Ovo prosto znači da u sistem treba dodati energiju veću od  $m_1$  da bi se kreirale nove čestice.



Na analogan način se može izvesti i Källén–Lehmanova reprezentacija za propagator

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= iZ \Delta_F(x-y; m) + \\ &+ i \int_{m_1^2}^{\infty} dm'^2 \sigma(m'^2) \Delta_F(x-y; m') . \end{aligned} \quad (7.17)$$

U gornjem izrazu figurišu *isti*  $Z$  i  $\sigma$ . Slično kao i pre, za velika vremena propagacije, puni propagator interagujuće teorije je (do na normalizaciju  $Z$ ) jednak Feynmanovom propagatoru, dakle propagatoru odgovarajuće slobodne teorije<sup>2</sup>.

### 7.3 LSZ redukcija

Iz relacija

$$\phi_{\text{out}}(x) = U(t, +\infty) \phi(x) U^\dagger(t, +\infty) \quad (7.18)$$

$$\phi_{\text{in}}(x) = U(t, -\infty) \phi(x) U^\dagger(t, -\infty) , \quad (7.19)$$

sledi da su ‘in’ i ‘out’ stanja povezana tzv.  $S$ -matricom  $S = U(+\infty, -\infty)$  koja evoluira sistem iz beskonačne prošlosti u beskonačnu budućnost. Imamo dakle,

$$\phi_{\text{out}} = S^\dagger \phi_{\text{in}} S , \quad (7.20)$$

ili, što je ekvivalentno,

$$S|\text{out}\rangle = |\text{in}\rangle . \quad (7.21)$$

U ovom odeljku ćemo se pozabaviti amplitudom prelaska za rasejanje u kome u beskonačnoj prošlosti imamo  $\ell$  jednočestičnih stanja sa impulsima  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell$ , dok se u beskonačnoj budućnosti nalazi  $n$  jednočestičnih stanja impulsa  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ . Ova amplituda je data sa

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n ; \text{out} | \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell ; \text{in} \rangle = \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n ; \text{in} | S | \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell ; \text{in} \rangle , \quad (7.22)$$

što je samo jedan element  $S$ -matrice. Vidimo da  $S$ -matrica u sebi sadrži kompletnu informaciju o amplitudama rasejanja. Cilj ovog odeljka će biti da izvedemo tzv. LSZ redukcione formule (Lehman–Symanzik–Zimmermann) koje povezuju  $S$ -matrične amplitude sa Greenovim funkcijama.

Pre nego što se pozabavimo redukcionim formulama biće nam potrebno da izvedemo relaciju izmedju ‘in’ i ‘out’ kreacionih operatora. Polja u interakcionioj slici su slobodna, te korišćenjem relacije (7.5) dobijamo

$$a_{\vec{p}, \text{in}}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int d\vec{x} e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x) . \quad (7.23)$$

<sup>2</sup>Primitimo da je masa  $m$  koja figuriše u gornjim izrazima fizička masa čestice, a ne gola masa  $m_0$ .

Ovo ne zavisi od  $t$  (vidi zadatak 7.2) te možemo da stavimo  $t = -\infty$  i da iskoristimo asimptotske relacije (7.7), nakon čega desna strana postaje

$$-\frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \lim_{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \int d\vec{x} e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x). \quad (7.24)$$

Na sličan način možemo izraziti i  $a_{\vec{p}, \text{out}}^\dagger$ . Oduzimanjem ova dva izraza dobijamo

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}, \text{in}}^\dagger - a_{\vec{p}, \text{out}}^\dagger &= \frac{iZ^{-1/2}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int d\vec{x} e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \\ &= \frac{iZ^{-1/2}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int dx \partial_0 \left( e^{-ip \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right) = \\ &= \frac{iZ^{-1/2}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int dx \partial_0 \left( e^{-ip \cdot x} \partial_0 \phi(x) + iE_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} \phi \right) = \\ &= \frac{iZ^{-1/2}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int dx e^{-ip \cdot x} (\partial_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) \phi(x) = \\ &= iZ^{-1/2} \int dx \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-ip \cdot x} (\partial^2 + m^2) \phi(x). \end{aligned} \quad (7.25)$$

U poslednjem koraku smo izvršili parcijalne integracije po prostoru. Primitimo da je  $\phi(x)$  polje interagujuće teorije, te da je  $(\partial^2 + m^2)\phi(x) \neq 0$ . Vidi se da je upravo interakcija ono što čini da se ‘in’ i ‘out’ operatori razlikuju.

Sad smo spremni da se pozabavimo redukcionim formulama. Krećemo od opšteg  $S$ -matričnog elementa

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle &= \\ &= \sqrt{2E_{\vec{q}_1}} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | a_{\vec{q}_1, \text{in}}^\dagger | \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Sledeći korak je da iskoristimo relaciju (7.25). Prvi član, kreacioni operator ‘out’ stanja, deluje trivijalno na levu stranu dajući članove proporcionalne sa  $\delta(\vec{q} - \vec{p}_i)$ . Ovi članovi nas neće interesovati. Oni su predstavljeni nepovezanim dijagramima, dakle, reč je o amplitudama za dva nezavisna događaja. Samo povezani dijagrami daju netrivialan doprinos rasejanju<sup>3</sup>. Posle prvog koraka redukcije smo dobili da je gornji  $S$ -matrični element

$$\begin{aligned} \text{nepovezani} + iZ^{-1/2} \int dx e^{-iq_1 \cdot x} (\partial^2 + m^2) \\ \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | \phi(x) | \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (7.27)$$

<sup>3</sup>Doprinos nepovezanog dijagrama se dobija množenjem amplituda za povezane parčiće od kojih se sastoji. Iz ovog razloga je dovoljno da poznamo samo amplitude koje dolaze od povezanih dijagrama.

Nastavljamo dalje sa redukcijom. Ajdemo sada, na primer, da izbacimo jednu od čestica iz krajnjeg stanja. U ovom slučaju pišemo

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | \phi(x) | \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle &= \\ &= \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \langle \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | a_{\vec{p}_1, \text{in}} \phi(x) | \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle . \end{aligned} \quad (7.28)$$

Sada je opet potrebno da zamenimo  $a_{\vec{p}_1, \text{out}}$  za  $a_{\vec{p}_1, \text{in}}$ . Pre toga je, medjutim, potrebno da ovi ‘in’ operatori deluju direktno na ‘in’ stanje. Da bi ovo postigli pisaćemo  $\phi(x) = T\phi(x)$ . Desna strana prethodnog izraza postaje

$$\sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \langle \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | T (a_{\vec{p}_1, \text{in}} \phi(x)) | \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle . \quad (7.29)$$

Primitimo da  $T$  uredjenje automatski gura ‘in’ polja na desno, a ‘out’ polja na levo, baš kao što i treba. Sad smo slobodni da opet koristimo relaciju (7.25). Posle dva koraka redukcije naš  $S$ -matrični element je postao

$$\begin{aligned} \text{nepovezani} + (iZ^{-1/2})^2 \int dx dy e^{-iq_1 \cdot x} e^{ip_1 \cdot y} (\partial_y^2 + m^2)(\partial_x^2 + m^2) \\ \langle \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | T \phi(x) \phi(y) | \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle . \end{aligned} \quad (7.30)$$

Krajnji rezultat se dobija posle  $n + \ell$  koraka redukcije i glasi

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \text{out} | \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell; \text{in} \rangle &= \text{nepovezani} + \\ &+ (iZ^{-1/2})^{n+\ell} \int dx_1 \dots dx_\ell dy_1 \dots dy_n \\ &e^{-iq_1 \cdot x_1 - \dots - iq_\ell \cdot x_\ell + ip_1 \cdot y_1 + \dots + p_n \cdot y_n} \\ &(\partial_{y_1}^2 + m^2) \dots (\partial_{y_n}^2 + m^2)(\partial_{x_1}^2 + m^2) \dots (\partial_{x_\ell}^2 + m^2) \\ &\langle \Omega | T \phi(x_1) \dots \phi(x_\ell) \phi(y_1) \dots \phi(y_n) | \Omega \rangle . \end{aligned} \quad (7.31)$$

Ovo je čuvena LSZ formula. Suština LSZ formule je krajnje jednostavna. Setimo se da se na spoljnim nogama Greenovih funkcija nalaze Feynmanovi propagatori koji zadovoljavaju

$$-(\partial^2 + m^2) \Delta_F(x - y) = \delta(x - y) . \quad (7.32)$$

LSZ formula nam sad govori da se  $S$ -matrični element dobija iz odgovarajuće Greenove funkcije zamenom eksternih propagatora za  $-iZ^{-1/2}e^{-iq_i \cdot x_i}$  u slučaju ulaznih stanja, odnosno,  $-iZ^{-1/2}e^{ip_j \cdot y_j}$  u slučaju izlaznih stanja. Ovo pravilo nam omogućava da na jednostavan način, iz Feynmanovih pravila za Greenove funkcije, odredimo Feynmanova pravila za  $S$ -matrične elemente.

(Peskin i Schroeder, str. 100-125)

## ZADACI

7.1 Izvedite relaciju (7.5) korišćenjem inverznog Fourier transformata.

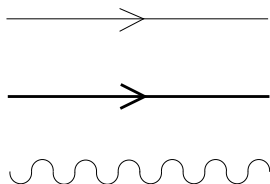
7.2 Pokažite da operator  $a_{\vec{p}}$  dat u (7.5) ne zavisi od vremena.

7.3 Izvedite Källén–Lehmanovu reprezentaciju za propagator.

## Lekcija 8

# QED: elementarni procesi

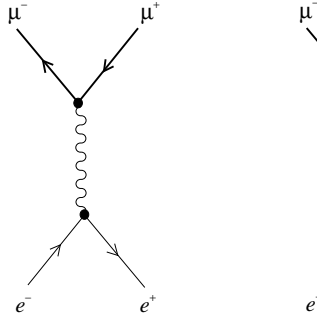
Od ove lekcije ćemo početi sa primenom dobijenih rezultata iz operatorskog formalizma kvantne teorije polja na računanje procesa rasejanja u kvantnoj elektrodinamici. Prvi proces koji ćemo razmatrati je  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , dakle, anihilacija elektrona ( $e^-$ ) i pozitrona ( $e^+$ ) i stvaranje miona ( $\mu^-$ ) i njegove anti-čestice ( $\mu^+$ ). Feynmanova pravila za kvantnu elektrodinamiku su prikazana na slici 8.1. Mi ćemo računati  $S$ -matrične amplitude, te ovome treba pridodati i pravila za



Slika 8.1: Feynmanova pravila: Feynmanovi propagatori za  $e$ ,  $\mu$  i  $\gamma$  (levo); interakcije  $ee\gamma$  i  $\mu\mu\gamma$  (desno). Oba interakciona verteksa su data sa  $-ie_0\gamma^\mu$ .

spoljne nogice. Amplituda koja nas interesuje ima beskonačno mnogo doprinosa. Tri jednostavnije parcijalne amplitude su date na slici 8.2. Cilj sledeće četiri lekcije je da naučimo da računamo ove izraze. Medjutim, i pre nego što krenemo možemo lako da vidimo da levi dijagram daje dominantni doprinos. Razlog je jednostavan — levi dijagram je sastavljen od dva verteksa, te je proporcionalan konstanti fine strukture  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ <sup>1</sup>. Preostala dva dijagrama sa slike su sačinjeni od četiri verteksa, odnosno proporcionalni su sa  $\alpha^2 \ll \alpha$ . Vidimo da je kvantna elektrodinamika opisana malom konstantom interakcije, što nam omogućuje perturbativno računanje njenih procesa.

