

Jako korelisani elektronski sistemi

Milica V. Milovanović

October 20, 2008

Ove beleške su nastale na osnovu predavanja u školskoj 2007/2008 godini na smeru Fizika kondenzovane materije Doktorskih studija Fizičkog fakulteta.

Zahvaljujem se kolegama Darku Tanaskoviću, Antunu Balažu i Dejanu Djokiću na aktivnom učešću i doprinosu predavanjima i studentima Ivani Vidanović i Zlatku Papiću na vrednom praćenju i učešću.

Posebno se zahvaljujem Dejanu Djokiću za tehničku pomoć pri pisanju ovih beležaka.

Beograd
20. 10. 2008.

Milica Milovanović
viši naučni saradnik
Institut za Fiziku

Sadržaj

1	Uvod: Jako korelisani elektroni	7
2	Fizika lokalnih momenata	11
3	Luttinger tečnost	19
4	Frakcioni kvantni Hall-ov efekat	29
5	Kvantni antiferomagneti	41
6	Hubbard-ov model	51

Poglavlje 1

Uvod: Jako korelisani elektroni

Pod jako korelisanim elektronskim sistemima podrazumevaćemo one čija fizika se ne može svesti na fiziku takozvane fermi tečnosti koja čini generalizaciju slobodnog elektronskog gasa. Do koncepta fermi tečnosti možemo doći i preko perturbacionih razmatranja interagujućeg elektronskog gasa, ali takav prilaz je nemoguć u razmatranju jako korelisanih elektrona. Ne samo da je interakcija jaka nego je i prostor stanja interagujućih čestica najčešće makroskopski degenerisan i ne dozvoljava primenu teorije perturbacije. U sledećim paragrafima podsetićemo se osnovnih karakteristika fermi tečnosti i dati dva osnovna primera jako korelisanih elektronskih sistema: (1) Hubbard-ov model i (2) model elektrona u frakcionom kvantnom Hall-ovom efektu.

Koncept fermi tečnosti se može uvesti načinom njenog teoretskog zasni- vanja. Pretpostavka postojanja jedne takve tečnosti je da se ona može dobiti adijabatskim dodavanjem interakcija slobodnom elektronskom gasu, bez faznih prelaza ili stanja narušene simetrije, koje imaju za rezultat jedan na jedan ko- respondenciju stanja neinteragujućeg i interagujućeg sistema. Naizgled time se nismo udaljili od rasporeda stanja neinteragujućeg sistema (fermi nivo ostaje isti) ali postoje bitne razlike (1) život stanja novih kvazičestica (τ) je konačan ali teži beskonačnosti što smo bliži fermi nivou i (2) promena energije sistema pri promeni broja kvazičestica je data izrazom:

$$\delta E = \sum_{\vec{k}} \epsilon_k^0 \delta n(\vec{k}) + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} f(\vec{k}, \vec{k}') \delta n(\vec{k}) \delta n(\vec{k}') \quad (1.1)$$

gde $\epsilon_k^0 = \frac{k_F |\vec{k} - \vec{k}_F|}{m^*}$. Podrazumeva da su promene blizu fermi nivoa i uvodi se nova efektivna masa m^* . Drugi član u jednačini (1.1) ne bi postojao u slobodnom gasu i masa bi odgovarala masi elektrona u kristalnoj rešetci. Interakcija $f(\vec{k}, \vec{k}')$ se svodi na niz parametara u razvoju po Legendre polinomima kad pretpostavimo $|\vec{k}| = |\vec{k}'| = k_F$ i početni - mali broj parametara je dovoljan za veoma dobar

fenomenološki opis eksperimentalno merenih veličina. One su date izrazima koje znamo iz opisa slobodnog elektronskog gasa u kojima figurišu renormalizovane - interakcijom modifikovane veličine. Na primer, specifična toplota postaje $c_v = \frac{1}{3}m^*k_Fk_B^2T$.

Mikroskopski može se izvesti da Green-ova funkcija kvazičestica je data u obliku

$$G^{qp}(\vec{k}, w) \approx \frac{Z}{w - \epsilon_k^0 + i \operatorname{sgn}(w) \tau^{-1}} \quad (1.2)$$

gde $\frac{1}{\tau} \sim (k_B T)^2 + (\epsilon_k^0)^2$ ako je $w \ll E_F$ (energija fermi nivoa) i $|\vec{k} - \vec{k}_F| \ll k_F$. Reziduum Z u opštem slučaju je manji od jedan, $Z < 1$ i odgovara skoku naseljenosti na fermi nivou.

Hubbard-ov model

Hubbard-ov model [1] je definisan na uobičajenoj kristalnoj rešetci sistema elektrona gde svakom čvoru prisajedinjujemo stanje elektrona opisano Wannier orbitalom. Elektroni mogu da se kreću po rešetci i verovatnoća prelaska na susedni čvor i orbitalu data je sa t - transfer integralom ili "hopping" parametrom. Dakle hamiltonijan kinetičkog člana je

$$H_k = \sum_{l, l', \sigma} t c_{l\sigma}^\dagger c_{l'\sigma} - \mu \sum_{l\sigma} c_{l\sigma}^\dagger c_{l\sigma}, \quad (1.3)$$

gde su $c_{l\sigma}^\dagger, c_{l\sigma}$ kreacioni i anihilacioni operatori druge kvantizacije za čvor l i spin σ i sumiramo po najbližim susedima l i l' .

Na svakom čvoru postoji odbijanje elektrona različitog spina, dakle najmanje dometna interakcija elektrona koja može da postoji. Ona je opisana sa

$$H_u = U \sum_l n_{l\uparrow} n_{l\downarrow} \quad (1.4)$$

gde je $n_{l\sigma} = c_{l\sigma}^\dagger c_{l\sigma}$ elektronski broj - naseljenost na čvoru l sa spinom σ .

Kinetički član ima težnju da delokalizuje elektrone, njegova rešenja su ravni talasi. Interakcioni član ne dozvoljava takva rešenja u kome bi se spin svodio na prosto umnožavanje - degeneraciju. Time interakcioni član dovodi do pojave lokalizacije i magnetizacije na čvorovima.

Kada je odnos broja elektrona i broja čvorova - punjenje manje od (ili jednako) $\frac{1}{2}$ i $U \gg t$ problem je nerešiv metodama perturbacionog računa. Potprostor stanja koji se izdvaja odbacivanjem takozvanih duplo naseljenih orbitala je ogroman, i moramo tražiti druge aproksimativne metode i modele.

Frakcioni kvantni Hall-ov efekat

Frakcioni kvantni Hall-ov efekat je još jedan izrazit primer jako korelisanih elektronskih sistema u dve dimenzije. U kvantnom Hall-ovom efektu uopšte elektroni su u jakom magnetnom polju koje dovodi do kvantizacije elektronskih

energetskih nivoa. Kvantizacija je u Landau-ove nivoe za koje

$$E_n = \frac{e\hbar B}{m} \left(n + \frac{1}{2}\right) \equiv \omega_o \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (1.5)$$

gde n je ceo broj, B magnetno polje, m - efektivna masa elektrona a ω_o karakteristična energija razmaka nivoa - ciklotronska energija. Svaki Landau-ov nivo ima degeneraciju $\frac{\Phi}{\Phi_0}$, fluks u jedinicama kvantna fluksa $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$. Zato za sistem elektrona uvodimo odnos broja čestica i degeneracije Landau-ovog nivoa tzv. faktor punjenja,

$$\nu = \frac{n}{B\left(\frac{e}{hc}\right)}. \quad (1.6)$$

Na primer za $\nu = \frac{1}{3}$, punjenje na kojem se, kad se interakcija uzme u obzir, elektroni udružuju u jedno veoma korelisano tzv. Laughlin-ovo stanje, postoje 3 stanja najnižeg Landau-ovog nivoa po elektronu. Ova makroskopska degeneracija neinteragujućeg osnovnog stanja znači da mi čak ne možemo da započnemo perturbativno razmatranje interakcija i neuredjenosti.

Razmatrnja jako korelisanih sistema zahtevaju aproksimativne i nestandardne - neperturbacione metode. Dosta uvida u fiziku tj. kakva rešenja su moguća, daju nam niskodimenzioni modeli koji su u nekim slučajevima egzaktno rešivi. Zato ćemo se baviti i jednodimenzionim i kvazijednodimenzionim problemima: (1) interagujućim elektronima u jednoj dimenziji - Luttinger-ova tečnost, (2) lancima spina u jednoj dimenziji uključujući Haldane-ov procep sistemima, (3) lokalnim magnetnim momentima u prisustvu fermi tečnosti - Anderson-ov model nečistoće i Kondo model.

Poglavlje 2

Fizika lokalnih momenata

Eksperimenti putem elektronske spinske rezonance (ESR) i nuklearne magnetne rezonance (NMR) oko 1960 godine na nemagnetnim metalima (Cu, Ag, Au)[2] ukazali su na lokalne magnetne momente koji bi mogli da potiču samo od nečistoća - malog prisustva Mn, Fe, ili drugih elemenata sličnih gvoždju. Joni nečistoća su uvek imali praznu unutrašnju orbitalu. To je navelo Anderson-a [3] da fiziku stvaranja magnetnih momenata opiše modelnim hamiltonijanom koji sadrži osnovne činioce: (1) Bloch-ova stanja koja čine metal kao medijum, u kome se lokalni momenti pojavljuju, (2) lokalizovanu unutrašnju orbitalu i (3) hibridizaciju medju njima:

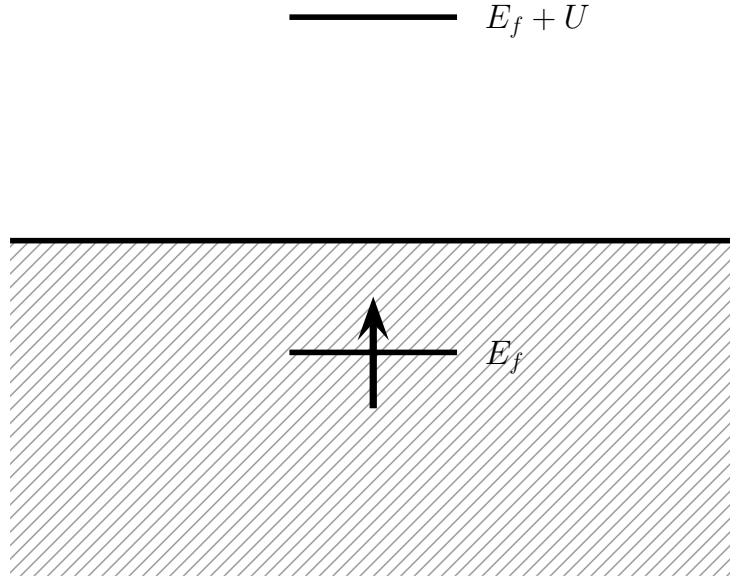
$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}\sigma}^\dagger a_{\vec{k}\sigma} \\ &+ \sum_{\sigma} E_f f_{\sigma}^\dagger f_{\sigma} + U n_{f\uparrow} n_{f\downarrow} \\ &+ \sum_{\vec{k}\sigma} V_{\vec{k}f} (c_{\vec{k}\sigma}^\dagger f_{\sigma} + V_{\vec{k}f}^* f_{\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

U hamiltonijanu $c_{\vec{k}\sigma}^\dagger$ kreiraju Bloch-ova stanja, f_{σ}^\dagger kreira elektron spina σ na nečistoći f , i $n_{f\sigma} = f_{\sigma}^\dagger f_{\sigma}$ je operator broja čestica na lokalizovanoj orbitali - nečistoći. Takodje $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$, tj. energija Bloch-ovih stanja se meri od fermi energije, $E_f < 0$ je energija unutrašnje orbitale nečistoće,

$$U = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 |\Phi_f(\vec{r}_1)|^2 \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} |\Phi_f(\vec{r}_2)|^2 \quad (2.2)$$

je odbojna Coulomb-ova energija ako se dva elektrona (suprotnog spina) nadju na orbitali f , i $V_{\vec{k}f}$ je hibridizacija lokalizovanog i delokalizovanih stanja.

