KLASIČNA REŠENJA U NEKOMUTATIVNOJ ELEKTRODINAMICI

A. BALAŽ, M. BURIĆ * *i V. RADOVANOVIĆ* *

Institut za fiziku, Beograd, Srbija i Crna Gora
**Fizički fakultet, Beograd, Srbija i Crna Gora*
[antun, majab, rvoja]@phy.bg.ac.yu

SAŽETAK

U ovom radu izvedene su jednačine za prve popravke na rešenja klasične elektrodinamike koje se pojavljuju pri prelasku na nekomutativnu elektrodinamiku. Zatim su ove jednačine rešene u važnim slučajevima ravnih talasa i Kulonovog potencijala, odnosno izračunate su odgovarajuće popravke. Na kraju, na osnovu rezultata skorašnjih eksperimenata data je procena za vrednost parametra nekomutativnosti $\theta \leq (10\,\mathrm{TeV})^{-2} \sim (10^{-20}\,\mathrm{m})^2$.

Ključne reči: Nekomutativnost, Kvantna teorija polja, Klasična rešenja

1. Uvod

Postoji mnogo konceptualnih i teorijskih razloga za istraživanje nekomutativnosti prostora, a ovde ćemo pomenuti jedan eksperimentalni. Paradoks kosmičkih zraka, odnosno detekcija protona (AGASA eksperiment) i fotona ultravisokih energija sugeriše da u ovom domenu energija disperziona relacija za slobodne čestice treba da se modifikuje. Po specijalnoj teoriji relativnosti, foton sa energijom višom od energije praga, $E_{pr} = m_e^2 c^4/\varepsilon$, raspada se u sudaru sa pozadinskim zračenjem na elektronsko-pozitronski par[1]. Zbog toga je pojavljivanje multi-TeV fotona u spektru blazara MK501 zagonetka. Slično je sa visokoenergetskim protonima u kosmičkom zračenju (koji u interakciji sa pozadinskim fotonima treba da se raspadaju na π-mezone). Promena relacije između energije i impulsa, odnosno forme zakona održanja, u principu bi mogla da poveća energiju praga E_{pr} i time objasni ovakve eksperimentalne rezultate [1]. Disperzione relacije visokoenergetskih čestica proveravaće se u nekoliko budućih eksperimenata u svemiru (GLAST teleskop, AMS spektrometar); paralelno, veoma su aktuelna istraživanja odgovarajućih teorijskih modela.

Sa stanovišta kvantne gravitacije struktura prostora (nekomutiranje koordinata, na primer) značajno se menja tek na rastojanjima reda Plankove dužine, $l_P = 1.6 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}$. Ova promena automatski znači promenu odnosa između impulsa na energijama većim od Plankove. Različite nekomutativne teorije imaju različite mehanizme (a i odgovore) za modifikaciju disperzione relacije: na nivou geometrije, na nivou simetrija (zakona održanja) ili na nivou konkretnih modela polja. Mi ćemo ovde opisati jednu od formulacija nekomutativne klasične elektrodinamike i pokazati neke njene posledice u slučaju kada je parametar nekomutativnosti mali.

[1]Ovde je m_e masa elektrona, a ε energija mekih mikrotalasnih fotona pozadinskog zračenja.

2. Nekomutativna elektrodinamika

Nekomutativna elektrodinamika data je lagranžijanom

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu}\,, \tag{1}$$

gde je $\hat{F}_{\mu\nu}$ jačina polja koje odgovara nekomutativnoj $U(1)$ simetriji

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i(\hat{A}_\mu \star \hat{A}_\nu - \hat{A}_\mu \star \hat{A}_\nu)\,, \tag{2}$$

a $\hat{A}_\mu$ su potencijali polja; sve veličine su funkcije koordinata na prostoru Minkovskog. Nekomutativnost je realizovana preko nekomutativnog ("star") proizvoda:

$$f \star g = e^{\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}} f(x)g(y)|_{y\to x}\,.$$