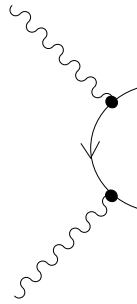
<sup>1</sup>U konstanti fine strukture stoji kvadrat fizičkog, a ne golog, naelektrisanja. Videćemo kasnije da je  $e_0$  proporcionalno sa  $e$ , ali i da je konstanta proporcionalnosti singularna. Ovim ćemo se baviti u zadnjim lekcijama kad budemo razmatrali renormalizaciju.



Slika 8.2: Tri dijagrama koji doprinose procesu  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Vreme teče odozdo na gore.

## 8.1 Elementarni procesi

Ova i sledeća lekcija će se baviti elementarnim procesima kvantne elektrodinamike. Elementarni procesi su oni kod kojih je dominantan doprinos dat amplitudom u kojoj nema zatvorenih petlji. Kao što smo videli,  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  je jedan takav proces. Primer drugačijeg procesa je rasejanje fotona  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ . Dominantna amplituda za ovaj proces je prikazana na slici 8.3. Kao što vidimo, ovaj dijagram



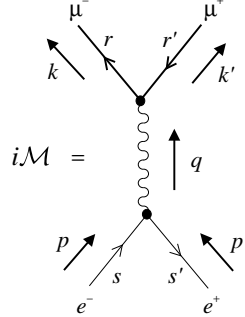
Slika 8.3: Dominantni doprinos za rasejanje fotona.

u sebi već sadrži jednu zatvorenu petlju<sup>2</sup>.

Vratimo se sad dominantnoj  $S$ -matričnoj amplitudi za  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  prikazanoj na slici 8.4. Na osnovu Feynmanovih pravila ova amplituda je jednaka

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{v}^{s'}(p')(-ie_0\gamma^\mu)u^s(p) \left( \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^r(k)(-ie_0\gamma^\nu)v^{r'}(k') = \\ &= \frac{ie_0^2}{q^2} \left( \bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p) \right) \left( \bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k') \right) . \end{aligned} \quad (8.1)$$

<sup>2</sup>Foton-foton rasejanje do sada nije direktno vidjeno. Medjutim, amplituda za ovo rasejanje brzo raste sa porastom energije. U skoroj budućnosti treba očekivati novu generaciju lasera pomoću kojih bi se ovaj efekat mogao testirati.

Slika 8.4: Dominantni dijagram za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Pravilo za spajanje je veoma jednostavno: treba krenuti od kraja fermionske linije i ići ka početku. Da bi izračunali asociranu verovatnoću moramo kvadrirati moduo gornje amplitude. Koristeći

$$\begin{aligned} (\bar{v}\gamma^\mu u)^* &= (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger = (v^\dagger\gamma^0\gamma^\mu u)^\dagger = \\ &= u^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu \dagger\gamma^0 v = \bar{u}\gamma^\mu v, \end{aligned} \quad (8.2)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e_0^4}{q^4} \left( \bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)\bar{u}^s(p)\gamma^\nu v^{s'}(p') \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( \bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k')\bar{v}^{r'}(k')\gamma_\nu u^r(k) \right). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Za dalji rad sa ovom verovatnoćom potrebno je iskoristiti konkretne izraze za spinore  $u$  i  $v$ . Mi ovo nećemo raditi, već ćemo posmatrati slučaj u kome su nam samo poznati ulazni i izlazni impulsi, ali ne i spinovi. Ovo je najčešće i slučaj u eksperimentima. Verovatnoća za ovaj proces se dobija od prethodnog *usrednjavanjem* po ulaznim spinovima  $s, s'$  i *sumom* po izlaznim spinovima  $r, r'$ . Ukupna verovatnoća je sad

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_{r, r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|^2 = \\ &= \frac{e_0^4}{4q^4} \sum_{s, s'} \left( \bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)\bar{u}^s(p)\gamma^\nu v^{s'}(p') \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{r, r'} \left( \bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k')\bar{v}^{r'}(k')\gamma_\nu u^r(k) \right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ovaj izraz se može dalje pojednostaviti korišćenjem spinskih suma (vidi zadatak 3.15)

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m_0 \quad (8.5)$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m_0 . \quad (8.6)$$

EksPLICITNIM pisanjem spinornih indeksa, prva polovina gornje verovatnoće se može sad napisati kao

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'} \left( \bar{v}_\alpha^{s'}(p') \gamma_{\alpha\beta}^\mu u^s(p) \bar{u}_\gamma^s(p) \gamma_{\gamma\delta}^\nu v_\delta^{s'}(p') \right) &= \\ &= \sum_{s'} \bar{v}_\alpha^{s'}(p') \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\gamma_{\beta\gamma}^\sigma p_\sigma + m_0 \delta_{\beta\gamma}) \gamma_{\gamma\delta}^\nu v_\delta^{s'}(p') = \\ &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\gamma_{\beta\gamma}^\sigma p_\sigma + m_0 \delta_{\beta\gamma}) \gamma_{\gamma\delta}^\nu (\gamma_{\delta\alpha}^\tau p'_\tau - m_0 \delta_{\delta\alpha}) = \\ &= \text{tr} \left( \gamma^\mu (\not{p} + m_0) \gamma^\nu (\not{p}' - m_0) \right) = \\ &= \text{tr} \left( (\not{p}' - m_0) \gamma^\mu (\not{p} + m_0) \gamma^\nu \right) . \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ako na slični način sredimo i drugi deo verovatnoće dobijamo

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2 &= \frac{e_0^4}{4q^4} \text{tr} \left( (\not{p}' - m_0) \gamma^\mu (\not{p} + m_0) \gamma^\nu \right) \cdot \\ &\quad \cdot \text{tr} \left( (\not{k}' + M_0) \gamma_\mu (\not{k}' - M_0) \gamma_\nu \right) , \end{aligned} \quad (8.8)$$

gde je  $m_0$  gola masa elektrona a  $M_0$  gola masa miona. Kao što vidimo, u slučaju ove spinski usrednjene verovatnoće, spinske sume su nam omogućile da se rešimo  $u$  i  $v$  spinora. Sada je verovatnoća data isključivo preko tragova gama matrica. Srećom, tragovi gama matrica se mogu računati direktno iz Cliffordove algebre, dakle bez znanja konkretne reprezentacije te algebre. Ovo će nam bitno olakšati dalji rad u elektrodinamici.

## 8.2 Tragovi gama matrica

Identiteti sa gama matricama zavise od dimenzija prostorvremena. U ovom odeljku ćemo raditi u  $d = 4$  dimenzije. Najjednostavniji identitet je onaj koji uopšte ne sadrži gama matrice, dakle

$$\text{tr} 1 = 4 . \quad (8.9)$$

U parnom smo broju dimenzija, te postoji hermitska matrica  $\gamma$  koja antikomutira sa svim  $\gamma^\mu$  i čiji je kvadrat jedinica. Korišćenjem ovoga, kao i cikličnosti traga, dobijamo

$$\text{tr} \gamma^\mu = \text{tr} \gamma \gamma^\mu = \text{tr} \gamma^\mu \gamma = -\text{tr} \gamma^\mu \gamma \gamma = -\text{tr} \gamma^\mu = 0 . \quad (8.10)$$

Na sličan način se pokazuje da je trag neparnog broja gama matrica nula. Trag dve gama matrice sledi direktno iz Cliffordove algebre, cikličnosti i (8.9).

$$\text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = \text{tr} (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 8\eta^{\mu\nu} - \text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu , \quad (8.11)$$

odakle sledi

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu} . \quad (8.12)$$

Uradimo još trag od četiri gama matrice. Prvo koristimo Cliffordovu algebru da prvu gama matricu pomerimo skroz na desnu stranu. Dobijamo

$$\begin{aligned} \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= \text{tr } (2\eta^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \text{tr } \gamma^\rho \gamma^\sigma - \text{tr } (2\eta^{\mu\rho} \gamma^\nu \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) = \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \text{tr } \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\rho} \text{tr } \gamma^\nu \gamma^\sigma + \text{tr } (2\eta^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu) = \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \text{tr } \gamma^\rho \gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\rho} \text{tr } \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2\eta^{\mu\sigma} \text{tr } \gamma^\nu \gamma^\rho - \\ &\quad - \text{tr } \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu . \end{aligned} \quad (8.13)$$

Sada preostaje da iskoristimo cikličnost kao i (8.12), odakle sledi

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) . \quad (8.14)$$

U kasnijim lekcijama će nam trebati i tragovi u kojima se pored  $\gamma^\mu$  nalazi i  $\gamma$ . Ovi identiteti se takodje veoma lako izvode. Evo prvih nekoliko netrivialnih identiteta ovog tipa

$$\text{tr } \gamma = 0 \quad (8.15)$$

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma = 0 \quad (8.16)$$

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} . \quad (8.17)$$

U kasnijem radu ćemo koristiti i sledeće identitete vezane za kontrakcije dva Levi-Civita simbola

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\tau\lambda\omega} = -(\delta_\tau^\nu \delta_\lambda^\rho \delta_\omega^\sigma - \delta_\tau^\nu \delta_\omega^\rho \delta_\lambda^\sigma + \dots) \quad (8.18)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda} = -2(\delta_\tau^\rho \delta_\lambda^\sigma - \delta_\lambda^\rho \delta_\tau^\sigma) \quad (8.19)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} = -6\delta_\tau^\sigma \quad (8.20)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24 , \quad (8.21)$$

U prvom identitetu se sumira po svim permutacijama. Parne dolaze sa pozitivnim a neparne sa negativnim znakom. Još jedan skup korisnih identiteta se bavi kontrakcijama gamma matrica. Lako je pokazati da važi

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (8.22)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (8.23)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho} \quad (8.24)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu . \quad (8.25)$$

Na kraju, radi kompletnosti, pokažimo da je pod tragom moguće obrnuti redosled gama matrica, odnosno

$$\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots) = \text{tr } (\dots \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu) . \quad (8.26)$$



Za dokaz ovoga treba da se podsetimo da matrica konjugacije naboja zadovoljava  $C\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$  i  $C^2 = 1$ . Koristeći ove osobine, zajedno sa cikličnošću traga, dobijamo

$$\text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots) = \text{tr} (\dots \gamma^\rho T \gamma^{\nu T} \gamma^{\mu T}) = \quad (8.27)$$

$$= (-)^n \text{tr} (\dots C \gamma^\rho C C \gamma^\nu C C \gamma^\mu C) = (-)^n \text{tr} (\dots \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu) . \quad (8.28)$$

gde je  $n$  broj gama matrica. Ovim smo dokazali naš identitet za parno  $n$ . Sa druge strane, za neparno  $n$  su tragovi nula te identitet opet važi.