Što je veća energija odbijanja U to je verovatnoća stvaranja lokalnog momenta veća jer ona ne dozvoljava dolazak elektrona suprotnog spina na već popunjenu orbitalu. Slučaj kada je $E_f + U > 0$ tj. veće od fermi nivoa

Slika 2.1: Stvaranje lokalnog momenta na f nivou

očekujemo dovodi do pojave lokalnih momenata (Slika 1). Pretpostavka je da je E_f blizu fermi nivou. Ukoliko je hibridizacija velika (uslov ćemo precizirati kasnije) ona može dovesti do delokalizovanja stanja nečistoće koji tada može obuhvatiti stanja ispod (i iznad) fermi nivoua i time biti delimično naseljen u slučaju oba spina što neće voditi do pojave lokalnog momenta.

Rešenje u okviru aproksimacije usrednjenog polja Anderson-ovog modela daćemo u funkcionalnom zapisu [4]. U tom zapisu klasične jednačine za stacionarno (koje ne zavisi od vremena) polje u aproksimaciji stacionarne faze (ili naj strmijeg spusta (steepest decent)[5]) svode se na Hartree-Fock rešenje i kriterijum za stvaranje lokalnih momenata koji je dao Anderson [3].

Počinjemo od funkcionalnog zapisa lagranžijana na kome smo uradili i Hubbard - Stratonovich transformaciju. Transformacija se svodi na uvođenje novog bozonskog polja $\phi(t)$ čijom integracijom u transformisanom lagranžijanu vraćamo se na početni lagranžijan.

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}\sigma}^* (\partial_\tau - \mu + \epsilon_{\vec{k}}) c_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\sigma} f_{\sigma}^* (\partial_\tau + E_f) f_{\sigma} \\
 & + \frac{U}{4} \phi^2(\tau) + \frac{U}{2} \phi(\tau) (f_{\uparrow}^* f_{\uparrow} - f_{\downarrow}^* f_{\downarrow}) \\
 & - \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\vec{k}\sigma} V_{\vec{k}f} (c_{\vec{k}\sigma}^* f_{\sigma} + V_{\vec{k}f}^* f_{\sigma}^* c_{\vec{k}\sigma}) \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Kao što možemo videti iz L uvedeno polje $\phi(\tau)$ ima značenje spinske popunjenosti f nivoua ili spinskih fluktuacija na f nivou. Tražeći efektivnu teoriju f

nivoa prointegriramo polja $c_{k\sigma}^*$ i $c_{k\sigma}$:

$$A_{eff}(\phi, f^*, f) = \sum_{iw_n, \sigma} (-iw_n + E_f + \Sigma_f(iw_n)) f_\sigma^*(iw_n) f_\sigma(iw_n) + \frac{U}{2} \int d\tau \sum_\sigma \sigma \phi(\tau) f_\sigma^*(\tau) f_\sigma(\tau) + \frac{U}{4} \int d\tau \phi^2(\tau) \quad (2.4)$$

gde

$$\Sigma_f(iw_n) = \frac{1}{N_0} \sum_{\vec{k}} \frac{|V_{\vec{k}}|^2}{iw_n - \xi_{\vec{k}}}, \quad \xi_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}} - \mu. \quad (2.5)$$

Prelazeći na integraciju po energijama u $\Sigma_f(iw_n)$ i ograničavajući se samo na frekvence u blizini fermi nivoa ili mnogo manje od karakteristične širine benda mi aproksimiramo:

$$\Sigma_f(iw_n) = \int d\xi D(\xi) |V_k|^2 \frac{-iw_n - \xi}{w_n^2 + \xi^2} \approx -i\pi D(\epsilon_F) < |V_k|^2 >_{\epsilon_F} \text{sgn} w_n + \text{Re} \Sigma_f(iw_n) \quad (2.6)$$

gde $D(\epsilon_F)$ je gustina stanja delokalizovanih elektrona na fermi nivou. Uvodimo oznaku $\Delta_0 = \pi D(\epsilon_F) < |V_k|^2 >_{\epsilon_F}$.

U aproksimaciji stacionarne faze mi prvo tražimo efektivno dejstvo za statičko polje $\phi(\tau) = \phi$ prointegrirajući i f elektrone:

$$A_{eff}(\phi) = - \sum_{iw_n, \sigma} \ln(-iw_n + E_f - i\Delta_0 \text{sgn} w_n + \frac{U}{2} \sigma \phi) + \frac{U}{4} \beta \phi^2, \quad (2.7)$$

gde smo redefinisali E_f apsorbujući realan deo sopstvene energije, $\text{Re} \Sigma_f(iw_n)$, f elektrona. Aproksimacija stacionarne faze se svodi na rešavanje jednačine $\beta^{-1} \frac{\partial A_{eff}(\phi)}{\partial \phi} = 0$. Sume u jednačini (2.7) radimo u limitu $T \rightarrow 0$ tj. smenom $\frac{1}{\beta} \sum_{iw_n} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2\pi}$. Da bi prepoznali kada polje ϕ može dobiti nenultu vrednost proučavamo razvoj $A_{eff}(\phi)$ oko nule tražeći da drugi izvod u nuli je negativan tj. da je u njoj lokalni maksimum. Tako se može dobiti [4]

$$\frac{d^2 A_{eff}(\phi)}{d\phi^2} = \frac{U}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \frac{\Delta_0 U}{\Delta_0^2 + E_f^2} \right\} \quad (2.8)$$

i uslov negativnosti daje nam Anderson-ov kriterijum. Da bi se lokalni momenat pojavio treba da

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Delta_0 U}{\Delta_0^2 + E_f^2} > 1. \quad (2.9)$$

Uvodeći oznaku $\rho_f(\epsilon_F) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta_0}{\Delta_0^2 + E_f^2}$ ovo se svodi na $\rho_f(\epsilon) U > 1$. $\rho_f(\epsilon)$ je zapravo gustina stanja f elektrona na fermi nivou ($\epsilon_F = 0$) (Zadatak IV(1)) ako zanemarimo šift energije E_f jednak u našim jednačinama $\frac{U}{2} \sigma \phi$ (videti (2.7)).

Anderson-ov kriterijum $\rho_f(\epsilon) U > 1$ je saglasan sa našim očekivanjima da što je U veće a stanje E_f bliže fermi nivou pojava lokalnog momenta je verovatnija.

Ipak rešenje koje se dobija Hartree-Fock prilazom ili metodom usrednjenog polja koju smo opisali važi samo na višim temperaturama. Merenja magnetne susceptibilnosti [6] su pokazala da postoji karakteristična temperatura, T_K - Kondo temperatura, ispod koje susceptibilnost teži konstantnoj vrednosti. Na dosta višim temperaturama od T_K uočava se Kiri ponašanje ili $\frac{1}{T}$ zavisnost susceptibilnosti od temperature koja potiče od lokalnih magnetnih momenata.

Kvantno-mehanički gledano hibridizacija lokalizovanog i delokalizovanih nivoa dovodi do stalnih procesa fluktuacije spina na lokalizovanoj orbitali. Pretstavimo li da se elektron nadje na orbitali f sa spinom gore (odredjenim spinom) termalne fluktuacije, koje dovode do usrednjavanja i brisanja kvantno-mehaničke neodredjenosti, će ga držati dovoljno dugo da ga opažamo kao magnetni moment. Time kao da pratimo proces u malom vremenskom intervalu ili usporenu kvantnu dinamiku. Očekujemo da će ispod neke karakteristične temperature vezane za frekvencu kvantno-mehaničkih fluktuacija opažanje lokalnih momenata nestati.

Da bi shvatili fiziku u $T \rightarrow 0$ limitu i odredili T_K razmatraćemo Anderson-ov model u takozvanom uopštenju velikog N [7]:

$$\begin{aligned}
H = & \sum_{m=1}^N \sum_k (\epsilon_k - \mu) c_{km}^\dagger c_{km} \\
& + E_f \sum_{m=1}^N f_m^\dagger f_m + U \left(\sum_{m=1}^N f_m^+ f_m \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{N_0 N}} \sum_{m=1, k}^N V_k (c_{km}^\dagger f_m + f_m^\dagger c_{km}), \quad (2.10)
\end{aligned}$$

gde $N \gg 1$. Ove uopštenje nije uvek samo matematički uvedeno, ono može da opisuje N degeneraciju spin-orbitnog multipleta unutrašnje orbitale. Prednost velikog N uopštenja je da dobijamo dobro kontrolisani razvoj po $\frac{1}{N}$ oko početnog rešenja usrednjenog polja tj. aproksimacije stacionarne tačke koja je time opravdana. Druga prednost u odnosu na prethodnu aproksimaciju usrednjenog polja (Anderson-ovo rešenje) je da je simetrija spina ($SU(2)$) koja je ovde generalisana na $SU(N)$ simetriju očuvana i očigledna ("manifestna"), dok je u prethodnom rešavanju $SU(2)$ svedena na $U(1)$ (rotacije sa S_z). (Smanjenje simetrije može dovesti do predviđanja pojave lokalnih momenata i kada to nije rešenje problema.)

Pored velikog N uzećemo limit beskonačnog U i odbaciti stanja u kome imamo dva elektrona na orbitali f tj. dozvolićemo samo $N + 1$ stanja:

$$|0\rangle \text{ i } |m\rangle = f_m^\dagger |0\rangle; \quad m = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

Projekciju na ovaj potprostor izvršićemo preko "slave-boson" metoda [8]. Uvodimo jedno bozonsko i N fermionskih polja pridruživanjem,

$$|0\rangle \leftrightarrow b^\dagger |0, 0\rangle$$

$$|m \rangle = f_m^\dagger |0 \rangle \leftrightarrow s_m^\dagger |0, 0 \rangle, \quad (2.12)$$

gde je $|0, 0 \rangle$ jedno vakuumsko stanje bez bozona i fermiona. Moguće je dokazati razmatrajući matricele elemente da je identifikacija:

$$f_m \leftrightarrow s_m b^\dagger \quad f_m^\dagger \leftrightarrow s_m^\dagger b \quad (2.13)$$

u redukovanom prostoru egzaktna. Uslov veze koji smo nametali kao

$$\sum_m f_m^\dagger f_m \leq 1 \quad (2.14)$$

postaje jednakost,

$$b^\dagger b + \sum_m s_m^\dagger s_m = 1. \quad (2.15)$$

Time metod "slave-boson" omogućava uzimanje u obzir veze putem običnih Lagrange umnožaka tj.

$$L = L_0 + \lambda \left(\sum_m s_m^\dagger s_m + b^\dagger b - 1 \right) \quad (2.16)$$

gde je L_0 lagranžijan našeg generalisanog problema bez Coulomb-ovog člana a λ Lagrange-ovo polje [7].