Očigledno, pošto važi $x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = \theta^{\mu\nu}$, parametar $\theta^{\mu\nu}$ predstavlja meru nekomutativnosti koordinata. U najjednostavnijem slučaju je $\theta^{\mu\nu} = \text{const}$. Ako pretpostavimo da je $\theta^{\mu\nu}$ malo, sva polja približno su jednaka odgovarajućim komutativnim poljima, odnosno [2, 3] mogu se razviti u red po $\theta^{\mu\nu}$. U prvom redu je

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\,\theta^{\alpha\beta} A_\alpha\,(\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu})\,, \tag{3}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} - \theta^{\alpha\beta} A_\alpha\,\partial_\beta F_{\mu\nu}\,. \tag{4}$$

U istom redu izraz za lagranžijan je

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} F^{\mu\nu}. \tag{5}$$

Efekti nekomutativnosti opisani su u nelinearnim članovima u lagranžijanu. Jednačine kretanja koje slede iz lagranžijana (5) su meksvelovskog oblika[2],

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} - \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0\,, \tag{6}$$

gde su komponente električnog i magnetnog polja definisane na uobičajeni način, $E^i = F^{i0}$ i $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{jk}$. Iz lagranžijana (5) slede konstitutivne relacije

$$\mathbf{D} = (1 - \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{E} + (\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{B} + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\,\boldsymbol{\theta}\,, \quad \mathbf{H} = (1 - \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B} - (\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E} + \frac{1}{2}\,(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\,\boldsymbol{\theta}\,. \tag{7}$$

Ovde smo pretpostavili da su samo prostorne komponente tenzora $\theta^{\alpha\beta}$ nenulte, a vektor $\boldsymbol{\theta}$ je uveden relacijom $\boldsymbol{\theta}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\theta_{jk}$. Lako se vidi da se za $\boldsymbol{\theta} = 0$ dobija $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ i $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, tj. jednačine (6) se svode na klasične Meksvelove jednačine u vakuumu.

Pošto su lagranžijan i jednačine kretanja linearizovani po malom parametru $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$, i rešenja ćemo tražiti u prvom redu po θ. Označimo sa $\mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0$ i $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}_0$ rešenje vakuumskih Meksvelovih jednačina, a sa $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ i $\mathbf{h}$ linearne popravke,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \theta\,\mathbf{e}\,, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \theta\,\mathbf{b}\,, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E}_0 + \theta\,\mathbf{d}\,, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}_0 + \theta\,\mathbf{h}\,. \tag{8}$$

O pravcima vektora $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ i $\mathbf{h}$ ne pretpostavljamo ništa unapred. Ove popravke zadovoljavaju jednačine

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{b} + \operatorname{rot}\mathbf{e} = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{b} = 0\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{d} - \operatorname{rot}\mathbf{h} = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{d} = 0\,. \tag{10}$$

[2] Koristimo prirodni sistem jedinica, $\hbar = c = 1$.

Iz jednačina (6) i (9-10) vidimo da se mogu uvesti potencijali elektromagnetnog polja

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \theta\,\mathbf{a}, \quad \phi = \phi_0 + \theta\,\varphi\,, \tag{11}$$

tako da važi

$$\mathbf{e} = -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{a}, \quad \mathbf{b} = \mathrm{rot}\,\mathbf{a}\,. \tag{12}$$

Iz konstitutivnih jednačina (7) dobijamo vektore **d** i **h**,

$$\begin{aligned} \theta\,\mathbf{d} &= \theta\,\mathbf{e} - (\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{E}_0 + (\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{B}_0 + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\,\boldsymbol{\theta}\,, & (13)\\ \theta\,\mathbf{h} &= \theta\,\mathbf{b} - (\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{B}_0 - (\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{E}_0 + \frac{1}{2}(E_0^2 - B_0^2)\,\boldsymbol{\theta}\,. & (14)\end{aligned}$$

Ako na potencijale nametnemo Lorencov kalibracioni uslov $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, iz jednačine (10) za korekcije potencijala dobijamo jednačine