Vreme je da se vratimo fizici. Korišćenjem gornjih identiteta možemo pojednostaviti naš izraz za verovatnoću  $|\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2$ . Jednostavan račun nam daje da je ova verovatnoća jednaka

$$\begin{aligned} & \frac{e_0^4}{4q^4} \text{tr} ((p' - m_0)\gamma^\mu(\not{p} + m_0)\gamma^\nu) \cdot \text{tr} ((\not{k} + M_0)\gamma_\mu(\not{k}' - M_0)\gamma_\nu) = \\ & = \frac{e_0^4}{4q^4} (p'_\sigma p_\tau \text{tr} \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\tau \gamma^\nu - m_0^2 \text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu) \cdot \\ & \quad \cdot (k'^\rho k^\lambda \text{tr} (\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu - M_0^2 \text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu)) = \\ & = \frac{4e_0^4}{q^4} (p'_\sigma p_\tau (\eta^{\sigma\mu} \eta^{\tau\nu} - \eta^{\sigma\tau} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\sigma\nu} \eta^{\mu\tau}) - m_0^2 \eta^{\mu\nu}) \cdot \\ & \quad \cdot (k'^\rho k^\lambda (\eta_{\rho\mu} \eta_{\lambda\nu} - \eta_{\rho\lambda} \eta_{\mu\nu} + \eta_{\rho\nu} \eta_{\mu\lambda}) - M_0^2 \eta_{\mu\nu}) = \\ & = \frac{4e_0^4}{q^4} (p'^\mu p^\nu - p' \cdot p \eta^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu - m_0^2 \eta^{\mu\nu}) \cdot \\ & \quad \cdot (k'_\mu k_\nu - k' \cdot k \eta_{\mu\nu} + k'_\nu k_\mu - M_0^2 \eta_{\mu\nu}) = \\ & = \frac{8e_0^4}{q^4} (p \cdot k p' \cdot k' + p \cdot k' p' \cdot k + M_0^2 p \cdot p' + m_0^2 k \cdot k' + 2m_0^2 M_0^2) . \end{aligned} \quad (8.29)$$

### 8.3 Mandelstamove varijable

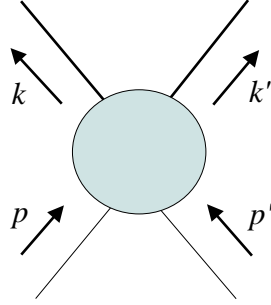
Pri razmatranju kinematike sudara dve čestice pogodno je koristiti tzv. Mandelstamove varijable

$$s = (p + p')^2 = (k + k')^2 \quad (8.30)$$

$$t = (k - p)^2 = (k' - p')^2 \quad (8.31)$$

$$u = (k' - p)^2 = (k - p')^2 . \quad (8.32)$$

Impulsi  $p$ ,  $p'$ ,  $k$  i  $k'$  su prikazani na slici 8.5. Mandelstamove varijable su kinematičke invarijante ovoga sudara. Pored njih postoje i invarijante vezane za same čestice, tj. mase tih čestica. Lako je pokazati da je zbir Mandelstamovih varijabli jednak zbiru kvadrata masa svih ulaznih i izlaznih čestica.



Slika 8.5: Opšti sudar sa dve ulazne i dve izlazne čestice.

Za sudar u kome su ulazne čestice mase  $m_0$  a izlazne mase  $M_0$  imamo

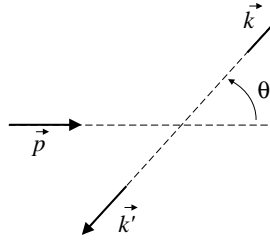
$$k \cdot p = k' \cdot p' = \frac{m_0^2 + M_0^2 - t}{2} \quad (8.33)$$

$$k' \cdot p = k \cdot p' = \frac{m_0^2 + M_0^2 - u}{2} \quad (8.34)$$

$$p \cdot p' = \frac{s - 2m_0^2}{2} \quad (8.35)$$

$$k \cdot k' = \frac{s - 2M_0^2}{2} . \quad (8.36)$$

U sistemu centra mase ovaj sudar izgleda kao na slici 8.6. Jednostavnosti radi



Slika 8.6: Sudar u sistemu centra mase.

posmatraćemo slučaj visokoenergetskog sudara u kome možemo zanemariti mase čestica. Tada imamo

$$p = (\sqrt{p^2 + m_0^2}, p\hat{z}) \approx (E, E\hat{z}) \quad (8.37)$$

$$p' = (\sqrt{p^2 + m_0^2}, -p\hat{z}) \approx (E, -E\hat{z}) \quad (8.38)$$

$$k = (\sqrt{k^2 + M_0^2}, k\hat{n}) \approx (E, E\hat{n}) \quad (8.39)$$

$$k' = (\sqrt{k^2 + M_0^2}, -k\hat{n}) \approx (E, -E\hat{n}) . \quad (8.40)$$

Odavde dobijamo

$$s = (p + p')^2 = (2E, 0)^2 = 4E^2 = E_{\text{cm}}^2 \quad (8.41)$$

$$t = (k - p)^2 = (0, E(\hat{n} - \hat{z}))^2 = -2E^2(1 - \cos \theta) \quad (8.42)$$

$$u = (k' - p)^2 = (0, -E(\hat{n} + \hat{z}))^2 = -2E^2(1 + \cos \theta) . \quad (8.43)$$

Izražena preko Mandelstamovih varijabli, verovatnoća koju smo računali je jednaka

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2 &= \frac{8e_0^4}{q^4} \left( \left( \frac{m_0^2 + M - 0^2 - t}{2} \right)^2 + \left( \frac{m_0^2 + M - 0^2 - u}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + M_0^2 \left( \frac{s - 2m_0^2}{2} \right) + m_0^2 \left( \frac{s - 2M_0^2}{2} \right) + 2m_0^2 M_0^2 \right) . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Kvadriranjem, korišćenjem činjenice da je  $q^2 = (p + p')^2 = s$ , kao i veze  $s + t + u = 2m_0^2 + 2M_0^2$ , dobijamo

$$|\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2 = \frac{8e_0^4}{s^2} \left( \left( \frac{t}{2} \right)^2 + \left( \frac{u}{2} \right)^2 + (m_0^2 + M_0^2)s - \frac{1}{2}(m_0^2 + M_0^2)^2 \right) . \quad (8.45)$$

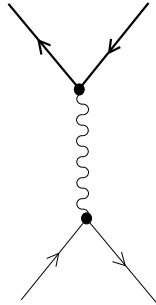
U limesu visokih energija ovo postaje

$$|\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2 \approx \frac{2e_0^4}{s^2} (t^2 + u^2) = e_0^2(1 + \cos^2 \theta) . \quad (8.46)$$

Kao što vidimo, u ovom limesu verovatnoća ne zavisi od energije  $E$ .

## 8.4 Simetrija ukrštanja

Posmatrajmo Greenove funkcije za dva procesa prikazana na slici 8.7. Feynmanova

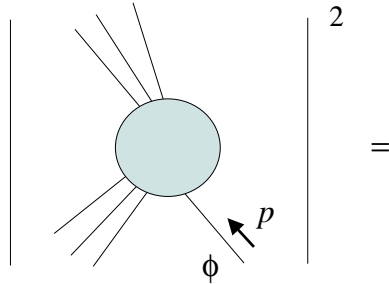


Slika 8.7: Jedna Greenova funkcija daje opis ova dva fizički različita procesa.

pravila za Greenove funkcije ne prave razliku između ulaznih i izlaznih nogica, te su amplitude za gornja dva, fizički različita procesa, jednake. Levi dijagram opisuje proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , a desni  $e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+$ . Mada su odgovarajuće Greenove

funkcije jednake, odatle ne sledi i jednakost asociiranih  $S$ -matričnih elemenata. Pri prelasku na  $S$ -matrične amplitude u ova dva slučaja lepimo različite spoljne noge na istu amputiranu Greenovu funkciju.

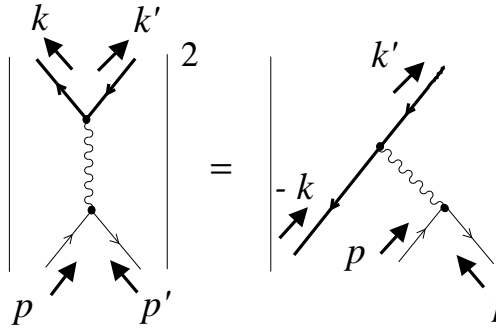
Ipak,  $S$ -matrične amplitude se “sećaju” da su nastale od iste Greenove funkcije. Ova simetrija na ukrštanje je prikazana na slici 8.8. Simetrija ukrštanja nam



Slika 8.8: Simetrija ukrštanja kvadrata  $S$ -matričnih elemenata.

omogućava da zamenimo ulaznu nogicu (impuls  $p$ , čestica  $\phi$ ) za izlaznu nogicu (impuls  $-p$ , anti-čestica  $\bar{\phi}$ ). Ovu simetriju uzimamo bez dokaza, mada ona skoro direktno sledi iz redukcionih formula.

Primenimo simetriju ukrštanja na dva procesa data na slici 8.7. Veza se dobija u dva koraka što je pokazano na slici 8.9. Kao rezultata ovoga, verovatnoća za



Slika 8.9: Primena simetrije ukrštanja.

proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  direktno daje i verovatnoću za  $e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+$ .