Formalno ćemo uvesti polje b_0 : $b = \sqrt{N} b_0$ čime sugerišemo moguću Boze kondenzaciju koja naravno ne može zbog uslova veze biti makroskopska već samo rešenje $\langle b \rangle \neq 0$. Zato ćemo razmatrati aproksimaciju usrednjenih polja b i λ (nezavisnih od vremena) a prointegraliti fermionska polja. Za efektivnu slobodnu energiju dobijamo:

$$F_{eff}(b_0^*, b_0, \lambda) = -\frac{N}{\beta} \sum \ln \{-i w_n + E_f + \lambda - i |b_0|^2 \Delta_0 \operatorname{sgn} w_n\} + N \lambda (b_0^2 - q) \quad (2.17)$$

gde $q = \frac{1}{N}$. Uobičajenim prelazom sa Matzubara sume na konturnu integraciju duž imaginane ose i zatim deformisanjem konture u dve paralelne linije, ispod i iznad realne ose dobija se slobodna energija kao integral skokova na realnoj osi:

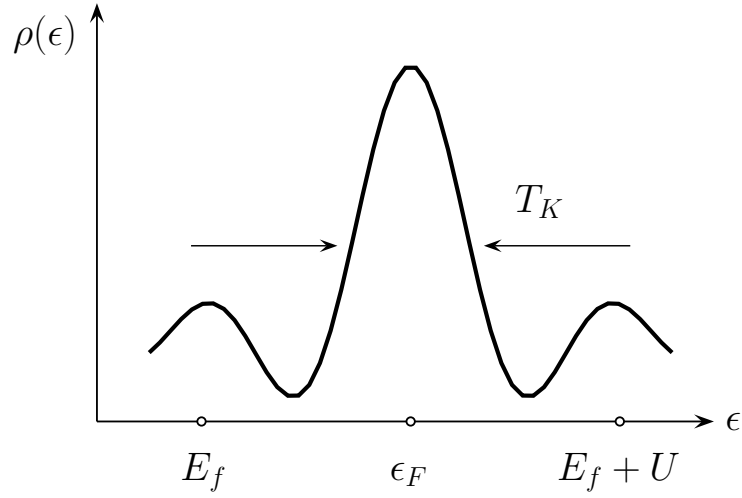
$$F_{eff}(b_0^*, b_0, \lambda) = \frac{N}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \operatorname{Im} \ln G_s(w + i\eta) + N \lambda (|b_0|^2 - q) \quad (2.18)$$

gde

$$G_s(w + i\eta) = \frac{1}{w - E_f - \lambda + i |b_0|^2 \Delta_0} \quad (2.19)$$

Ograničavamo integraciju na širinu benda D i uzimamo $T \rightarrow 0$ limit,

$$E_{0eff} = -\frac{N}{\pi} |b_0|^2 \Delta_0 + \frac{N(E_f + \lambda)}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{|b_0|^2 \Delta_0}{E_f + \lambda} \right) + \frac{N |b_0|^2 \Delta_0}{2\pi} \ln \left\{ \frac{(E_f + \lambda)^2 + (|b_0|^2 \Delta_0)^2}{D^2} \right\} + N \lambda (|b_0|^2 - q). \quad (2.20)$$



Slika 2.2: Jednočestična gustina stanja u Kondo režimu (shematski)

Jednačina veze svodi se na ($\frac{\partial E_{0eff}}{\partial \lambda} = 0$)

$$|b_0|^2 = \frac{1}{\pi} tg^{-1} \left(\frac{E_f + \lambda}{|b_0|^2 \Delta_0} \right) \quad (2.21)$$

gde je uzeto $q = \frac{1}{2}$, dok jednačina za polje b_0 i uslov ekstrema za E_{0eff} ($\frac{\partial E_{0eff}}{\partial |b_0|^2} = 0$)

$$\lambda = \frac{\Delta_0}{2\pi} \ln \frac{D^2}{(E_f + \lambda)^2 + (|b_0|^2 \Delta_0)^2}. \quad (2.22)$$

U limitu velikog negativnog E_f tj. $n_s \approx 1$ jednačine dopuštaju rešenje gde $\tilde{E}_f = E_f + \lambda \approx 0$ i

$$|b_0|^2 \Delta_0 = D \exp\left\{-\pi \frac{|E_f|}{\Delta_0}\right\} \equiv k_B T_K. \quad (2.23)$$

Sa $k_B T_K$ smo obeležili karakterističnu energiju tj. Kondo temperaturu koja ulazi i u rešenje za Green-ovu funkciju f elektrona:

$$G_f(iw_n) = \frac{N|b_0|^2}{iw_n - \tilde{E}_f + i|b_0|^2 \Delta_0} + \text{nekoherentni deo}. \quad (2.24)$$

Ovaj izraz ukazuje na novi rezonantni nivo na fermi energiji $\tilde{E}_f \approx 0$ sa karakterističnom širinom $k_B T_K$ (Slika 2). Kolektivno svi delokalizovani elektroni unutar energetskog intervala $k_B T_K$ doprinose stvaranju ovog nivoa. Može se reći da u proseku na niskim temperaturama rezonantni nivo je popunjen samo sa jednim elektronom koji kompenzuje spin nečistoće (Zadatak IV(2)) tj. spin koji potiče od nivoa (nekoherentnog dela u (2.24)) oko E_f (Slika 2). (Težina - rezidium u (2.24) $N|b_0|^2$ je manji od jedinice po pretpostavci.)

Koeficijent $\pi \frac{|E_f|}{\Delta_0}$ u T_K može se zapisati kao $\frac{1}{J_k D(\epsilon_F)}$ gde smo uveli oznaku tzv. Kondo kuplovanja $J_K = \frac{\langle |V_k|^2 \rangle}{E_f}$. Ta veličina se pojavljuje u Kondo modelu ili tzv. s-d hamiltonijanu kao efektivnom opisu Andersonovog modela:

$$H_{Kondo} = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu) c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + 2J_K \vec{s} \cdot \vec{S} \quad (2.25)$$

gde

$$\vec{s} = \frac{1}{2N_0} \sum_{\substack{k,k' \\ \alpha,\beta}} c_{k\alpha}^\dagger \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{k'\beta} \quad (2.26)$$

i

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,k' \\ \alpha,\beta}} f_\alpha^\dagger \vec{\sigma}_{\alpha\beta} f_\beta \quad (2.27)$$

i gde σ_i , $i = 1, 2, 3$ su Pauli matrice (Zadatak IV(3)). Efektivni zapis pretpostavlja $U \rightarrow \infty$ i zadržavamo se u razvoju po V_k na članovima drugog reda. (J_k potiče od procesa izmene jednog elektrona na f nivou i delokalizovanog elektrona (na fermi nivou) što dovodi do izraza za J_K kao amplitude za takav proces.)

Renormalizaciona grupa i Kondo problem

Kondo problem je jedan od prvih fizičkih problema na koje su primenjene ideje renormalizacione grupe. Najvažnija transformacija koju radimo u okviru programa renormalizacione grupe je na particionoj funkciji sistema. Ako razmatramo bozonsko polje $\phi(k)$ sa cut-off-om D :

$$Z = \int \prod_{0 < k < D} \mathcal{D}\phi(k) \exp\{S(\phi)\} \quad (2.28)$$

tražimo kako se menjaju veze (kuplovanja) pri smanjenju cut-off-a $D \rightarrow \mu$ a da važi

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{0 < k < D} \mathcal{D}\phi(k) \exp\{S(\phi)\} \\ &= \int \prod_{0 < k < \mu} \mathcal{D}\phi(k) \exp\{S'(\phi)\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

To najčešće postizemo kad prointegralimo ϕ -ove u razmaku $\mu < k < D$. Pored dodatnih skaliranja ovo je osnovni korak renormalizacione grupe koji rezultira uvidom u kao što smo već rekli zavisnošću veza (koeficijenta u lagranžijanu) od cut-off-a.

Mi već imamo u aproksimaciji koju smo uradili vrednost odnosno zavisnost energije osnovnih stanja od usrednjenih polja tj. jednačinu (2.20). Prirodno je dodefinisati polja $|b_0|^2 \Delta_0 = \tilde{\Delta}$ i $E_f + \lambda = \tilde{\epsilon}_f$ tako da sada zapis energije glasi

$$E_{0eff} = -\frac{N}{\pi} \tilde{\Delta} + \frac{N \tilde{\epsilon}_f}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{\epsilon}_f} \right) + \frac{N \tilde{\Delta}}{2\pi} \ln \left\{ \frac{(\tilde{\epsilon}_f)^2 + (\tilde{\Delta})^2}{D^2} \right\} + N \frac{\tilde{\Delta}}{\pi \rho J} - Nq. \quad (2.30)$$

gde smo uveli koeficijent $\rho J = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta_0}{\lambda}$. Znači u našem slučaju particiona funkcija glasi (za $T \rightarrow 0$):

$$Z = \int d\tilde{\epsilon}_f \int d\tilde{\Delta} \exp\{-\beta E_0(\tilde{\epsilon}_f, \tilde{\Delta}; J\rho, D)\} \quad (2.31)$$

gde je D visokoenergetski cut-off. Sprovodeći ideju renormalizacione grupe mi zahtevamo

$$E_0(\tilde{\epsilon}_f, \tilde{\Delta}; J\rho, D) = E_0(\tilde{\epsilon}_f, \tilde{\Delta}; J_R \rho, \mu) \quad (2.32)$$

gde je $J_R \rho$ kuplovanje na novom cut-off-u μ . Sledi da

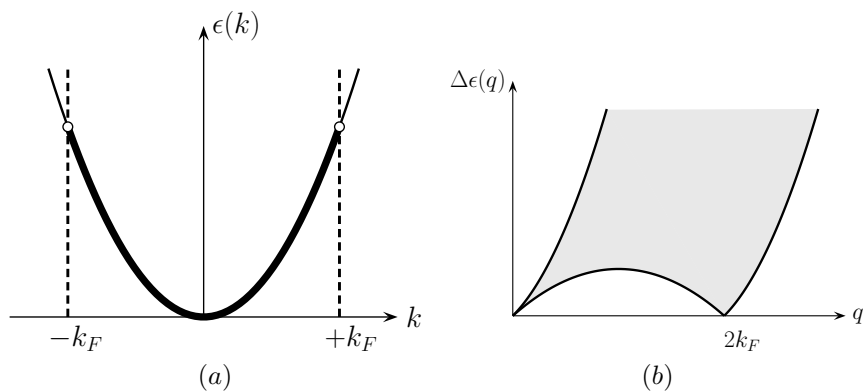
$$\frac{1}{\rho J_R} = \frac{1}{\rho J} + \ln \left\{ \frac{\mu}{D} \right\} \quad (2.33)$$

Ako smanjujemo cut-off μ , ρJ_R , Kondo kuplovanje raste sve dok ne na $\mu = T_K = D \exp\{-\frac{1}{\rho J}\}$ divergira i označava tačku jakog kuplovanja ili stvaranja spin-singleta. Time smo otkrili kakav je efektivni opis sistema na najnižim energijama. Iz (2.33) možemo zaključiti i da je $T_K = D \exp\{-\frac{1}{\rho J}\} = \mu \exp\{-\frac{1}{\rho J_R}\}$ tj. kao fizička veličina nezavisna od vrednosti cut-off-a.