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi\right) &= \mathrm{div}\Big[(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{E}_0 - (\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{B}_0 - (\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{B}_0)\,\boldsymbol{\theta}\Big]\,, & (15)\\ \theta\left(\frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{a}\right) &= -\frac{\partial}{\partial t}\Big[(\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{E}_0 - (\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{B}_0 - (\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{B}_0)\,\boldsymbol{\theta}\Big] + \\ &+ \mathrm{rot}\Big[(\mathbf{B}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{B}_0 + (\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{E}_0 - \frac{1}{2}\,(\mathbf{E}_0^2 - \mathbf{B}_0^2)\,\boldsymbol{\theta}\Big]\,. & (16)\end{aligned}$$

Obe jednačine imaju oblik nehomogene Dalamberove jednačine sa poznatim izvorom. One se mogu rešiti korišćenjem odgovarajućeg propagatora za zadate granične uslove; time će θ-linearna korekcija za proizvoljnu konfiguraciju polja biti određena.

3. Klasična rešenja: ravni talasi i Kulonov potencijal

Sada ćemo dobijene formule da primenimo na dva fizički interesantna primera: na prostiranje elektromagnetnih talasa i na Kulonov potencijal. Jasno je da ravni talasi zapravo nisu egzaktna rešenja jednačina kretanja, jer su one nelinearne u nekomutativnoj elektrodinamici. Međutim, u slučaju slabe nekomutativnosti (mala vrednost parametra θ) oni se mogu uzeti za približna rešenja. Pošto su korekcije kvadratne po poljima, one su viši harmonici. To znači da će u slučaju prostiranja kroz vakuum talas zadržati istu disperzionu relaciju, ali neće više biti monohromatski. Ako se, međutim, talas kreće kroz postojeću statičku konfiguraciju, na primer kroz konstantno magnetno polje, onda se odnos između talasnog vektora i frekvencije menja, tj. imamo promenu disperzione relacije. Pretpostavimo da su polja oblika

$$\mathbf{E} = \vec{\mathcal{E}}\,e^{i(\kappa\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\,, \quad \mathbf{B} = \vec{\mathcal{B}}\,e^{i(\kappa\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \vec{\beta}\,,$$

gde je nekomutativna popravka data odstupanjem intenziteta talasnog vektora $\kappa\mathbf{k} = \vec{\kappa}k$ od ω ($k = |\mathbf{k}| = \omega$ u komutativnom slučaju), tj. intenziteta κ od jedinice. Komutativno polje koje korigujemo predstavlja ravan elektromagnetni talas u homogenom magnetnom polju,

$$\mathbf{E}_0 = \vec{\mathcal{E}}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}\,, \quad \mathbf{B}_0 = \vec{\mathcal{B}}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \vec{\beta}\,.$$

Da bismo odredili korekciju talasnog vektora, ne posmatramo direktno jednačinu (16), nego njen rotor, tj. odgovarajuću talasnu jednačinu za magnetno polje. Pri tome izdvajamo samo Furijeovu komponentu za frekvenciju ω. Ona ima oblik

$$\begin{aligned} (\kappa^2 - 1)\vec{\mathcal{B}} &= -\vec{\kappa}\times\Big[(\vec{\beta}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\vec{\mathcal{E}} - (\vec{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\vec{\beta} - (\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\beta})\,\boldsymbol{\theta}\Big] \\ &= -\vec{\kappa}\times\Big[\vec{\kappa}\times\Big((\vec{\beta}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\vec{\mathcal{B}} + (\vec{\mathcal{B}}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\vec{\beta} + (\vec{\beta}\cdot\vec{\mathcal{B}})\,\boldsymbol{\theta}\Big)\Big]\,. \qquad (17)\end{aligned}$$

U nultom redu, odnosno u izrazima linearnim po θ, $\vec{\mathcal{B}}$ se može zameniti sa $\mathbf{k} \times \vec{\mathcal{E}}$. Transformisanjem jednačine (17) dobija se

$$(\kappa^2 - 1)\,\mathcal{E}^2 = 2\,(\vec{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\theta})\,(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\beta}) + 2\left[(\kappa \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \boldsymbol{\theta}\right]\left[(\kappa \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \vec{\beta}\right], \tag{18}$$