## ZADACI

- 8.1 Pokažite da je trag neparnog broja gama matrica jednak nuli.
- 8.2 Dokažite identitete (8.17) vezane za tragove sa  $\gamma$  matricom.
- 8.3 Dokažite identitete date u (8.21).
- 8.4 Dokažite identitete kontrakcija gama matrica (8.25).
- 8.5 Dokažite sve identitete sa gama matricama koji su dati u ovoj lekciji ali u  $d = 2$  dimenzije prostorvremena.
- 8.6 Pokažite da Mandelstamove varijable zadovoljavaju  $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$ , gde indeks  $i$  prebrojava sve ulazne i izlazne čestice.
- 8.7 Razmotrite rasejanje  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  i nacrtajte dominantni dijagram za ovaj proces.
- 8.8 Razmotrite proces  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  i nacrtajte dominantni dijagram.
- 8.9 Izračunajte  $|\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2$  za proces  $e^-\mu^+ \rightarrow e^-\mu^+$ . Uporedite rezultat sa verovatnoćom koju smo računali na predavanju i pokažite na tom primeru da zaista važi simetrija ukrštanja. Pokažite da je veza između Mandelstamovih varijabli za ova dva procesa data sa

$$s \rightarrow t$$

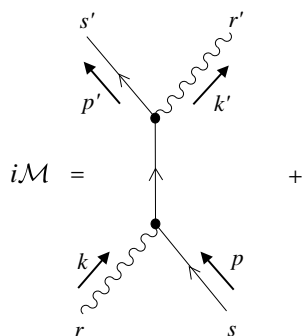
$$t \rightarrow s$$

$$u \rightarrow u .$$

## Lekcija 9

# QED: elementarni procesi (nastavak)

U današnjoj lekciji nastavljamo razmatranje elementarnih procesa u kvantnoj elektrodinamici. Računaćemo dominantne dijagrame za Comptonovo rasejanje prikazane na slici 9.1. Kao i u prethodnoj lekciji, i ovde ćemo na kraju računati verovatnoću koja je usrednjena po spinovima i polarizacijama. Da bi smo ovo



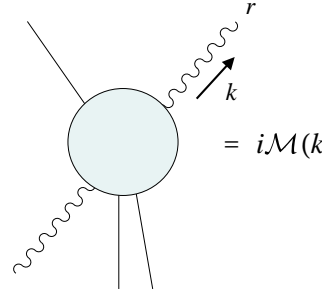
Slika 9.1: Dominantni dijagrami za Comptonovo rasejanje.

računali prvo moramo da se pozabavimo usrednjavanjem po polarizacijama fotona, što će biti predmet sledećeg odeljka.

### 9.1 Wardov identitet

Posmatrajmo opšti dijagram sa spoljnom fotonskom nogom. Ovakav dijagram je predstavljen na slici 9.2. Usrednjena verovatnoća koja dolazi od ovakvog dijagrama je proporcionalna sa

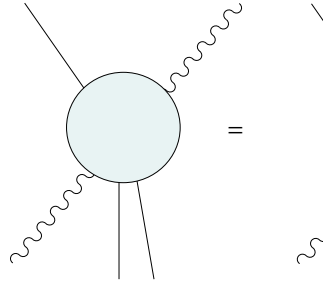
$$\sum_{r=1,2} \varepsilon_{\mu r}^*(k) \varepsilon_{\nu r}(k) \mathcal{M}^{\mu}(k) \mathcal{M}^{\nu}(k)^* . \quad (9.1)$$

Slika 9.2:  $S$ -matrični dijagram sa spoljnom fotonskom nogom.

Za foton koji propagira duž  $z$ -ose imamo  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ , odakle sledi  $\varepsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$  i  $\varepsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$ , tako da gornja suma postaje

$$|\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 . \quad (9.2)$$

Posmatrajmo sad  $\mathcal{M}^\mu(k)$  malo detaljnije. Na osnovu Feynmanovih pravila očigledno važi identitet prikazan na slici 9.3. U elektrodinamici je interakcija data sa



Slika 9.3: Zavisnost opšteg dijagrama od spoljne fotonske noge.

$\int dx e_0 j^\mu A_\mu$ , gde je  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ . Odavde sledi

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int dx e^{ik \cdot x} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle , \quad (9.3)$$

gde početna i krajnja stanja sadrže svu zavisnost osim one od izdvojene fotonske linije.

U klasičnoj teoriji imamo  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Ova Noetherina struja odgovara (lokalnoj)  $U(1)$  simetriji — očuvanju naelektrisanja. Mi ćemo od sada pretpostaviti, bez dokaza, da je ova simetrija očuvana i na kvantnom nivou, dakle da nije anomalna. Direktna posledica ovoga je operatorski identitet  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , odnosno, svaka amplituda u kvantnoj elektrodinamici (sa bar jednom spoljnom fotonskom nogom) zadovoljava tzv. Wardov identitet

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0 . \quad (9.4)$$

Za foton koji se kreće duž  $z$ -ose ovo daje

$$\mathcal{M}^0(k) = \mathcal{M}^3(k) , \quad (9.5)$$

što zajedno sa (9.1) i (9.2) daje

$$\begin{aligned} \sum_{r=1,2} \varepsilon_{\mu r}^*(k) \varepsilon_{\nu r}(k) \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^\nu(k)^* &= \\ &= -|\mathcal{M}^0(k)|^2 + |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 + |\mathcal{M}^3(k)|^2 = \\ &= -\eta_{\mu\nu} \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^\nu(k)^* . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Odavde sledi da (unutar dijagrama) možemo da izvršimo zamenu

$$\sum_{r=1,2} \varepsilon_{\mu r}^*(k) \varepsilon_{\nu r}(k) \rightarrow -\eta_{\mu\nu} . \quad (9.7)$$

Primitimo da ovo *nije* jednakost, već da važi samo unutar dijagrama, i to kao direktna posledica Wardovog identiteta, odnosno gejdž simetrije. Izraz (9.7) nam omogućava da na jednostavan način usrednjavamo po polarizacijama.

## 9.2 Comptonovo rasejanje

U ovom odeljku ćemo se pozabaviti računanjem dominantnog doprinosa Comptonovom rasejanju datom na slici 9.1. Primenom Feynmanovih pravila odgovarajuća  $S$ -matrična amplituda je jednaka

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}_{s'}(p') (-ie_0 \gamma^\mu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m_0)}{(p+k)^2 - m_0^2} (-ie_0 \gamma^\nu) u_s(p) \varepsilon_{\nu r}(k) \varepsilon_{\mu r'}^* + \\ &+ \bar{u}_{s'}(p') (-ie_0 \gamma^\nu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m_0)}{(p-k')^2 - m_0^2} (-ie_0 \gamma^\mu) u_s(p) \varepsilon_{\nu r}(k) \varepsilon_{\mu r'}^* . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Ovaj izraz se može pojednostaviti korišćenjem  $(p \pm k)^2 - m_0^2 = m_0^2 \pm 2p \cdot k - m_0^2 = \pm 2p \cdot k$ , kao i činjenice da  $\not{p} + m_0$  jednostavno deluje na  $\gamma^\nu u$ . Naime

$$\begin{aligned} (\not{p} + m_0) \gamma^\nu u &= (\gamma^\mu p_\mu + m_0) \gamma^\nu u = (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu u + m_0 \gamma^\nu u = \\ &= 2p^\nu u - \gamma^\nu (\not{p} - m_0) u = 2p^\nu u . \end{aligned} \quad (9.9)$$

Odavde dobijamo

$$i\mathcal{M} = -ie_0^2 \varepsilon_{\mu r'}^*(k') \varepsilon_{\nu r}(k) \bar{u}_{s'}(p') A^{\mu\nu} u_s(p) , \quad (9.10)$$

gde smo uveli oznaku

$$A^{\mu\nu} = \frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} . \quad (9.11)$$



Za prelazak na odgovarajuću verovatnoću koristimo

$$\begin{aligned} (\bar{u}A^{\mu\nu}u)^* &= (u^\dagger\gamma^0A^{\mu\nu}u)^\dagger = u^\dagger A^{\mu\nu} \dagger\gamma^0u = \\ &= \bar{u}\gamma^0A^{\mu\nu} \dagger\gamma^0u = \bar{u}B^{\mu\nu}u, \end{aligned} \quad (9.12)$$

gde imamo

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu} &= \gamma^0 \left( \frac{\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu k_\sigma + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} \right)^\dagger \gamma^0 + \gamma^0 \left( \frac{\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu k'_\sigma - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right)^\dagger \gamma^0 = \\ &= \frac{\gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\mu \not{k}' \gamma^\nu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Izraz za verovatnoću Comptonovog rasejanja zahteva korišćenje eksplicitnih formula za spinore  $u$  i  $v$ , kao i za polarizacije  $\varepsilon_{\mu r}$ . Mi ovo nećemo računati. Kao i u prethodnoj lekciji, posmatraćemo samo verovatnoću za proces koji je usrednjen po spinu. Korišćenjem (9.7) tada dobijamo

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2 &= \frac{e_0^4}{4} \sum_{r,r',s,s'} \varepsilon_{\mu r'}^*(k') \varepsilon_{\nu r}(k) \bar{u}_{s'}(p') A^{\mu\nu} u_s(p) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{u}_s(p) B^{\rho\sigma} u_{s'}(p') \varepsilon_{\rho r'}(k') \varepsilon_{\sigma r}^*(k) = \\ &= \frac{e_0^4}{4} \sum_{s,s'} \bar{u}_{s'} \alpha(p') A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} u_s \beta(p) \bar{u}_s \gamma(p) B_{\mu\nu} \gamma\delta u_{s'} \delta(p') = \\ &= \frac{e_0^4}{4} \text{tr} (A^{\mu\nu}(\not{p} + m_0) B_{\mu\nu}(\not{p}' + m_0)) = \\ &= \frac{e_0^4}{4} \text{tr} ((\not{p}' + m_0) A^{\mu\nu}(\not{p} + m_0) B_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Ubacivanjem eksplicitnih izraza za  $A^{\mu\nu}$  i  $B^{\mu\nu}$  dobijamo

$$|\mathcal{M}|_{\text{usrednjeno}}^2 = \frac{e_0^4}{16} \left( \frac{\text{I}}{(p \cdot k)^2} + \frac{\text{II} + \text{III}}{(p \cdot k)(p \cdot k')} + \frac{\text{IV}}{(p \cdot k')^2} \right), \quad (9.15)$$

gde smo uveli sledeće tragove

$$\text{I} = \text{tr} (\not{p}' + m_0)(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p} + m_0)(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu) \quad (9.16)$$

$$\text{II} = \text{tr} (\not{p}' + m_0)(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p} + m_0)(\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_\mu) \quad (9.17)$$

$$\text{III} = \text{tr} (\not{p}' + m_0)(\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu)(\not{p} + m_0)(\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu) \quad (9.18)$$

$$\text{IV} = \text{tr} (\not{p}' + m_0)(\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu)(\not{p} + m_0)(\gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_\mu). \quad (9.19)$$

Ako se setimo da je  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  onda vidimo da trag I dolazi od  $|\mathcal{M}_1|^2$ , trag II od  $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*$ , trag III od  $\mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_2$ , a trag IV od  $|\mathcal{M}_2|^2$ . Odavde sledi da je  $\text{II} = \text{III}^*$ . Iz gornjih izraza vidimo da su ovi tragovi realni, pa sledi  $\text{II} = \text{III}$ . Sa druge strane, simetrijom ukrštanja dobijamo  $\text{I} \leftrightarrow \text{IV}$  pod uslovom da izvršimo zamenu  $k \leftrightarrow -k'$ . Dovoljno je dakle izračunati tragove I i II.