Poglavlje 3

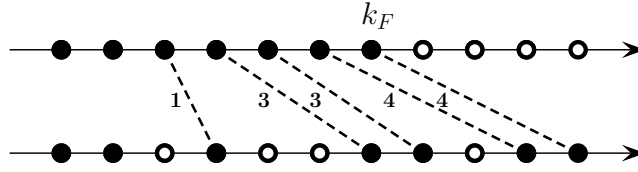
Luttinger tečnost

Ako ograničimo kretanje fermionskih čestica na jednu dimenziju intuitivno očekujemo da ubrzanje jedne čestice će se sigurno preneti na susednu (putem interakcije) i tako dalje na sledeću čineći kolektivnu ekscitaciju. U jednoj dimenziji nema mogućnosti da susedna čestica poprimi momenat normalno na kretanje i dopusti čestici da se slobodno kreće. Dakle kolektivne ekscitacije ili ekscitacije gustine koje opisuju bozonske varijable čine okosnicu opisa fermiona u jednoj dimenziji. Može se pokazati da one u potpunosti čine niskoenergetski opis takvog jednog sistema i teorijski koncept koji je paralelan uopštenju fermi tečnosti u višim dimenzijama i koji opisuje takvo kolektivno ponašanje u jednoj dimenziji nazivamo Luttinger-ova tečnost. Fermi tečnost je uopštenje neinteragujućeg (slobodnog) elektronskog gasa, a Luttinger tečnost je uopštenje egzaktno rešivog Luttinger modela koji se pak oslanja na bozonsku reprezentaciju niskoležećih ekscitacija slobodnog elektronskog gasa u jednoj dimenziji.



Slika 3.1: (a) Energetski spektar jednodimenzionog fermi gasa, (b) dozvoljene energije čestica - šupljina ekscitacija.

Razmatrajmo jednodimenzioni slobodni elektronski gas sa periodičnim



Slika 3.2: Šiftovi (translacije) bozonske prirode jednodimenzionog fermi gasa

graničnim uslovom na dužini sistema jednako L . Jednočestični energetske nivoi su dati izrazom : $\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, k = n \frac{2\pi}{L}; n = 0, \pm 1, \dots$ (Slika 3 (a)). Izrazita karakteristika jednodimenzionog gasa može se videti pri analizi dozvoljenih energija ekscitacija čestica-šupljina. Ekscitaciona energija za ekscitaciju u kojoj čestica sa momentom p prelazi u $p + q$ je $\Delta\epsilon(p) = \frac{pq}{2m} + \frac{q^2}{2m}$. U jednoj dimenziji pri datom q postoji najniži momenat ispod fermi nivoa koji može biti pobudjen $p = k_F - q$. Zato $\Delta\epsilon(p = k_F - q) = \frac{q}{m}(k_F - \frac{q}{2})$ je najniža energija za dato q i opisuje granicu oblasti na Slici 3 (b) u kojoj ne postoje čestica-šupljina ekscitacije. Znači u odnosu na situaciju u višim dimenzijama izrazit je nedostatak ekscitacija koje u višim dimenzijama opisuju kretanje transferzalno (normalno) na prvobitni pravac.

Zamislimo da smo popunili u desnoj grani spektra (Slika 3 (a)) još Q_R nivoa tj. da smo povećali broj elektrona za Q_R u desnoj grani. Koristićemo niskoenergetsku aproksimaciju spektra merenog u odnosu na fermi nivo: $\Delta\epsilon(k_F + q) = \frac{\hbar^2(k_F + q)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2 k_F q}{m} = \hbar^2 v_F q$. Uzećemo $\hbar = 1$. Porast kinetičke energije je dat izrazom:

$$v_F \frac{2\pi}{L} \sum_{i=n+1}^{n+Q_R} (i - n - \frac{1}{2}) = v_F \frac{2\pi}{L} \sum_{l=1}^{Q_R} (l - \frac{1}{2}) = v_F \frac{\pi}{L} Q_R^2 \quad (3.1)$$

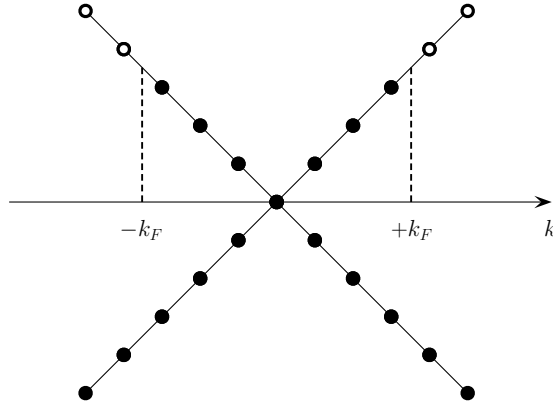
gde smo uzeli $k_F = (n + \frac{1}{2})v_F \frac{2\pi}{L}$.

Ako fiksiramo Q_R i napravimo niz čestica-šupljina ekscitacija u toj grani (Slika 4) vidimo da pomeranje energija u odnosu na početno stanje možemo opisati preko niza celih brojeva u monotono rastućem nizu gde može biti ponavljanja vrednosti celih brojeva. To nam sugerise bozonske ekscitacije. Posle analogne analize u levoj grani možemo doći do hipoteze da niskoenergetski opis ekscitacija jednodimenzionog slobodnog elektronskog gasa je dat izrazom:

$$H = v_s \sum_q |q| b_q^\dagger b_q + \frac{1}{2} \frac{\pi}{L} v_N N^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{L} v_J J^2 \quad (3.2)$$

gde $v_s = v_N = v_J = v_F$, $N = Q_R + Q_L$ i $J = Q_R - Q_L$. Da je spektar zaista linearan za sve k i u levoj i u desnoj grani jednačina(3.2) više ne bi bila hipoteza nego zaključak za jedan takav sistem.

Hipoteza Luttinger tečnosti je da ako unesemo interakcije kratkog dometa u slobodan elektronski gas niskoenergetski opis biće dat hamiltonijanom (3.2) sa interakcijom izmenjenim parametrima v_s , v_N i v_J . Primer takvog uopštenja je



Slika 3.3: Slobodni fermioni Dirac-ovog tipa (jednačina(3.3))

Luttinger-ov model [9]. Videćemo da postoje dva nezvisna parametra (u odnosu na tri u (3.2)) i da su dovoljni za opis niskoenergetskih osobina uključujući i opis korelacionih funkcija.

Prvo ćemo uvesti kinetički deo Luttinger-ovog modela:

$$H^0 = v_F \sum_{k,p} (pk - k_F)(\hat{n}_{kp} - \langle n_{kp} \rangle_0) \quad (3.3)$$

gde $p = +, -$ označava desno i levo krećuće fermione (Slika 5), k_F je fermi impuls, a $\langle n_{kp} \rangle_0 = \theta(k_F - pk)$ popunjenost nivoa osnovnog stanja. U H^0 je oduzeta njegova vrednost u osnovnom stanju sa određenim k_F tj. hamiltonijanu je oduzeta njegova vrednost u odnosu na stanje sa određenim k_F - on je “normal ordered” (normalno uredjen). Time je dobro definisan jer poprima konačne vrednosti. Ekscitacije duboko ispod fermi nivoa su time potisnute u odnosu na opis i fiziku oko k_F . Možemo se pitati da li nam je potrebno Dirakovo pozitronsko more u aproksimativnom opisu jednog sistema kondenzovanog stanja. Kao što smo već rekli more zbog inertnosti njegovih nivoa u opisu nema značaja i uvodi se samo kao sredstvo regularizacije umesto konačnog cut-off-a i dozvoljava rigorozno uvodjenje bozonskih operatora.

Operatori gustine fermiona tipa p se daju izrazima

$$\begin{aligned} \rho_{qp} &= \sum_k c_{k+q,p}^\dagger c_{k,p} & q \neq 0 \\ &= \sum_k \hat{n}_{k,p} - \langle n_{k,p} \rangle_0 & q = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Komponentu $q = 0$ smo normalno uredili da bi kao operator bila dobro definisana. Sledeće, želimo da izračunamo komutator $[\rho_{qp}, \rho_{q'p'}] = ?$ Ako je $q' \neq -q$ lako, šiftom (translacijom) varijabli dokazujemo da je vrednost komutatora nula. Za $q' = q$ (Zadatak V(1)) imamo razliku dva neograničena operatora (kao prvi

rezultat) koje prvo moramo da normalno uredimo - da dodamo i oduzmemo očekivane vrednosti u osnovnom stanju (sa k_F). Manipulacija šiftovim je dozvoljena na ograničenim (dobro definisanim) operatorima i ostala nam je samo razlika očekivanih vrednosti koju možemo izračunati uvodeći cut-off odozdo. Puštajući cut-off u $-\infty$ dobijamo

$$[\rho_{qp}, \rho_{q'p'}] = \delta_{p,p'} \delta_{q+q',0}(-)qp \frac{L}{2\pi} \quad (3.5)$$

Dobili smo bozonske komutacione relacije u prostoru impulsa. Zato konstruišemo bozonska polja radi jednostavnosti prvo u grani $p = +$:

$$\theta_+(x) = \frac{2\pi x}{L} Q_R + i \sum_{q \neq 0} \exp\{-iqx\} \frac{1}{n} \rho_{q+} + \theta_R \quad (3.6)$$

gde je θ_R jedna konstanta. Važi

$$\partial_x \theta_+(x) = 2\pi \rho_+(x), \quad (3.7)$$

gde uvodimo operator gustine u grani $+$:

$$\rho_+(x) = \frac{1}{L} \sum_q \exp\{iqx\} \rho_{q+} \quad (3.8)$$

i

$$[\rho_+(x), \theta_+(x')] = i\pi \delta(x - x') \quad (3.9)$$

Analogne relacije važe i za levu granu sa naelektrisanjem Q_L . Bozonske kreacione i anihilacione operatore možemo definisati preko, $q = n \frac{2\pi}{L}$,

$$\begin{aligned} a_q^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{n}} \rho_{q+} \quad q > 0 \\ a_q^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{|n|}} \rho_{q-} \quad q < 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

gde $a_q |FS\rangle = 0$ i $|FS\rangle$ je osnovno stanje sa određenim k_F .

Na osnovu razmatranja u uvodu dolazimo do zaključka da se kinetički deo Luttinger modela može izraziti kao

$$H^0 = v_F \sum_q |q| a_q^\dagger a_q + \frac{\pi}{L} v_F (Q_R^2 + Q_L^2) \quad (3.11)$$

ili

$$H^0 = \frac{v_F}{4\pi} \int dx \sum_p : (\partial_x \theta_p)^2 : \quad (3.12)$$

gde je $:$: znak normalnog uredjenja za koji $aa^\dagger := a^\dagger a$ itd. Jednakost fermionskog i bozonskog opisa može se pokazati i preko jednakosti particionih funkcija

koje slede iz dva opisa putem fermionskih i bozonskih slobodnih ekscitacija (Zadatak V(2)) [10].