što je korigovana disperziona relacija za fotone. Ova jednačina može se napisati i u obliku [2]

$$\kappa^2 = 1 + 2\,\boldsymbol{\theta}_T \cdot \vec{\beta}_T\,,$$

gde su $\boldsymbol{\theta}_T$ i $\vec{\beta}_T$ projekcije vektora $\boldsymbol{\theta}$ i $\vec{\beta}$ na ravan normalnu na pravac prostiranja talasa. Ono što se odmah vidi je da se u slučaju ovako realizovane nekomutativnosti disperziona relacija modifikuje za sve vrednosti energije i to u zavisnosti od spoljašnjeg polja, kao pri prostiranju svetlosti kroz materijalnu sredinu [2, 3].

Kao drugi važan primer za promene koje u rešenjima jednačina klasične elektrodinamike uvodi nekomutativnost, izračunaćemo kako se menja električno i magnetno polje tačkastog naelektrisanja q. Pretpostavićemo da je ova popravka statička. Vrednosti osnovnih komutativnih polja su $\mathbf{E}_0 = -\frac{q}{r^2}\vec{e_r}$ i $\mathbf{B}_0 = 0$; koristićemo sferne koordinate r, Θ, Φ, a vektor $\boldsymbol{\theta}$ ćemo usmeriti duž z–ose, $\boldsymbol{\theta} = \theta\,\vec{e_z}$. Jednačine (9-10) za korekcije glase

$$\operatorname{div}\mathbf{e} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{e} = 0\,, \tag{19}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}(\theta\,\mathbf{b}) = \operatorname{rot}\left((\mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\theta})\,\mathbf{B}_0 - \frac{1}{2}\,\mathbf{E}^2\,\boldsymbol{\theta}\right). \tag{20}$$

Njihovo rešenje

$$\mathbf{e} = \operatorname{grad} f\,, \tag{21}$$

$$\mathbf{b} = \frac{q^2}{2\,r^4}\,(\cos\Theta\,\vec{e_r} + \sin\Theta\,\vec{e_\Theta}) + \operatorname{grad} g\,, \tag{22}$$

je određeno do na proizvoljne harmonijske funkcije f i g ($\Delta f = 0$, $\Delta g = 0$); u skladu sa graničnim uslovima, možemo da izaberemo $f = g = 0$. Vidimo da ovde nekomutativnost prostora izaziva postojanje efektivnog magnetnog polja. U radu [4] izračunata je korekcija spektra vodonikovog atoma usled nekomutativnosti koordinata elektrona, ali bez odgovarajuće korekcije elektromagnetnog polja. Rezultat dobijen za perturbaciju energije je $V = \frac{q^2}{4\,r^3}\,\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\theta}$ i on odgovara efektivnom magnetnom polju (doduše, sa nešto drugačijom prostornom zavisnošću) koje interaguje samo sa orbitalnim ugaonim momentom. U istom redu veličine zapravo treba dodati i član $V' = -\vec{\mu} \cdot \theta\,\mathbf{b} = \mu_B(\mathbf{L} + 2\mathbf{s}) \cdot \theta\,\mathbf{b}$.

Na osnovu ovih efekata i činjenice da konstantna nekomutativnost do sada nije pronađena u eksperimentu, može se izvršiti procena veličine parametra θ na $\theta \leq (10TeV)^{-2} \sim (10^{-20}m)^2$.

Literatura

[1] G. Amelino-Camelia, "Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale, Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002) 35.

[2] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi, and A. P. Polychronakos, Testing Non-commutative QED, Constructing Non-commutative MHD, Phys. Lett. B **517** (2001) 450.

[3] R. G. Cai, Superluminal Noncommutative Photons, Phys. Lett. B **517** (2001) 457.

[4] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2716.