Predjimo sad na eksplicitno računanje traga I. Iz (9.16) dobijamo

$$\begin{aligned}
\text{I} = & \text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) + 2p^\nu \text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) + \\
& + 2p_\nu \text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu) + 4m_0^2 \text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu) + \\
& + m_0^2 \text{tr} (\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) + 2m_0^2 p^\nu \text{tr} (\gamma^\mu \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) + \\
& + 2m_0^2 p_\nu \text{tr} (\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_\mu) + 4m_0^4 \text{tr} (\gamma^\mu \gamma_\mu) .
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Pri raspisivanju gornjeg izraza treba samo voditi računa o sabircima sačinjenih od parnog broja gama matrica. Kao što znamo, tragovi neparnih članova su nula.

Celokupni izraz I je sveden na osam tragova koji se jednostavno računaju primenom gama matričnih identiteta koje smo ranije izveli. Na primer,

$$\begin{aligned}
\text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) &= p'^\rho k^\sigma p^\lambda k^\tau \text{tr} (\gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma^\nu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu) = \\
&= -2p'^\rho k^\sigma p^\lambda k^\tau \text{tr} (\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\lambda \gamma_\tau) = 4p'^\rho k^\sigma p^\lambda k^\tau \text{tr} (\gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\lambda \gamma_\tau) = \\
&= 16p'^\rho k^\sigma p^\lambda k^\tau (\eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\tau} - \eta_{\rho\lambda} \eta_{\sigma\tau} + \eta_{\rho\tau} \eta_{\sigma\lambda}) = 32(p \cdot k)(p' \cdot k) .
\end{aligned} \tag{9.21}$$

U gornjem slučaju smo pored cikličnosti traga, dva puta primenili kontrakcioni identitet  $\gamma^\nu \gamma_\lambda \gamma_\nu = -2\gamma_\lambda$ , kao i izraza za trag četiri gama matrice. Na sličan način

$$\begin{aligned}
2p^\nu \text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) &= 2p^\nu p'^\rho p^\sigma k^\lambda \text{tr} (\gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu) = \\
&= -4p^\nu p'^\rho p^\sigma k^\lambda \text{tr} (\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\sigma) = -16m_0^2(p' \cdot k) .
\end{aligned} \tag{9.22}$$

Ovde je, na primer, korišćen kontrakcioni identitet  $\gamma^\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = -2\gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\sigma$ . Preostali tragovi se takodje jednostavno računaju, i dobijamo

$$2p_\nu \text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu) = -16m_0^2(p' \cdot k) \tag{9.23}$$

$$4m_0^2 \text{tr} (\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu) = -32m_0^2(p \cdot p') \tag{9.24}$$

$$m_0^2 \text{tr} (\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) = 0 \tag{9.25}$$

$$2m_0^2 p^\nu \text{tr} (\gamma^\mu \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) = 2m_0^2 p_\nu \text{tr} (\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_\mu) = 32m_0^2(k \cdot p) \tag{9.26}$$

$$4m_0^4 \text{tr} (\gamma^\mu \gamma_\mu) = 64m_0^4 . \tag{9.27}$$

Na kraju, izraz za I postaje

$$\text{I} = 16 (4m_0^4 - 2m_0^2(p \cdot p') + 4m_0^2(p \cdot k) - 2m_0^2(p' \cdot k) + 2(p \cdot k)(p' \cdot k)) . \tag{9.28}$$

Prethodni izraz se može napisati na mnogo pregledniji način korišćenjem Mandelstamovih varijabli. U ovom slučaju imamo

$$s = (p + k)^2 = m_0^2 + 2p \cdot k \tag{9.29}$$

$$t = (p' - p)^2 = 2m_0^2 - 2p' \cdot p \tag{9.30}$$

$$u = (k - p')^2 = m_0^2 - 2k \cdot p' , \tag{9.31}$$

kao i  $s + t + u = 2m_0^2$ . Na osnovu ovoga dobijamo

$$\text{I} = 16 \left( 2m_0^4 + m_0^2(s - m_0^2) - \frac{1}{2}(s - m_0^2)(u - m_0^2) \right) . \tag{9.32}$$

Simetrija ukrštanja nam daje  $I \leftrightarrow IV$  uz zamenu  $k \leftrightarrow -k'$ , tj.  $s \leftrightarrow u$ . Dakle,

$$IV = 16 \left( 2m_0^4 + m_0^2(u - m_0^2) - \frac{1}{2}(s - m_0^2)(u - m_0^2) \right). \quad (9.33)$$

Na isti način se računa i preostali trag za koji dobijamo

$$II = III = -8(4m_0^4 + m_0^2(s - m_0^2) + m_0^2(u - m_0^2)). \quad (9.34)$$

Na samom kraju, usrednjena verovatnoća za Comptonovo rasejanje glasi

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{\text{usrednjena}}^2 &= e_0^2 \left( \frac{2m_0^4 + 2m_0^2(p \cdot k) + 2(p \cdot k)(p \cdot k')}{(p \cdot k)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4m_0^4 + 2m_0^2(p \cdot k) - 2m_0^2(p \cdot k')}{(p \cdot k)(p \cdot k')} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2m_0^4 - 2m_0^2(p \cdot k') + 2(p \cdot k)(p \cdot k')}{(p \cdot k')^2} \right) = \\ &= 2e_0^2 \left( \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m_0^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + \right. \\ &\quad \left. + m_0^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right). \quad (9.35) \end{aligned}$$

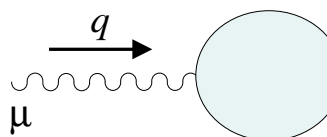
## ZADACI

- 9.1 Dokažite da važi  $\sum_{r=0}^3 \varepsilon_{\mu r}^*(k) \varepsilon_{\nu r}(k) = -\eta_{\mu\nu}$ , tako da Wardov identitet prosto izbacuje vremenske i longitudinalne fotone iz (9.7).
- 9.2 Pokažite da amplituda prikazana na slici 9.1 zadovoljava Wardov identitet.
- 9.3 Izračunajte trag II i pokažite da je on zaista dat formulom (9.34).
- 9.4 Koristeći verovatnoću (9.35) izračunajte diferencijalni poprečni presek  $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$  za Comptonovo rasejanje (Klein–Nishinova formula) u laboratorijskom referentnom sistem. U ovom referentnom sistemu upadi elektron miruje, a  $\theta$  označava ugao između pravca upadnog i rasejanog fotona.
- 9.5 Koristite simetriju ukrštanja da povežete Comptonovo rasejanje sa elektron-pozitron anihilacijom  $e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ . Za ovaj proces izračunajte diferencijalni poprečni presek  $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$  u sistemu centra mase. U ovom slučaju  $\theta$  je ugao između upadnog elektrona i jednog od kreiranih fotona. Kako se ponaša ovaj poprečni presek u limesu visokih energija?
- 9.6 Pokažite da  $e^-e^+ \rightarrow \gamma$  nije kinematički dozvoljen proces.

## Lekcija 10

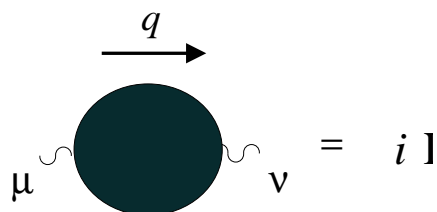
# QED: radijacione popravke

Već smo videli da je u skupu svih Greenovih funkcija (ili  $S$ -matričnih amplituda) dovoljno poznavati samo one koje su date povezanim dijagramima. Podskup povezanih dijagrama je dovoljno bogat da iz njega (množenjem) slede sve amplitude. Dvočestična povezana Greenova funkcija se još zove puni propagator. Puni propagator za fotone je prikazan na slici 10.1. Danas ćemo se sresti sa jedanput



Slika 10.1: Puni fotonski propagator.

ireducibilnim (1PI) dijagramima. Ovi dijagrami predstavljaju još uži podskup svih dijagrama. Dvočestični 1PI dijagram za fotone, tzv. vakuumska polarizacija, je prikazan na slici 10.2. 1PI dijagram je onaj deo odgovarajuće povezane ampli-



Slika 10.2: Polarizacija vakuuma.

tude koji se sečenjem jedne unutrašnje linije ne raspada na dva dela. Pored toga, 1PI dijagrami se definišu bez spoljnih noga. Patrljci na 1PI dijagramima samo označavaju mesta na koje se naknadno kače odgovarajuće spoljne noge.

## 10.1 Puni fotonski propagator

Tenzorska struktura vakuumske polarizacije nam daje da je  $\Pi^{\mu\nu}$  oblika

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \eta^{\mu\nu} A(q^2) + q^\mu q^\nu B(q^2), \quad (10.1)$$

gde su  $A$  i  $B$  dve skalarne funkcije. Sa druge strane, Wardov identite  $q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$  daje

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \quad (10.2)$$

tako da je polarizacija vakuuma, u stvari, određena samo jednom skalarnom funkcijom  $\Pi(q^2)$ . Korisno je uvesti transverzalni i longitudinalni projektor

$$P_T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (10.3)$$

$$P_L^{\mu\nu} = \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}. \quad (10.4)$$

Lako je pokazati da us  $P_T^{\mu\nu}$  i  $P_L^{\mu\nu}$  idempotentni, ortogonalni i da važi  $P_T^{\mu\nu} + P_L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ . Polarizacija vakuuma se sad može napisati i kao

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = P_T^{\mu\nu} q^2 \Pi(q^2). \quad (10.5)$$

Moguće je pokazati da je funkcija  $\Pi(q^2)$  regularna u tački  $q^2 = 0$ .