Uvešćemo prirodne varijable: naelektrisanja $Q = Q_R + Q_L$ ($\rho_N = \rho_+ + \rho_-$) i struje $J = Q_R - Q_L$ ($\rho_J = \rho_+ - \rho_-$) i analogno $\theta_N = \theta_+ + \theta_-$ i $\theta_J = \theta_+ - \theta_-$. Za njih važi:

$$\partial_x \theta_N = 2\pi \rho_J \quad \text{i} \quad \partial_x \theta_J = 2\pi \rho_N \quad (3.13)$$

i

$$[\rho_J(x), \theta_N(x')] = [\rho_N(x), \theta_J(x')] = i2\pi \delta(x - x'). \quad (3.14)$$

U ovoj reprezentaciji

$$H^0 = \frac{v_F}{8\pi} \int dx : (\partial_x \theta_J)^2 : + : (\partial_x \theta_N)^2 : . \quad (3.15)$$

Interakcioni član Luttinger modela glasi:

$$H^1 = \frac{\pi}{L} \sum_{p,p',q} (V_{1q} \delta_{p,p'} + V_{2q} \delta_{p,-p'}) \rho_{qp} \rho_{-qp'} \quad (3.16)$$

i model je rešiv putem Bogoljubovljeve transformacije [10]. Ispostavlja se da niskoenergetsku fiziku dobijamo prostom smenom $V_{1q} \rightarrow V_1(q=0)$ i $V_{1q} \rightarrow V_2(q=0)$ (pretpostavljamo interakcije kratkog dometa) i hamiltonijan poprima oblik:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int dx : v_J (\partial_x \theta_N)^2 : + : v_N (\partial_x \theta_J)^2 : \quad (3.17)$$

gde

$$v_N = v_F + V_1(0) + V_2(0) \quad \text{i} \quad v_J = v_F + V_1(0) - V_2(0) \quad (3.18)$$

Inače rešenje zbog oblika hamiltonijana modela: $H \sim a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger + aa$ se dobija uobičajenom smenom $a_q^\dagger = \cosh \phi_q b_q^\dagger + \sinh \phi_q b_{-q}$, kada dijagonalizovan hamiltonijan postaje:

$$H = E_0 + \sum \omega_q b_q^\dagger b_q + \frac{1}{2} \frac{\pi}{L} (v_J J^2 + v_N N^2) \quad (3.19)$$

gde $\omega_q = \sqrt{(v_F + V_{1q})^2 - (V_{2q})^2} |q|$. U dugotalasnom limitu definišemo $v_s = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\omega_q}{q} = \sqrt{v_N v_J}$ i takodje parametar K : $v_N = \frac{v_s}{K}$ i $v_J = v_s K$ ili

$$K = \sqrt{\frac{v_J}{v_N}} = \sqrt{\frac{v_F + V_1(0) - V_2(0)}{v_F + V_1(0) + V_2(0)}}. \quad (3.20)$$

Sa ovim definicijama niskoenergetski zapis Luttinger modela glasi

$$H = \frac{v_s}{8\pi} \int dx : K (\partial_x \theta_N)^2 + \frac{1}{K} (\partial_x \theta_J)^2 : \quad (3.21)$$

Iz relacije $\frac{\partial_x \theta_J}{2\pi} = \rho_N$ proizilazi da koeficijent K ima značenje kompresibilnosti. $K \ll 1$ ako su interakcije veoma odbojne.

Niskoenergetski opis bi trebalo da sadrži operatore vezane za kreaciju i anihilaciju elektrona kao osnovne čestice sistema. Da bi se približili uobičajenom opisu slobodnog bozonskog polja redefinišemo:

$$\frac{\theta_N}{2} \rightarrow \theta_N; \text{ i } \frac{\theta_J}{2} \rightarrow \theta_J. \quad (3.22)$$

Tada i komutacione relacije postaju:

$$[\partial_x \theta_N(x), \theta_J(x')] = i\pi \delta(x - x') = [\partial_x \theta_J(x), \theta_N(x')] \quad (3.23)$$

a granični uslovi koje sada polja ispunjavaju su:

$$\theta_N(x + L) = \theta_N(x) + \pi N \text{ i } \theta_J(x + L) = \theta_J(x) + \pi J. \quad (3.24)$$

Ako definišemo polja

$$\exp\{im\theta_N - i\theta_J\}, \quad m = \pm \quad (3.25)$$

videćemo da ona zadovoljavaju osnovne relacije za kreacione i anihilacione operatore elektronskog polja: $[\rho(x), \Psi^\dagger(x')] = \Psi^\dagger(x)\delta(x-x')$, $\Psi(x)\Psi(x') = -\Psi(x')\Psi(x)$, itd (Zadatak V(3)).

Da bi izračunali neke od korelacionih funkcija Luttinger modela koje uključuju u svojoj definiciji eksponencijale bozonskih polja razmotrićemo teoriju bozonskog polja u 1 + 1 dimenziji [11].

Akcija slobodnog bozonskog polja u $\tau = it$ (imaginarnom vremenu) je

$$S = \frac{1}{2\pi} \int dx \int d\tau \left[\frac{1}{v} (\partial_\tau \phi)^2 + v (\partial_x \phi)^2 \right] \quad (3.26)$$

Da bi dobili korelacione funkcije definišemo generišući funkcional

$$Z[\eta] = \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S - \int d\tau \int dx \phi(\bar{x}) \eta(\bar{x})\} \quad (3.27)$$

gde je $\eta(\bar{x}) = \eta(x, \tau)$ probna funkcija. Pošto je ova teorija gausijanska (kvadratična po ϕ), $Z[\eta]$ se lako izračunava:

$$\frac{Z[\eta]}{Z[0]} = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int d\bar{x} \int d\bar{x}' \eta(\bar{x}) G(\bar{x}, \bar{x}') \eta(\bar{x}') \right\} \quad (3.28)$$

gde

$$\frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{v} \partial_\tau^2 - v \partial_x^2 \right) G(\bar{x}, \bar{x}') = \delta(x - x') \delta(\tau - \tau') \quad (3.29)$$

Uvodeći kompleksne varijable $z = \tau + i\frac{x}{v}$ i $\bar{z} = \tau - i\frac{x}{v}$ jednačina postaje

$$\frac{1}{\pi} \partial_z \partial_{\bar{z}} G(z, z') = \frac{1}{2} \delta^2(z - z') \quad (3.30)$$

Rešenje je

$$G(z, 0) = \frac{1}{4} \ln \frac{R^2}{z\bar{z}} \quad (3.31)$$

gde smo koristili $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{\bar{z}}) = 4\pi\delta^2(z)$ (Zadatak V(4)) i uveli smo radijus sistema (infrared cut-off) da bi korelacije bile fizičke - opadale sa rastojanjem. Potreba cut-off-a veličine sistema ukazuje nam da samo polje ϕ ne bi trebalo da ima fizičku interpretaciju već samo (možda) njegovi izvodi i eksponencijalne funkcije. Uvešćemo i cut-off bliskih rastojanja jer će nam biti potreban u definisanju eksponencijalnih funkcija. Zato

$$G(z, 0) = \frac{1}{4} \ln \frac{R^2}{z\bar{z} + a^2}. \quad (3.32)$$

Da bi izračunali korelacione funkcije bozonskih eksponenata $\sim \exp\{i\beta\phi\}$ uvodimo probu:

$$\eta_0(\bar{x}) = i \sum_{n=1}^N \beta_n \delta^2(z - z_n) \quad (3.33)$$

Koristeći prethodne rezultate dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{Z[\eta_0]}{Z[0]} &= \langle \exp\{-i\beta_1\phi(z_1, \bar{z}_1)\} \cdots \exp\{-i\beta_N\phi(z_N, \bar{z}_N)\} \rangle \\ &= \exp\{-[\sum_{i<j} \beta_i\beta_j G(z_i, z_j)]\} \exp\{-[\frac{1}{2} \sum_i \beta_i^2 G(z_i, z_i)]\} \\ &= \prod_{i<j} \left(\frac{|z_i - z_j|^2 + a^2}{R^2}\right)^{\frac{\beta_i\beta_j}{4}} \prod_i \left(\frac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{\beta_i^2}{8}} \\ &= \prod_{i<j} \left(\frac{|z_i - z_j|^2 + a^2}{a^2}\right)^{\frac{\beta_i\beta_j}{4}} \left(\frac{R}{a}\right)^{-\frac{(\sum_i \beta_i)^2}{4}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ako $R \rightarrow \infty$ (što je željeni limit) korelacije su različite od nule samo ako $\sum_i \beta_i = 0$ tj. ako je ispunjena tzv. elektroneutralnost. Tada

$$\frac{Z[\eta_0]}{Z[0]} = \left(\frac{|z_i - z_j|^2}{a^2}\right)^{\frac{\beta_i\beta_j}{4}} \quad (3.35)$$

ako $|z_i - z_j| \rightarrow \infty$ i potrebna nam je redifinicija eksponenata sa cut-off-om a - da korelacije ne bi zavisile od a . Ovo dovodi do dobro definisanih eksponenata koji se mogu dobiti i putem normalnog uredjenja [10, 12].

Oblik korelacija nam sugerise da se one mogu faktorisati u "holomorfni" i "antiholomorfni" (zavisan od z ili \bar{z} samo) deo. Zato definišemo

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi(z) + \phi(\bar{z}) \quad (3.36)$$

$$\theta(z, \bar{z}) = \phi(z) - \phi(\bar{z}) \quad (3.37)$$

što veoma liči na varijable naelektrisanja i struje koje smo prethodno imali. Važi i

$$i\partial_\tau\phi = v\partial_x\theta \quad (3.38)$$

$$-iv\partial_x\phi = \partial_\tau\theta \quad (3.39)$$

Iz akcije S tj. lagranžijana slobodnog polja možemo zaključiti koji je hamiltonijan teorije:

$$H = \frac{1}{2\pi v} \int dx [-(\partial_\tau \phi)^2 + v^2 (\partial_x \phi)^2] = \frac{v}{2\pi} \int dx [(\pi \Pi)^2 + (\partial_x \phi)^2] \quad (3.40)$$

gde je Π varijabla kanonički konjugovana polju ϕ : $\Pi = i \frac{1}{\pi v} (\partial_\tau \phi)$ i važi

$$[\Pi(x), \phi(y)] = -i\delta(x-y) \quad (3.41)$$

Sledi iz zamene Π i korišćenja dualne relacije (3.38) da komutator glasi:

$$[\partial_x \theta(x), \phi(y)] = -i\pi\delta(x-y) \quad (3.42)$$

čime identifikujemo polja ϕ i $-\theta$ sa θ_N i θ_J , do na faktor koji ih množi i deli respektivno, koje smo koristili u opisu Luttinger tečnosti.