Puni fotonski propagator se može lako izraziti preko polarizacije vakuuma. Ova veza je prikazana na slici 10.3. Ova jednakost nam daje da je puni fotonski



Slika 10.3: Puni fotonski propagator izražen preko polarizacije vakuuma.

propagator jednak

$$\begin{aligned} & -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} + \left( -i \frac{\eta_{\mu\rho}}{q^2} \right) i P_T^{\rho\sigma} q^2 \Pi(q^2) \left( -i \frac{\eta_{\sigma\nu}}{q^2} \right) + \\ & + \left( -i \frac{\eta_{\mu\rho}}{q^2} \right) i P_T^{\rho\sigma} q^2 \Pi(q^2) \left( -i \frac{\eta_{\sigma\lambda}}{q^2} \right) i P_T^{\lambda\tau} q^2 \Pi(q^2) \left( -i \frac{\eta_{\tau\nu}}{q^2} \right) + \dots \\ & = -i \frac{1}{q^2} \eta_{\mu\nu} + -i \frac{1}{q^2} P_T^{\mu\nu} \Pi(q^2) + -i \frac{1}{q^2} P_T^{\mu\nu} \Pi(q^2)^2 + \dots = \\ & = -i \frac{1}{q^2} P_L^{\mu\nu} - i \frac{1}{q^2 (1 - \Pi(q^2))} P_T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Na osnovu rezultata iz prethodne lekcije, prilično je jednostavno ubediti se da  $P_L$  deluje trivijalno unutar  $S$ -matričnih amplituda. Kao posledica ovoga, pri računanju  $S$ -matričnih amplituda možemo za puni fotonski propagator koristiti jednostavniji izraz

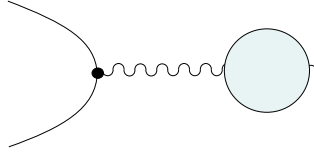
$$\frac{-i \eta_{\mu\nu}}{q^2 (1 - \Pi(q^2))}. \quad (10.7)$$

Kvadrat fizičke mase  $m^2$  jedne čestice se očitava iz pola odgovarajućeg punog propagatora. Kod slobodnih čestica pol je u  $m_0^2$ , te su fizička i gola masa jednake. U slučaju opšte teorije polja pol punog propagatora se više ne poklapa sa polom slobodnog propagatora. Drugim rečima, pod dejstvom interakcija, fizička masa više nije jednaka goloj masi. Izuzetak ovom pravilu su upravo fotoni. Kao što vidimo iz (10.7), činjenica da je  $\Pi(q^2)$  regularno u  $q^2 = 0$  dovodi do toga da pol punog fotonskog propagatora ostaje u  $q^2 = 0$ . Fizička masa fotona je dakle nula. “Krivac” za ovo su Wardovi identiteti, odnosno gejdž invarijantnost.

U blizini pola puni fotonski propagator postaje

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2(1-\Pi(q^2))} \approx Z_3 \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (10.8)$$

gde smo uveli oznaku  $Z_3 = \frac{1}{1-\Pi(q^2)}$ . Puni fotonski propagator dolazi u dijagramima kao što je

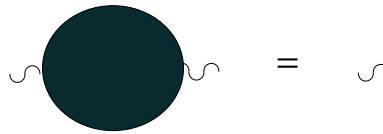


Oдавде vidimo da se propagatoru može dati kanonička normalizacija ako u svaki od verteksa apsorbuјemo po jedan  $\sqrt{Z_3}$ . Na ovaj način smo definisali fizičko naelektrisanje

$$e = e_0 \sqrt{Z_3}. \quad (10.9)$$

## 10.2 Polarizacija vakuuma do na jednu petlju

Dominantni dijagram za polarizaciju vakuuma je prikazan na slici 10.4. Za razliku od procesa koje smo do sada razmatrali, ovaj dijagram ima u sebi jednu zatvorenu petlju. U ovoj aproksimaciji imamo



Slika 10.4: Dominantni doprinos polarizacije vakuuma.

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -(-ie_0)^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \text{tr} \left( \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m_0} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m_0} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -e_0^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \left( \gamma^\mu \frac{\not{k} + m_0}{k^2 - m_0^2} \gamma^\nu \frac{\not{k} + \not{q} + m_0}{(k+q)^2 - m_0^2} \right) = \\
&= -e_0^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)((k+q)^2 - m_0^2)} \operatorname{tr} (\gamma^\mu (\not{k} + m_0) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + m_0)) = \\
&= -4e_0^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - \eta^{\mu\nu} (k \cdot (k+q) - m_0^2)}{(k^2 - m_0^2)((k+q)^2 - m_0^2)}. \quad (10.10)
\end{aligned}$$

Na prvi pogled, gornji integral deluje prilično komplikovano. U sledećem odeljku ćemo izložiti Feynmanov metod za dovođenje ovog integrala u jednostavniji oblik.

### 10.3 Feynmanovi parametri

Krenimo od sledećeg jednostavnog identiteta

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{(xA + yB)^2}. \quad (10.11)$$

Drugi korak je očigledan, a prvi se dokazuje smenom  $z = xA + (1-x)B$ . Nešto opštiji identitet, koji se takodje jednostavno dokazuje, glasi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} &= \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1) \cdot \\
&\cdot \frac{\Gamma(n)}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n)^n}. \quad (10.12)
\end{aligned}$$

Najopštija formula koja nam treba se dobija iz ove uzastopnim diferenciranjem. Ako gornju diferenciramo  $m_1 - 1$  puta po  $A_1$ ,  $m_2 - 1$  puta po  $A_2$ , itd. posle sredjivanja dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_n^{m_n}} &= \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \delta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1) \cdot \\
&\cdot \frac{x_1^{m_1-1} \cdots x_n^{m_n-1}}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n)^{m_1+\cdots+m_n}} \frac{\Gamma(m_1 + \cdots + m_n)}{\Gamma(m_1) \cdots \Gamma(m_n)}. \quad (10.13)
\end{aligned}$$

Prisetimo da gornji identiteti važe čak i kad  $m_i$ -ovi nisu celobrojni.

U problemu koji nas interesuje Feynmanovi parametri nam omogućuju da napišemo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k^2 - m_0^2)((k+q)^2 - m_0^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{((1-x)(k^2 - m_0^2) + x((k+q)^2 - m_0^2))^2} = \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + 2xk \cdot q + xq^2)^2} = \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (10.14)
\end{aligned}$$

gde smo uveli  $\ell = k + xq$  i  $\Delta = m_0^2 - x(1-x)q^2$ . Koristeći ovo, amplituda za polarizaciju vakuuma postaje

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -4e_0^2 \int_0^1 dx \int \frac{d\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} \cdot (2\ell^\mu \ell^\nu + 2x(x-1)q^\mu q^\nu - (\ell^2 + x(x-1)q^2 - m_0^2) \eta^{\mu\nu}) . \quad (10.15)$$

Pri izvodjenju gornje formule smo već koristili činjenicu da iz sferne simetrije sledi

$$\int \frac{d\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu}{(\ell^2 - \Delta)^2} = 0 . \quad (10.16)$$

Integral (10.15) je UV divergentan. U sledećem odeljku ćemo izložiti regularizacionu perskripciju za ovakve integrale koja čuva Wardove identitete, tj. gejdž invarijantnost.

## 10.4 Dimenziona regularizacija

Primetimo da integral (10.15) nije divergentan u nižim dimenzijama. Osnovna ideja 't Hooftovog metoda dimenzionane regularizacije je zato da se gornji integral računa za opšte  $d$ . Dobijeni rezultat se zatim interpretira da važi i za necelobrojne vrednosti  $d$ . Na samom kraju vršimo analitičko produženje  $d \rightarrow 4$ .

U  $d$  dimenzija integral (10.15) glasi

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &= -4e_0^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} \cdot \\ &\quad \cdot (2\ell^\mu \ell^\nu + 2x(x-1)q^\mu q^\nu - (\ell^2 + x(x-1)q^2 - m_0^2) \eta^{\mu\nu}) = \\ &= -4e_0^2 \int_0^1 dx \left( A^{\mu\nu} \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^2} + \right. \\ &\quad \left. + B^{\mu\nu} \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} \right) , \end{aligned} \quad (10.17)$$

gde smo uveli

$$A^{\mu\nu} = \left( -1 + \frac{2}{d} \right) \eta^{\mu\nu} \quad (10.18)$$

$$B^{\mu\nu} = 2x(x-1)q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu} (m_0^2 - x(x-1)q^2) . \quad (10.19)$$

Pri izvodjenju ovoga smo opet iskoristili sfernu simetriju (ovog puta u  $d$  dimenzija) i stavili

$$\int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^2} = \frac{\eta^{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^2} . \quad (10.20)$$

Standardni način da se urade preostali integrali je da se prvo izvrši Wick rotacija iz prostora Minkowskog u Euklidski prostor. Impulsi se Wick rotiraju tako što



vremenske komponente stoje u vezi  $\ell_E^0 = -i\ell^0$ , dok prostorne komponente ostaju iste<sup>1</sup>. Odavde sledi  $d^d\ell_E = -id^d\ell$ , kao i  $\ell_E^2 = -\ell^2$ , tako da dobijamo

$$\int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta - i\varepsilon)^2} = -i \int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \quad (10.21)$$

$$\int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta - i\varepsilon)^2} = i \int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}. \quad (10.22)$$

Primetimo da smo u Minkowski izrazima opet eksplicitno pisali  $i\varepsilon$  član. Kao što znamo, upravo taj član i dozvoljava da vršimo Wick rotaciju. U sledećem odeljku ćemo dati generalnu preskripciju za rešavanje ovakvih Euklidskih integrala.

## 10.5 Integralne formule

U ovom odeljku ćemo se pozabaviti izvodjenjem integrala koji se javljaju pri dimenzionoj regularizaciji kvantnih teorija polja. Neka je  $\ell_E$  vektor u  $d$  dimenzionom Euklidskom prostoru. Posmatrajmo integral

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^A} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell \frac{\ell^{d-1}}{\ell^2 + \Delta)^A}. \quad (10.23)$$

Kao što vidimo, integrand zavisi samo od radijalne koordinate. Integrali po uglovima daju površinu  $d$ -dimenzione sfere jediničnog radijusa. Ovaj ugaoni integral možemo jednostavno izračunati pomoću sledećeg trika

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d\ell e^{-\ell^2} = \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty d\ell \ell^{d-1} e^{-\ell^2} = \frac{1}{2} \int d\Omega_d \int d\ell^2 (\ell^2)^{d/2-1} e^{-\ell^2} = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(d/2) \int d\Omega_d. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Odavde sledi

$$\int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} = \frac{2}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}. \quad (10.25)$$

Pogledajmo sad radijalni integral

$$\int_0^\infty d\ell \frac{\ell^{d-1}}{(\ell^2 + \Delta)^A} = \frac{1}{2} \int d\ell^2 \frac{(\ell^2)^{d/2-1}}{(\ell^2 + \Delta)^A}. \quad (10.26)$$

Smena promenljivih

$$x = \frac{\Delta}{\ell^2 + \Delta}, \quad (10.27)$$

<sup>1</sup>Setimo se da se Wick rotacija koordinata ostvaruje preko  $x_E^0 = ix^0$ . Na ovaj način dobijamo  $(x \cdot p)_E = x \cdot p$ .

nam daje

$$\ell^2 = \Delta \frac{1-x}{x} \quad (10.28)$$

$$d\ell^2 = -\frac{\Delta}{x^2} dx, \quad (10.29)$$

tako da gornji radijalni integral postaje

$$\frac{1}{2} \Delta^{d/2-A} \int_0^1 dx x^{A-d/2-1} (1-x)^{d/2-1} = \frac{1}{2} \Delta^{d/2-A} \frac{\Gamma(A-d/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(A)}. \quad (10.30)$$

Oдавде sledi da je naš početni integral jednak

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^A} = (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(A-d/2)}{\Gamma(A)} \Delta^{d/2-A}. \quad (10.31)$$

Ova formula će nam poslužiti kao *definicija* integracije za arbitrarno  $d \in \mathbb{C}$ . Kao što znamo, Eulerova gama funkcija  $\Gamma(z)$  ima izolovane polove u tačkama  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ . Oдавде vidimo da gornji integral divergira u  $d = 2A, 2A + 2, 2A + 4, \dots$  dimenzija. Na primer, pri računanju dominantnog doprinosa polarizacije vakuuma imali smo  $A = 2$ , što, kao što smo i videli, divergira u  $d = 4$ . Mi ćemo izvršiti regularizaciju time što ćemo raditi u  $d = 4 - \epsilon$  dimenzija. Na samom kraju računa ćemo uzeti limes  $\epsilon \rightarrow 0+$ .