U nastavku korišćićemo izračunate korelacije bozonskog polja da izračunamo Green-ovu funkciju elektrona u Luttinger tečnosti. Ako je $\Psi_R^\dagger \sim \exp\{i(\theta_N + \theta_J)\}$ i skaliranjem u kome polja postaju uobičajena polja zapisa bozonske teorije u $1+1$ dimenziji (3.40), (3.38), i (3.42):

$$-\frac{\theta_J}{\sqrt{K}} = \theta \quad \text{i} \quad \sqrt{K}\theta_N = \phi \quad (3.43)$$

onda je korelator

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_R^\dagger(x, \tau) \Psi_R(0, 0) \rangle = \\ & = \langle \exp\left\{i \frac{1}{\sqrt{K}} \phi(\bar{x}) - i\sqrt{K}\theta(\bar{x})\right\} \exp\left\{-i \frac{1}{\sqrt{K}} \phi(0) + i\sqrt{K}\theta(0)\right\} \rangle \\ & = \frac{1}{z^\Delta} \frac{1}{\bar{z}^{\bar{\Delta}}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

gde

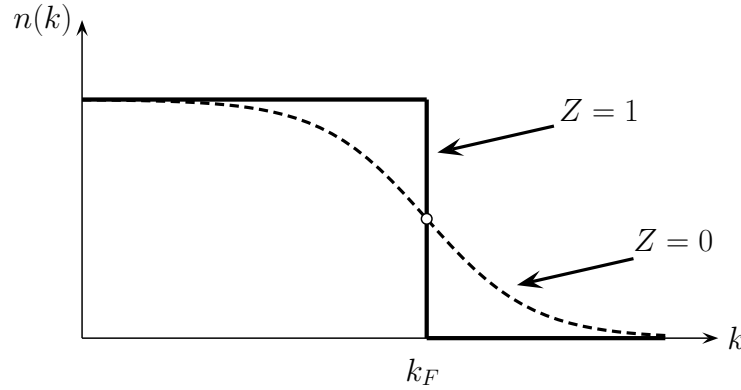
$$\Delta = \frac{(\frac{1}{\sqrt{K}} - \sqrt{K})^2}{4} \quad \text{i} \quad \bar{\Delta} = \frac{(\frac{1}{\sqrt{K}} + \sqrt{K})^2}{4}. \quad (3.45)$$

Vidimo da ako $K \neq 1$ tj. nismo u fermi tečnosti, korelator dobija komponentu opisa kretanja u suprotnom smeru. Takodje korelatori opisuju algebarsko opadanje što je opšta pojava u fizici Luttinger-ove tečnosti. Da bi dobili naseljenost u okolini fermi nivoa uzimamo $\tau = 0$:

$$\langle \Psi_R^\dagger(x, 0) \Psi_R(0, 0) \rangle \sim \frac{1}{|x|^{\frac{K+1}{2}}} \quad (3.46)$$

Raspodela čestica po momentu u blizini fermi nivoa dobija se iz

$$\delta n(k) \sim \int dx \exp\{i(k - k_F)x\} \frac{1}{|x|^{\frac{K+1}{2}}} \quad (3.47)$$



Slika 3.4: Naseljenost jednočestičnih nivoa u slučaju (a) slobodnog fermi gasa (puna linija) (b) Luttinger - tečnosti (isprekidana linija - shematski)

i jednostavnom smenom $y = (k - k_F)x$ i znajući rezultat za $K = 1$, očekujemo rezultat oblika:

$$n(k) = n(k_F) + |k - k_F|^{\frac{K+\frac{1}{K}}{2}-1} \text{sgn}(k - k_F)(-) c_K \quad (3.48)$$

gde c_K je pozitivna konstanta. Na Slici 6 vidimo uporedjenje distribucione funkcije $n(k)$ za fermi gas i Luttinger tečnost. Umesto konačnog skoka (Z) na k_F karakterističnog za fermi tečnost nalazimo manje izraženu singularnost bez skoka. To nam ukazuje da ne postoje dobro definisane fermi kvazičestice na fermi nivou.

Slično za gustinu stanja tražimo Fourier transform $G_R(0, \tau)$:

$$\int_0^\beta \exp\{i w_n \tau\} G_R(0, \tau) d\tau \sim (i w_n)^{\frac{K+\frac{1}{K}}{2}-1} \quad (3.49)$$

gde smo ocenili putem skaliranja transform. Gustina stanja $\rho(\epsilon) \sim \text{Im}G(0, i w_n \rightarrow \epsilon + i\eta)$ i vidimo da je nenulta za $w < 0$ kada $G(0, w + i\eta) \sim (-)^{\frac{K+\frac{1}{K}}{2}-1} |w|^{\frac{K+\frac{1}{K}}{2}-1}$ što znači $\rho(\epsilon) \sim \epsilon^{\frac{K+\frac{1}{K}}{2}-1}$ za $\epsilon < 0$ u odnosu na fermi nivou. Ponovo ovo znači nedostatak fermi jednočestičnih stanja na fermi nivou - stanja na fermi nivou ne liče na fermi jednočestična. To znači da je tuneliranje u Luttinger tečnost jako prigušeno u odnosu na tuneliranje u fermi tečnost. Karakteristično $k - k_F$ na niskim temperaturama je proporcionalno T pa time količina ekscitacija poprima ovaj oblik:

$$n(T) \sim T^{\frac{K+\frac{1}{K}}{2}-1} \quad (3.50)$$

tj. istu zavisnost od eksponenta $\frac{K+\frac{1}{K}}{2} - 1$ kao i $\rho(\epsilon)$ i $n(k)$. Ovaj stepeni zakon se pojavljuje i u merenjima struja-napon karakteristika prilikom tuneliranja u Luttinger tečnost. Veoma dobro slaganje eksperimenta i teorije dobijeno je na

tuneliranju u granicu frakcionog kvantnog Holovog sistema na punjenju $\nu = \frac{1}{3}$ [13, 14].

Preko korelacionih funkcija eksponenata bozonskih polja θ_N i θ_J možemo saznati njihov fizički smisao.

Korelator polja $\exp\{i2\theta_J\} = \exp\{-i2\sqrt{K}\theta\}$ jednak je

$$\langle \exp\{i2\theta_J(\bar{x})\} \exp\{-i2\theta_J(0)\} \rangle \sim \frac{1}{|z|^{2K}} \quad (3.51)$$

U Luttinger modelu $K \ll 1$ za odbojne interakcije i ovaj korelator meri tada dugodometne CDW (talase gustine naelektrisanja) korelacije. Znači parametar poretka uredjenja nalik na kristalnu rešetku je $\exp\{i2\theta_J\}$ tj. polje konstrukcije: $\Psi_R^\dagger \Psi_L$ koje nosi nulu naelektrisanja ali nenultu struju. Zbog $\rho_N = \frac{\partial_x \theta_J}{\pi}$, θ_J ima smisao fononskog otklona kvaziuredjenja (koje algebarski opada i nije pravo dugodometno) jer uprošćeno (pod pretpostavkom pravog uredjenja):

$$\rho_N(x) = \sum_n (\delta(x-na+\Delta_n) - \delta(x-na)) \approx \sum_n \Delta_n \delta'(x-na) = \partial_x \left(\sum_n \Delta_n \delta(x-na) \right) \quad (3.52)$$

Korelator polja $\exp\{i2\theta_N\} = \exp\{i2\frac{\phi}{\sqrt{k}}\}$ je

$$\langle \exp\{i2\theta_N(\bar{x})\} \exp\{-i2\theta_N(0)\} \rangle \sim \frac{1}{|z|^{\frac{2}{K}}} \quad (3.53)$$

tj. kada su superprovodne korelacije izražene $K \gg 1$ i korelator je dužeg dometa. Time $\theta_N(\bar{x})$ dobija smisao (kvazi)superprovodne faze. Zaista $\exp\{i2\theta_N\} \sim \Psi_R^\dagger \Psi_L^\dagger$ nosi naelektrisanje Cooper-ovog para (2e).

Možemo da zaključimo da Luttinger-ova tečnost je uvek na ivici opisa nekog uredjenoga stanja ali nikada potpuno uredjena u saglasnosti sa Mermin-Wagner-ovom teoremom.

Znajući korelacije θ_J možemo izračunati kompresibilnost ($\rho_N = \frac{\partial_x \theta_J}{\pi}$)

$$\begin{aligned} \langle \rho(k, iw_n) \rho(-k, -iw_n) \rangle &= \frac{k^2}{(\pi)^2} \langle \theta_J(k, iw_n) \theta_J(-k, -iw_n) \rangle \\ &= \frac{k^2}{(\pi)^2} \frac{2\pi K}{v_s \left(\left(\frac{w_n}{v_s} \right)^2 + k^2 \right)} \end{aligned} \quad (3.54)$$

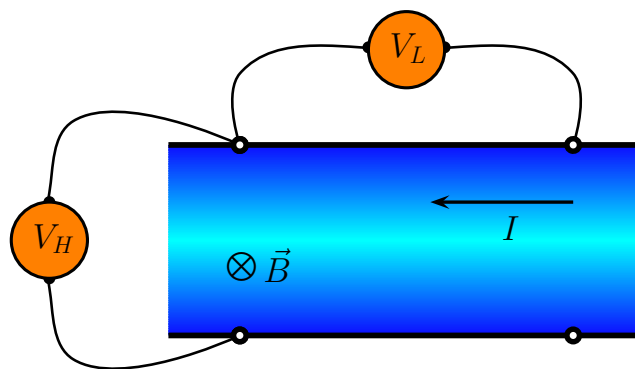
tj. $\lim_{w \rightarrow 0} \langle \rho(k, w) \rho(-k, -w) \rangle = \chi_c$ - kompresibilnost i zato

$$\chi_c = \frac{2K}{\pi v_s}. \quad (3.55)$$

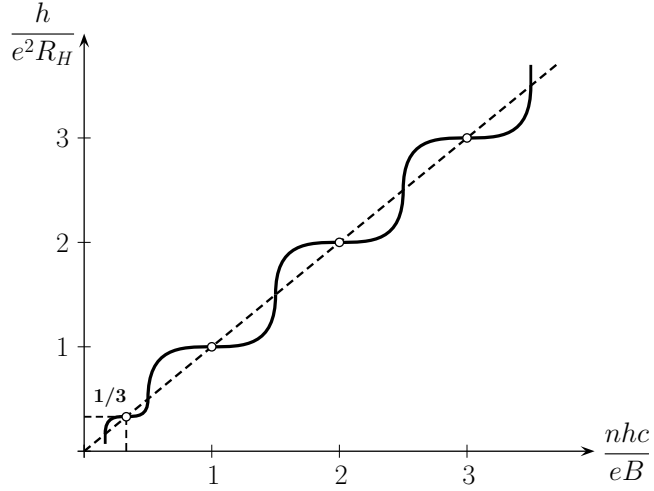
Poglavlje 4

Frakcioni kvantni Hall-ov efekt

Kvantni Hall-ov efekt nastaje pri kretanju dvodimenzionih elektrona u prisustvu jakog magnetnog polja. Meri se potencijalna razlika normalno na strujni tok - V_H i duž toka V_L (Slika 7). Na niskim temperaturama opažaju se platoi u zavisnosti $R_H = \frac{V_H}{I}$ (I -struja), Hall-ove otpornosti od količnika jačine magnetnog polja i elektronske koncentracije tj. $\frac{B}{n}$. Shematski oni su prikazani na Slici 8 gde vidimo i klasično predviđanje (isprekidana linija) linearne zavisnosti provodljivosti od količnika $\frac{n}{B}$ tj. $\frac{h}{e^2 R_H} = \frac{hc}{e} \frac{n}{B}$. Platoi nastaju oko klasičnih celobrojnih vrednosti $\frac{h}{e^2 R_H} = 1, 2, 3, \dots$ i time opisuju kvantizaciju provodljivosti datu celim brojevima - integralni kvantni Hall-ov efekt [15] ali primećeni su platoi i oko frakcionih $\frac{h}{e^2 R_H} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots$ - frakcioni kvantni Hall-ov efekt [16]. Stanja u kojima se klasične vrednosti poklapaju sa kvantnim, na sredinama platoa, karakterišu celobrojno ili delimično popunjeni Landau nivoi - kvantizovani nivoi kretanja slobodne čestice - elektrona u magnetnom polju.



Slika 4.1: Hall-ov eksperiment



Slika 4.2: Zavisnost Hall-ove provodnosti u jedinicama $\frac{e^2}{h}$ od količnika jačine magnetnog polja i elektronske koncentracije tj. $\frac{B}{n}$ (shematski)

Dobijamo utisak da se ta stanja “opiru promenama” - promeni $\frac{n}{B}$ konkretno. Za očekivati je da to ponašanje u integralnom efektu sledi zbog potpune popunjenosti nižih Landau nivoa i postjanja gap-a (procepa) prema nepopunjenim (višim) nivoima. Takvo objašnjenje ne važi za frakcioni efekat. Najčešće najniži Landau nivo je delimično popunjen što dovodi do velike (makroskopske) degenerisanosti početne - neinteragujuće slike sistema. Samo interakcije mogu da dovedu do postojanja procepa i način na koje one to čine predstavlja jedinstven primer jako korelisanog sistema. Da bi shvatili te korelacije razmatraćemo frakcioni kvantni Hall-ov efekat na frakciji $\frac{1}{3}$ i Laughlin-ovo rešenje [17] tog problema koje je osnov objašnjenja i opisa fizike i na drugim frakcijama.

Laughlin-ovo rešenje

Čestica u magnetnom polju u dve dimenzije:

Hamiltonijan je

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (4.1)$$

Komponente operatora $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$ zadovoljavaju ove relacije

$$[\Pi_i, \Pi_j] = i\hbar \frac{q}{c} B \epsilon_{ij} \quad i, j = x, y \quad (4.2)$$

Uvodimo

$$\Pi_+ = \Pi_x + i\Pi_y \quad \text{i} \quad \Pi_- = \Pi_x - i\Pi_y \quad (4.3)$$

i uzimajući $qB > 0$ i

$$b = \sqrt{\frac{c}{2q\hbar B}}\Pi_+ \quad \text{i} \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{c}{2q\hbar B}}\Pi_- \quad (4.4)$$

mi možemo opisati problem na način harmonijskog oscilatora:

$$[b, b^\dagger] = 1 \quad \text{i} \quad H = \hbar\omega_c(bb^\dagger + \frac{1}{2}) \quad (4.5)$$

gde $\omega_c = \frac{qB}{mc}$ - ciklotronska frekvencija. Postoje dodatni operatori koji komutiraju sa hamiltonijanom:

$$R_i = r_i + \epsilon_{ij}\Pi_j \frac{l_B^2}{\hbar} \quad i, j = x, y \quad (4.6)$$

gde $l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{qB}}$ je magnetna dužina i takodje

$$[R_i, \Pi_j] = 0 \quad i, j = x, y \quad (4.7)$$

. Uzećemo $\hbar = 1$ i $l_B = 1$. Operatori

$$Z^+ = \frac{R_x + iR_y}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad Z^- = \frac{R_x - iR_y}{\sqrt{2}} \quad (4.8)$$

predstavljaju dodatne operatore za koje važi $[Z^-, Z^+] = 1$ koji deluju unutar Landau nivoa.

Eigenvrednosti $n = 0, 1, \dots$, i $m = 0, 1, \dots$ dva operatora $\Pi^+\Pi^-$ i Z^+Z^- potpuno klasifikuju eigenstanja $|n, m\rangle$ hamiltonijana zato što operatori $\vec{\Pi}$ i \vec{R} odgovaraju dvema klasičnim veličinama - ciklotronskoj brzini i centru rotacionog kretanja ("guiding center coordinate") koji potpuno opisuju stanje čestice u magnetnom polju.

Degeneracija određenog Landau nivoa je jednaka broju dopuštenih stanja na površini $L_x \times L_y$. Pošto je $[R_i, R_j] = i\epsilon_{ij}$, slično problemu jednodimenzionalne slobodne čestice gde $[x, p] = i$ i broj dozvoljenih stanja u impulsnom intervalu ΔP za sistem dužine L je $\frac{L\Delta P}{2\pi}$, u našem slučaju degeneracija Landau nivoa je $\frac{L_x \times L_y}{2\pi}$. Ako vratimo jedinice degeneracija je

$$\frac{L_x \times L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{L_x \times L_y B}{2\pi l_B^2 B} = \frac{L_x \times L_y B}{\frac{\hbar c}{e}} \quad (4.9)$$

tj. jednaka je broju kvanata fluksa kroz sistem.

U simetričnom gejdžu imamo

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B} = \frac{B}{2} \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{za} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

i uzimamo $q = -e$. Iz uslova $\Pi^+g(z, \bar{z}) = 0$ gde $z = x + iy$ za stanje najnižeg Landau nivoa tj. $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{4})g(z, \bar{z}) = 0$ dobijamo da su sva stanja najnižeg Landau

nivoa oblika $f(z) \exp\{-\frac{1}{4}|z|^2\}$ gde je $f(z)$ analitička funkcija samo od z . U prostoru $f(z)$, Z^+ i Z^- postaju $Z^+ = \frac{z}{\sqrt{2}}$ i $Z^- = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z}$ i eigenstanja operatora Z^+Z^- sa eigenvrednostima $m = 0, 1, 2, \dots$ su

$$\Psi_m = \frac{z^m \exp\{-\frac{1}{4}|z|^2\}}{\sqrt{2\pi}2^m m!} \quad (4.11)$$

Kao što smo pokazali ranije maksimalna vrednost m je jednaka broju fluksa kvanata kroz sistem - N_ϕ , tačnije $m_{max} = N_\phi - 1$. Broj m preko relacije $\sqrt{\langle |z|^2 \rangle} = \sqrt{2(m+1)}$ karakteriše koliko je daleko orbita čestice od centra i to je eigenvrednost operatora angularnog momenta $L_z = -i\frac{\partial}{\partial \phi}$ gde ϕ predstavlja fazu kompleksnog broja z .

U najnižem Landau nivou stanja dve čestice se mogu klasifikovati kao eigenstanja relativnog angularnog momenta:

$$\Psi(z_1, z_2) = (z_1 + z_2)^m (z_1 - z_2)^l \exp\{-\frac{1}{4}|z_1|^2\} \exp\{-\frac{1}{4}|z_2|^2\} \quad (4.12)$$

sa eigenvrednošću l . Za elektrone l mora da bude neparan broj i može se smatrati merom medjučestičnog rastojanja. Prvi član u (4.12) predstavlja nevažno kretanje centra mase. Ako uvedemo operator interakcije izmedju dve čestice sa

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{k} V(\vec{k}) \exp\{i\vec{k}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\} \quad (4.13)$$

preko dekompozicije $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{\Pi}_i \times \hat{z}$ možemo izvesti projekciju interakcije u određeni Landau nivo n :

$$\bar{V}_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{k} | \langle n | \exp\{i\vec{k}(\vec{\Pi} \times \vec{z})\} | n \rangle |^2 \exp\{i\vec{k}(\vec{R}_i - \vec{R}_j)\} \quad (4.14)$$

Projektovana interakcija komutira sa operatorom relativnog angularnog momenta dve čestice:

$$M_{ij} = \frac{1}{4} |\vec{R}_i - \vec{R}_j|^2 - \frac{1}{2} \quad (4.15)$$

čija eigenstanja u najnižem Landau nivou su (4.12) ili $(Z_i^+ + Z_j^+)^m (Z_i^+ - Z_j^+)^l |0 \rangle = |l \rangle$ uopšte. Dakle jednom takvom stanju možemo pripisivati energiju $\langle l | \bar{V}_{ij} | l \rangle \equiv V_l$ ili ceo projektovan operator predstaviti kao [18]

$$\bar{V}_{ij} = \sum_{l=1}^{\infty} V_l P_l^{ij} \quad (4.16)$$

gde je P_l^{ij} projektor na stanje dve čestice sa relativnim angularnim momentom l . Time se dobija diskretni niz brojeva V_l ; $l = 1, 3, \dots$ koji karakterišu interakciju u određenom Landau nivou. l poprima neparne celobrojne vrednosti a V_l je monotono opadajući niz tzv. pseudopotencijala za Coulomb-ovu interakciju u određenom Landau nivou.

Sa druge strane Laughlin je funkciju osnovnog stanja elektrona na punjenju $\nu = \frac{N_e}{N_\phi} = \frac{1}{3}$ tražio u obliku:

$$\Psi_0(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} f(z_i - z_j) \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2\right\} \quad (4.17)$$

tj. u tzv. Jastrow zapisu koji uzima da su najvažnije dvočestične korelacije. (Proizvod je po svim parovima čestica.) Ali čim pretpostavimo takav oblik nameće se oblik funkcije u najnižem Landau nivou kao

$$f(z_i - z_j) \sim (z_i - z_j)^k \quad (4.18)$$

Najviši stepen jednočestičnog stanja funkcije Ψ_0 sa ovom pretpostavkom je $k(N_e - 1)$ i to je ujedno i broj fluksa kvanata kroz sistem (u termodinamičkom limitu). Znači za $N_e \rightarrow \infty$ $N_\phi = kN_e$ i iz fiksiranosti punjenja $\nu = \frac{1}{3}$ sledi da $k = 3$. To je u saglasnosti sa fermi statistikom koju opis putem Ψ_0 mora poštovati. Tako dobijamo Laughlin-ovo rešenje

$$\Psi_0(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2\right\} \quad (4.19)$$

I sa gledišta interakcija ovaj izbor je potpuno opravdan. Svaki elektron ima ne samo jednu (zbog fermi statistike) nego tri nule funkcije na svakom drugom elektronu. Znači približavajući se drugom elektronu funkcija opada kao stepena funkcija rastojanja sa stepenom 3 tj. verovatnoća da se elektron nadje u blizini drugog elektrona je prigušena i minimizacija interakcione energije koja sledi je veoma efikasna.

Ova razmatranja potvrđuje i numerički rad u LLL (najnižem Landau nivou). Može se izabrati tzv. "truncated" (odsečen) pseudopotencijalni hamiltonijan sa nizom: $V_l : [0, V_1, 0, 0 \dots]$ tj. samo V_1 vrednost Coulomb-ove interakcije [18]. Za takav hamiltonijan Laughlin-ova funkcija je egzaktno osnovno stanje sa nula energije. U geometriji sfere sa malim brojem čestica potvrđeno je da je to jedinstveno osnovno stanje sistema koje poseduje procep. I daljim dodavanjem preostalih pseudopotencijala Kulonove interakcije procep ostaje, i pored toga, Laughlin-ova funkcija ostaje veoma dobar opis funkcije osnovnog stanja [18]. (Preklapanje (skalarni proizvod) egzaktnog osnovnog stanja sa Laughlin-ovom funkcijom je veliko.)

Za sistem sa procepom za sve vrste ekscitacija kažemo da je nekompresibilan. On se opire promenama i dugi talasi i perturbacije sistema su nemogući. Ispostavlja se da u frakcionom kvantnom Hall-ovom efektu ekscitacije najniže energije su kvazičestičnog tipa. Jedna prirodna konstrukcija ekscitacije u okviru Laughlin-ove teorije u LLL je tipa

$$\prod_{i=1}^N (z_i - w) \Psi_0(z_1, \dots, z_N) \quad (4.20)$$

To je sigurno koherentno stanje šupljine (nedostatak elektrona) u w jer za svako $z_i \rightarrow w, i = 1, \dots, N$ konstrukcija ide u nulu. Ipak moramo biti pažljivi u

proceni količine nedostataka elektrona. U tom će nam pomoći Laughlin-ova plazmena analogija. Naime korelacione funkcije i slične veličine u stanju Ψ_0 koje računamo putem delimičnog integraljenja po koordinatama proizvoda $\Psi_0^* \Psi_0$ možemo identifikovati sa klasičnim izračunavanjima koristeći particionu funkciju dvodimenzione jednokomponentne plazme sa Coulomb-ovom interakcijom u dve dimenzije $\sim -\ln\{r\}$.