Podjimo od naše osnovne integracione formule (10.31) i izvršimo skaliranje  $\ell_E^\mu \rightarrow \sqrt{t} \ell_E^\mu$ . Oдавде dobijamo

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(t\ell_E^2 + \Delta)^A} = t^{-d/2} (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(A-d/2)}{\Gamma(A)} \Delta^{d/2-A}. \quad (10.32)$$

Diferenciranjem ovog izraza po  $t$  dobijamo

$$-A \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(t\ell_E^2 + \Delta)^{A+1}} = -\frac{d}{2} t^{-d/2-1} (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(A-d/2)}{\Gamma(A)} \Delta^{d/2-A}. \quad (10.33)$$

Ako sad stavimo  $t = 1$  i  $A + 1 \rightarrow A$  dobijamo

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^A} = \frac{d}{2} (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(A-d/2-1)}{\Gamma(A)} \Delta^{1+d/2-A}. \quad (10.34)$$

Na sličan način možemo izvesti i ostale integralne identitete koji nam budu trebali.

Vreme je da se vratimo našoj amplitudi za polarizaciju vakuuma. Koristeći (10.21) i (10.22), kao i integralne identitete (10.31) i (10.34), naš izraz za polarizaciju vakuuma postaje

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -4e_0^2 \int_0^1 dx \left( -iA^{\mu\nu} \frac{d}{2} (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(2)} \Delta^{d/2-1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + iB^{\mu\nu}(4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} \Delta^{d/2-2} \Big) = \\
& = 4ie_0^2(4\pi)^{-d/2} \int_0^1 dx \left( \eta^{\mu\nu}(1-d/2)\Gamma(1-d/2)\Delta^{d/2-1} - \right. \\
& \quad \left. - \left( 2x(x-1)q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}(m_0^2 - x(x-1)q^2) \right) \Gamma(2-d/2)\Delta^{d/2-2} \right) = \\
& = 4ie_0^2(4\pi)^{-d/2} \int_0^1 dx \left( \eta^{\mu\nu} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}} 2x(x-1)q^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2x(x-1)q^\mu q^\nu \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}} \right) = \\
& = 8ie_0^2(4\pi)^{-d/2} \Gamma(2-d/2) (\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \cdot \\
& \quad \cdot \int_0^1 dx x(x-1) \Delta^{d/2-2} . \tag{10.35}
\end{aligned}$$

Dakle, odavde sledi

$$\Pi(q^2) = 8e_0^2(4\pi)^{-d/2} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dx x(x-1) \Delta^{d/2-2} , \tag{10.36}$$

gde je  $\Delta = m_0^2 - x(x-1)q^2$ .

Sada stavljamo  $d = 4 - \epsilon$ . Za malo  $\epsilon$  važi

$$\Gamma(2-d/2) = \Gamma(\epsilon/2) = 2/\epsilon - \gamma + o(\epsilon) , \tag{10.37}$$

gde je  $\gamma = 0.5772\dots$  tzv. Euler–Mascheronijeva konstanta. Koristeći ovo dobijamo

$$\Pi(q^2) = \frac{8e_0^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) (2/\epsilon - \ln \Delta - \gamma) . \tag{10.38}$$

Gornji izraz nam omogućava da uspostavimo vezu izmedju golog i fizičkog naelektrisanja. Uzimajući u obzir samo divergentni deo od (10.38), formula (10.9) nam daje

$$e^2 = \frac{1}{1 - \frac{e_0^2}{6\pi\epsilon}} e_0^2 \approx \left(1 + \frac{e_0^2}{6\pi\epsilon}\right) e_0^2 \approx \left(1 + \frac{e^2}{6\pi\epsilon}\right) e_0^2 . \tag{10.39}$$

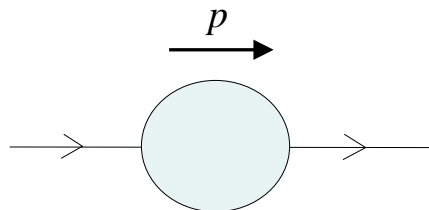
Primitimo da je gornje izvodjenje perturbativno, tj. računato kao razvoj u red po  $e_0^2$ . Sve do samog kraja  $\epsilon$  je *konačno*. Poslednji korak u gornjoj aproksimativnoj formuli je došao kao posledica toga da smo sve računali do na članove koji su proporcionalni sa  $e_0^2$ . Uzimajući u obzir definiciju konstante fine strukture, gornja relacija se može napisati i kao

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} \approx \frac{2\alpha}{3\pi\epsilon} . \tag{10.40}$$

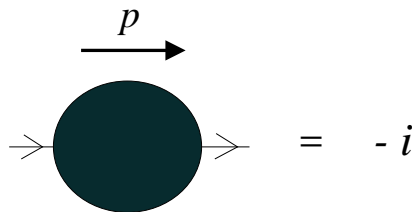
Tek sad smemo da uzmemo  $\epsilon \rightarrow 0$ . Odavde vidimo da je razlika izmedju golog i fizičkog naelektrisanja beskonačna. Golo naelektrisanje, medjutim, nije fizički merljivo – to nas i spašava. Golo naelektrisanje se i odredjuje tako da daje pravu vrednost za fizičko naelektrisanje.

## ZADACI

- 10.1 Pokazite da se, pri računanju  $S$ -matričnih amplituda, (10.7) može uzeti za puni fotonski propagator teorije.
- 10.2 Dokažite formule za Feynmanovu parametrizaciju.
- 10.3 Iskažite puni elektronski propagator



preko odgovarajućeg 1PI dijagrama



Izračunajte dominantni doprinos amplitudi  $\Sigma(p)$ . Koristite dimenzionu regularizaciju. Do na ovaj red, izračunajte  $m - m_0$ . U blizini pola, puni elektronski propagator ima oblik

$$\frac{iZ_2}{\not{p} - m}$$

Izračunajte  $Z_2$ .



## Lekcija 11

# QED: radijacione popravke (nastavak)

Kao i u prethodnoj lekciji, i danas ćemo posmatrati jedan 1PI dijagram. Skup 1PI dijagrama je dovoljno bogat da generiše sve Greenove funkcije. Lako je videti da u elektrodinamici postoji samo jedan dijagram sa tri spoljne noge<sup>1</sup>. Ovaj dijagram je pokazan na slici 11.1.

$$\begin{aligned}
 -ie_0\Gamma^\mu(p',p) &= \text{diagram} = \text{diagram} \\
 &= -ie_0\gamma^\mu - ie_0\delta\Gamma^\mu(p',p)
 \end{aligned}$$

Slika 11.1: Vertekсна funkcija do na jednu petlju.

### 11.1 Tročestična vertekсна funkcija

Amplituda  $\delta\Gamma^\mu$  pretstavlja prvi netrivialni doprinos tročestičnoj vertekсноj funkciji. Na osnovu Feynmanovih pravila dobijamo

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma^\mu(p',p) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-i\eta_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\varepsilon} (-ie_0\gamma^\nu) \frac{i\not{k}' + m_0}{k'^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \\
 &\quad \cdot \gamma^\mu \frac{i\not{k} + m_0}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} (-ie_0\gamma^\rho) =
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>1PI dijagrami sa tri ili više spoljnih nogu se zovu vertekсне funkcije.

$$= ie_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (i\not{k}' + m_0) \gamma^\mu (i\not{k} + m_0) \gamma^\rho}{((k-p)^2 + i\varepsilon) (k'^2 - m_0^2 + i\varepsilon) (k^2 - m_0^2 - i\varepsilon)} . \quad (11.1)$$

I u ovoj lekciji ćemo koristiti dimenzionu regularizaciju, te iz tog razloga, od samog početka, amplitudu računamo u opštem broju dimenzija. Pored toga, korisno je da ovog puta sve vreme vodimo računa o  $i\varepsilon$  regularizaciji Feynmanovih propagatora.

Feynmanova parametrizacija primenjena na imenilac gornje podintegralne funkcije daje

$$\begin{aligned} & \frac{1}{((k-p)^2 + i\varepsilon) (k'^2 - m_0^2 + i\varepsilon) (k^2 - m_0^2 - i\varepsilon)} = \\ & = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} , \end{aligned} \quad (11.2)$$

gde, koristeći činjenicu da je  $x+y+z=1$ , dobijamo

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m_0^2) + y(k'^2 - m_0^2) + z(k-p)^2 + (x+y+z)i\varepsilon = \\ &= x(k^2 - m_0^2) + y((k+q)^2 - m_0^2) + z(k-p)^2 + i\varepsilon = \\ &= (x+y+z)k^2 - (x+y)m_0^2 + y(q^2 + 2k \cdot q) + z(p^2 - 2k \cdot p) + i\varepsilon = \\ &= k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x+y)m_0^2 + i\varepsilon = \\ &= (k+yq+zp)^2 - (yq-zp)^2 + yq^2 + zp^2 - (x+y)m_0^2 + i\varepsilon = \\ &= \ell^2 - \Delta + i\varepsilon . \end{aligned} \quad (11.3)$$

U poslednjem koraku smo uveli sledeće oznake

$$\ell = k + yq + zp \quad (11.4)$$

$$\Delta = -2yzq \cdot p + (1-z)m_0^2 . \quad (11.5)$$

Sa druge strane, brojilac u podintegralnoj funkciji se može pojednostaviti uz pomoć kontrakcionih identiteta za gama matrice. Izvedimo prvo ove identitete za opšte  $d$ .

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\nu = (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma_\nu = (2-d) \gamma^\mu . \quad (11.6)$$

U poslednjem koraku smo prosto iskoristili činjenicu da je  $\gamma^\mu \gamma_\mu = d$ . Sledeći identitet se dobija na isti način

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma_\mu = \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\nu - (2-d) \gamma^\nu \gamma^\rho = 4\eta^{\rho\nu} - (4-d) \gamma^\nu \gamma^\rho . \end{aligned} \quad (11.7)$$

Potreban nam je samo još i sledeći identitet. Za njega dobijamo

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma^\nu (4\eta^{\rho\sigma} - (4-d) \gamma^\rho \gamma^\sigma) = \\ &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (4-d) \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma . \end{aligned} \quad (11.8)$$

Brojilac sada postaje

$$\begin{aligned}
& \gamma_\rho(ik'^\sigma\gamma_\sigma + m_0)\gamma^\mu(ik^\tau\gamma_\tau + m_0)\gamma^\rho = \\
& = -k'^\sigma k^\tau \gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma_\tau\gamma^\rho + im_0k'^\sigma\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho + \\
& + im_0k^\tau\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma_\tau\gamma^\rho + m_0^2\gamma_\rho\gamma^\mu\gamma^\rho = \\
& = -k'^\sigma k^\tau (-2\gamma_\tau\gamma^\mu\gamma_\sigma + (4-d)\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma_\tau) + im_0k'^\sigma(4\delta_\sigma^\mu - (4-d)\gamma_\sigma\gamma^\mu) + \\
& + im_0k^\tau(4\delta_\tau^\mu - (4-d)\gamma^\mu\gamma_\tau) + m_0^2(2-d)\gamma^\mu = \\
& = 2\cancel{k}\gamma^\mu\cancel{k}' - (4-d)\cancel{k}'\gamma^\mu\cancel{k} + 4im_0(k+k')^\mu - \\
& + (4-d)im_0(\cancel{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\cancel{k}) + m_0^2(2-d)\gamma^\mu .
\end{aligned} \tag{11.9}$$

Sada je potrebno da impulse  $k$  i  $k'$  izrazimo preko  $\ell$ . Imali smo

$$\ell = k + yq - zp \tag{11.10}$$

$$k' = k + q , \tag{11.11}$$

odakle sledi

$$k = \ell - yq + zp = \ell - yp' + (1-x)p = \ell + A \tag{11.12}$$

$$k' = \ell - (y-1)q + zp = \ell + (1-y)p' - xp = \ell + B . \tag{11.13}$$

Naš brojilac je sada

$$\begin{aligned}
& 2(\ell + A)\gamma^\mu(\ell + B) - (4-d)(\ell + B)\gamma^\mu(\ell + A) + \\
& + 4im_0(2\ell^\mu + A^\mu + B^\mu) - \\
& - (4-d)im_0((\ell + B)\gamma^\mu + \gamma^\mu(\ell + A)) + m_0^2(2-d)\gamma^\mu .
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Pri množenju gornjih članova možemo odbaciti sve one koji su linearni po  $\ell$ , pošto će oni dati nulti doprinos posle integracije. Ako ovo uradimo dobijamo

$$\begin{aligned}
& (d-2)\ell\gamma^\mu\ell + 2A\gamma^\mu B - (4-d)b\gamma^\mu A + \\
& + 4im_0(A^\mu + B^\mu) - (4-d)im_0(B\gamma^\mu + \\
& + \gamma^\mu A) + m_0^2(2-d)\gamma^\mu .
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Kao što znamo, pod integralom ćemo moći da zamenimo  $\ell^\mu\ell^\nu$  za  $1/d\ell^2\eta^{\mu\nu}$ . Ako ovo uradimo, brojilac efektivno postaje

$$-\frac{(d-2)^2}{d}\ell^2\gamma^\mu + C^\mu , \tag{11.16}$$

gde  $C$  ne zavisi od  $\ell$ . Jednostavan račun daje

$$\begin{aligned}
C^\mu & = 2A\gamma^\mu B - (4-d)B\gamma^\mu A + 4im_0(A^\mu + B^\mu) - \\
& - (4-d)im_0(B\gamma^\mu + \gamma^\mu A) + m_0^2(2-d)\gamma^\mu .
\end{aligned} \tag{11.17}$$



Ovaj izraz se dalje može pojednostaviti. Da bismo to uradili iskoristimo

$$\begin{aligned}
\cancel{A} \gamma^\mu \cancel{B} &= A_\sigma B_\tau (\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\tau) = \\
&= A_\sigma B_\tau (2\eta^{\sigma\mu} \gamma^\tau - \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\tau) = \\
&= A_\sigma B_\tau (2\eta^{\sigma\mu} \gamma^\tau - 2\eta^{\sigma\tau} \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\tau \gamma^\sigma) = \\
&= A_\sigma B_\tau (2\eta^{\sigma\mu} \gamma^\tau - 2\eta^{\sigma\tau} \gamma^\mu + 2\eta^{\mu\tau} \gamma^\sigma - \gamma^\tau \gamma^\mu \gamma^\sigma) = \\
&= 2a^\mu \cancel{B} - 2a \cdot B \gamma^\mu + 2B^\mu \cancel{A} - \cancel{B} \gamma^\mu \cancel{A} , \tag{11.18}
\end{aligned}$$

kao i

$$\cancel{B} \gamma^\mu = B_\sigma \gamma^\sigma \gamma^\mu = B_\sigma (2\eta^{\sigma\mu} - \gamma^\mu \gamma^\sigma) = 2B^\mu - \gamma^\mu \cancel{B} . \tag{11.19}$$

Na osnovu ovoga dobijamo

$$\begin{aligned}
C^\mu &= 4A^\mu \cancel{B} - 4A \cdot B \gamma^\mu + 4B^\mu \cancel{A} + (d-6) \cancel{B} \gamma^\mu \cancel{A} + \\
&\quad + 4i m_0 (A^\mu + B^\mu) - (4-d) i m_0 (2B^\mu + \gamma^\mu (\cancel{A} - \cancel{B})) + \\
&\quad + m_0^2 (2-d) \gamma^\mu . \tag{11.20}
\end{aligned}$$

Na kraju, posle svih pojednostavljenja, amplituda (11.1) postaje

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^\mu(p', p) &= \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \cdot \\
&\quad \cdot \left( -2ie_0^2 \frac{(d-2)^2}{d} \gamma^\mu \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} + \right. \\
&\quad \left. + 2ie_0^2 C^\mu \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \right) . \tag{11.21}
\end{aligned}$$

Kao što vidimo,  $i\varepsilon$  preskripcija radi svoj posao, tj. omogućava nam Wick rotaciju, odnosno prelazak na Euklidske integrale. Koristeći integralne formule iz prethodne lekcije dobijamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} &= i \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^3} = \\
&= i \frac{d}{2} (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(3)} \Delta^{d/2-2} = \\
&= i \frac{d}{4} (4\pi)^{-d/2} \Gamma(2-d/2) \Delta^{d/2-2} , \tag{11.22}
\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} &= -i \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^3} = \\
&= -i (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(3-d/2)}{\Gamma(3)} \Delta^{d/2-3} = \\
&= -\frac{i}{2} (4\pi)^{-d/2} \Gamma(3-d/2) \Delta^{d/2-3} . \tag{11.23}
\end{aligned}$$

Stavimo sad  $d = 4 - \epsilon$ . Amplituda koju smo računali sad postaje

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) &= \frac{e_0^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \cdot \\ &\cdot \left( \gamma^\mu (2 - 2\epsilon) (4\pi)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \Delta^{-\epsilon/2} + C^\mu \Delta^{-1} \right). \end{aligned} \quad (11.24)$$

Koristeći  $\Gamma(\epsilon/2) = 2/\epsilon - \gamma + \dots$ , kao i  $X^{\epsilon/2} = e^{\epsilon/2 \ln X} = 1 + \epsilon/2 \ln X + \dots$ , gornji izraz daje

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) &= \frac{e_0^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{4}{\epsilon} \gamma^\mu - 2(2 + \gamma + \ln(\Delta/2\pi)) \gamma^\mu + C^\mu \Delta^{-1} \right). \end{aligned} \quad (11.25)$$

Iz gornjeg izraza vidimo da je UV divergentni deo proporcionalan sa  $\gamma^\mu$ , te da se ova divergencija može apsorbovati u renormalizaciju golog verteksa, odnosno golog naelektrisanja. Ostatak amplitude je UV konačan. Teorije sa bezmasenim česticama, kao što je elektrodinamika, pate od jedne druge vrste divergencija — od divergencija koji nastaju pri niskim energijama, tzv. IR divergencija. Mi se nećemo baviti IR divergencijama<sup>2</sup>.

Koristeći gornju formulu dobijamo da je za  $p = p' = 0$  verteksna funkcija jednaka

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(0, 0) &= \frac{e_0^2}{(4\pi)^2} \gamma^\mu \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{4}{\epsilon} - 4 - 2\gamma - 2 \ln \left( \frac{(1-z)m_0^2}{2\pi} \right) - \frac{1}{1-z} \right). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Poslednji član je IR divergentan. Na samom kraju, kao komenatar, primetimo da u gornjim izrazima imamo logaritme dimenzionih veličina. Ovaj problem se rešava na jednostavan način. U Feynmanovim pravilima treba zameniti  $e_0 \rightarrow e_0 \mu^{2-d/2}$  gde je  $\mu$  nova, arbitrarna masena skala. Ovakva zamena čini da konstanta interakcije ima ispravne dimenzije i van  $d = 4$ , što nam je potrebno kad koristimo dimenzionu regularizaciju. Ovakvom zamenom svi logaritmi deluju na bezdimenzione veličine. Kao što vidimo, naš krajnji rezultat sad zavisi od jedne arbitrarne masene skale. Ovim ćemo se detaljnije baviti u predmetu Kvantna teorija polja 2 — pri razmatranju renormalizacione grupe. Za sada je dovoljno reći da skalu  $\mu$  treba birati tako da odgovara karakterističnoj energiji na kojoj se posmatrani proces događa.

<sup>2</sup>Amplitude u elektrodinamici su IR divergentne zbog postojanja izrazito niskoenergetskih, tzv. ‘mekanih’, fotona. Mekani fotoni nisu opservabilni (svaka aparatura ima neku donju granicu energije koju može da detektuje). Ispostavlja se da se IR divergentni doprinosi svih dijagrama sa dodatnim spoljnim mekanim fotonima krate. Elektrodinamika je dakle ne samo UV, već i IR konačna.