Naime funkcija raspodele verovatnoće, $\Psi_0^* \Psi_0$, može se zapisati kao

$$|\Psi_0(z_1, \dots, z_N)|^2 = \exp\{-\beta\Phi(z_1, \dots, z_N)\} \quad (4.21)$$

gde β^{-1} , temperaturu možemo proizvoljno izabrati i za nas će biti jednaka $\beta = m(m \equiv 3)$. Tada

$$\Phi(z_1, \dots, z_N) = -2 \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \frac{1}{2m} \sum |z_k|^2 \quad (4.22)$$

što sve zajedno čini opis plazme čestica naelektrisanja m , koje se odbijaju i zato je neophodno uniformna neutralizujuća pozadina sa gustinom $\rho = \frac{1}{2\pi m}$ (u novim jedinicama). $(U(r_i) = \frac{1}{2m}|z_i|^2$ i Poisson-ova jednačina je $-\nabla^2 U(r_i) = 4\pi\rho..)$

U slučaju ekscitacije (4.20) funkcija Φ postaje $\Phi'(z_1, \dots, z_N; w)$:

$$\Phi'(z_1, \dots, z_N; w) = -2 \sum_i \frac{1}{m} \ln |z_i - w| - 2 \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \frac{1}{2m} \sum |z_k|^2 \quad (4.23)$$

što u okviru plazmene analogije može se interpretirati kao prisustvo nečistoće sa naelektrisanjem $\frac{1}{m}$.

Najvažnije svojstvo plazme su da ona ima uniformnu gustinu i da potpuno ekranira ubačene nečistoće. Prvo svojstvo ima za posledicu, prevedeno na jezik prve kvantizacije i očekivanih vrednosti talasnih funkcija, da naš sistem ima uniformnu gustinu u stanju Ψ_0 . Drugo svojstvo znači da na mestu ekscitacije w biće nedostatak naelektrisanih čestica jednak $\frac{1}{m}$, dakle jednak frakciji naelektrisanja. Zbog toga ekscitacija predstavlja kvazičesticu sa frakcionim naelektrisanjem.

Chern-Simons efektivna teorija

Kvantna mehanika i numerički eksperimenti na malom broju čestica su dali objašnjenje frakcionog kvantnog Hall-ovog efekta. To uključuje i analizu ekscitacionog spektra i fenomen frakcione statistike putem izračunavanja Berry faze koje akumuliraju talasne funkcije [19]. Ipak efektivne teorije kvantnih polja, efektivne zato što najčešće govore o fizici u malom opsegu niskih frekvenci i dugih talasa, daju i pažnje vredne analogije i slike sistema. Chern-Simons-Landau-Ginzburg [20] teorija je prva takva teorija za frakcioni efekat i predstavlja jednostavan i klasičan primer tzv. gejdz teorije koja daje efektivnu sliku Laughlin-ovog sistema. Efektivne teorije nam najčešće daju globalnu sliku sa osnovnim opisom ali videćemo da je taj način u slučaju frakcionog kvantnog Hall-ovog efekta dovoljan da karakteriše takav sistem kao topološku fazu.

Mikroskopski hamiltonijan za 2D elektrone u spoljašnjem potencijalu A_μ , $\mu = x, y, 0$,

$$H = \frac{1}{2m^*} \sum_i [\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}_i)]^2 + \sum_i eA_0(\vec{x}_i) + V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (4.24)$$

Definišemo unitarnu transformaciju koja je analogna fazi mnogočestične Laughlin-ove funkcije:

$$U = \exp\{-i \sum_{i < j} m\alpha_{ij}\} \quad (4.25)$$

gde je svaki α_{ij} ugao koji zaklapa vektor koji povezuje čestice i i j sa \hat{x} osom tako da $\tilde{\phi}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = U\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ i m je neparan ceo broj. Nove talasne funkcije $\tilde{\phi}$ opisuju bozonske čestice. Transformisani hamiltonijan je:

$$H = \frac{1}{2m^*} \sum_i [\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}_i) - \frac{e}{c} \vec{a}(\vec{x}_i)]^2 + \sum_i eA_0(\vec{x}_i) + V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (4.26)$$

gde

$$\vec{a} = \frac{\Phi_0}{2\pi} m \sum_{j \neq i} \vec{\nabla}_i \alpha_{ij}. \quad (4.27)$$

i Φ_0 fluks kvantum. Uvodeći gustinu $\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$

$$\vec{a}(\vec{x}) = \frac{\Phi_0}{2\pi} m \int d\vec{y} \vec{\nabla} \alpha(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) \quad (4.28)$$

vidimo da \vec{a} zadovoljava jednačinu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{x}) = \Phi_0 m \rho(\vec{x}). \quad (4.29)$$

Znači čestice su izvor gejdž potencijala koji na njih zauzvrat deluje. Koristeći jednačinu kontinuiteta $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ zahtevamo:

$$\hat{z} \times \dot{\vec{a}}(\vec{x}) = -\Phi_0 m \vec{j} \quad (4.30)$$

(4.29) i (4.30) čine neku vrstu Maxwell-ovih jednačina koje možemo ugraditi u lagranžijan bozonskog polja pomoću tzv. Chern-Simons člana:

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger (i\hbar\partial_0 - (A_0 + a_0))\Phi - \mathcal{H} + \frac{e}{2\Phi_0} \frac{1}{m} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \quad (4.31)$$

Jednačine koje slede variranjem gejdž polja su (4.29) i (4.30) kada izaberemo gejdž $a_0 = 0$. \vec{a}, a_0 je gejdž polje sa gejdž simetrijom, jer pri gejdž transformaciji: $a_\nu \rightarrow a_\nu + \partial_\nu \Lambda$ Chern-Simons član ostaje isti do na površinski član. (Varijacija člana donosi totalnu divergenciju.)

U aproksimaciji usrednjenog polja, kad fiksiramo spoljašnje elektromagnetne potencijale: $A_0 = 0$ i $\vec{\nabla} \times \vec{A} = -B$ - je uniformno spoljašnje magnetno polje, zahtevamo:

$$\Phi(\vec{x}) = \sqrt{\bar{\rho}} \quad \vec{a}(\vec{x}) = -\vec{A}(\vec{x}) \quad a_0(\vec{x}) = 0 \quad (4.32)$$

gde je $\bar{\rho}$ prosečna gustina čestica sistema. Rešenje možemo naći ako, koristeći jednačinu (4.29),

$$\Phi_0 \frac{\bar{\rho}}{B} = \frac{1}{m} \quad (4.33)$$

Znači rešenja u obliku boze kondenzata su jedino moguća na punjenjima $\nu = \frac{1}{m}$, m - neparno. To uključuje punjenje $\frac{1}{3}$.

Da bi dobili gustina-gustina korelacionu funkciju sistema proučavamo fluktuacije u odnosu na rešenje usrednjenog polja. Koristimo Madelung-ovu dekompoziciju:

$$\Phi(\vec{x}) = \sqrt{\rho(\vec{x})} \exp\{i\theta(\vec{x})\} \quad (4.34)$$

i vršimo razvoj lagranžijana po stepenima $\delta\rho(\vec{x})$ i $\theta(\vec{x})$ (fluktuacijama gustine i faze) najviše do članova drugog reda. Takodje biramo Coulomb-ov gejdž, $\vec{\nabla}\vec{a} = 0$, tako da u \vec{k} prostoru za zadato \vec{k} , \hat{x} osa će biti u pravcu \vec{k} a \vec{a} će imati komponentu duž \hat{y} ose $a_y = a = |\vec{a}|$. Sledi da u Furije transformisanom prostoru gustina lagranžijana je

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & iw\delta\rho\theta - \delta\rho a_0 - \frac{\bar{\rho}}{2m^*} k^2 \theta^2 \\ & \frac{\bar{\rho}}{2m^*} (\delta a)^2 + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{m} a_0 i k (\delta a) - \frac{1}{2} (\delta\rho)^2 V(k) \end{aligned} \quad (4.35)$$

gde smo uzeli $\hbar = 1$, $e = 1$, i $c = 1$. Skratili smo notaciju članova sa $X(-k, -w)Y(k, w) \equiv XY$. Prostom gausijanskom integracijom prvo po a a zatim po a_0 dobijamo efektivni lagranžijan u obliku kvadrata fluktuacije gustine. Iz njega možemo pročitati korelacionu funkciju linearnog odziva gustine:

$$\langle \rho(-k, -w)\rho(k, w) \rangle = \frac{k^2}{(m^2 \frac{(2\pi)^2 \bar{\rho}}{m^*} + k^2 V(k)) - \frac{m^* w^2}{\bar{\rho}}} \quad (4.36)$$

Vidimo da je sistem nekompresibilan tj.

$\chi_c(\text{kompresibilnost}) = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{w \rightarrow 0} \langle \rho(-k, -w)\rho(k, w) \rangle = 0$. Zatim da je očigledna kolektivna moda na frekvenci $w \approx \frac{\bar{\rho} 2\pi m}{m^*}$ koju možemo da identifikujemo sa ciklotronskom frekvencom (u novim jedinicama).

Analogija koju imamo je analogija Laughlin-ovog sistema na sistem bozona koji u srednjem vidi nulto magnetno polje. Bozonski sistem je naelektrisan - to nije običan neutralni superfluid, u njemu deluju dugodometne gejdž sile (videti gustina-gustina korelator). Zato i ne nalazimo običnu ("gapless") Goldstone-ovu modu nego modu za čije ekscitovanje je potrebna konačna energija - ciklotroska energija. Pojavu da Goldstone-ova moda "dobije masu" u prisustvu gejdž polja kao u ovom slučaju nazivamo Anderson-Higgs mehanizam.

Naelektrisani superfluid karakterišu vorteksne ekscitacije. Ako koordinatni početak stavimo u centar vorteksa i ϕ označava ugao sa \hat{x} osom vorteks modujemo na velikim rastojanjima od centra kao bozonsko polje oblika $\Phi = \sqrt{\bar{\rho}} \exp\{\phi\}$. Time polje dobija "phase twist" ili skok faze od 2π duž \hat{x} ose. Da bi ekscitacija bila konačne energije moramo birati:

$$\delta\vec{a}(\vec{x}) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \vec{\nabla}\phi \quad (4.37)$$

tj.

$$\left| \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \delta \vec{a} \right) \Phi \right|^2 \rightarrow 0 \quad \text{kako } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (4.38)$$

Inače cena bi bila u neutralnom superfluidu:

$$\frac{\hbar^2 \bar{\rho}}{2m^*} \int d\vec{x} |\vec{\nabla} \phi|^2 \sim \frac{\hbar^2 \bar{\rho}}{2m^*} \int d\vec{x} \frac{1}{x^2} \sim \ln \left\{ \frac{R}{l_B} \right\} \quad (4.39)$$

gde je R radijus sistema.

Zaključujemo da zbog zahteva za konačnošću energije ekscitacije fluks koji pripada vorteksu je kvantizovan tj.

$$\int d\vec{x} \vec{\nabla} \times \delta \vec{a} = \int_C d\vec{l} \delta \vec{a} = \Phi_0 \quad (4.40)$$

Automatski, zbog (4.29) to znači da vorteksu pripada naelektrisanje $Q = \frac{e}{m}$ tj.

$$Q = \int \vec{x} \delta \rho(\vec{x}) = e \frac{1}{m} \frac{1}{\Phi_0} \int d\vec{x} \vec{\nabla} \times \delta \vec{a} = \frac{e}{m} \quad (4.41)$$

Stigli smo do frakcionalizacije naelektrisanja koju smo već našli u Laughlin-ovoj teoriji. Ovde možemo lako da dodjemo i do tzv. frakcionalizacije statistike. Operacija izmene može se identifikovati sa akumuliranom Bohm-Aharonov fazom za obilazak jedne čestice (vorteksa koji nosi fluks i naelektrisanje) oko druge za ugao π :

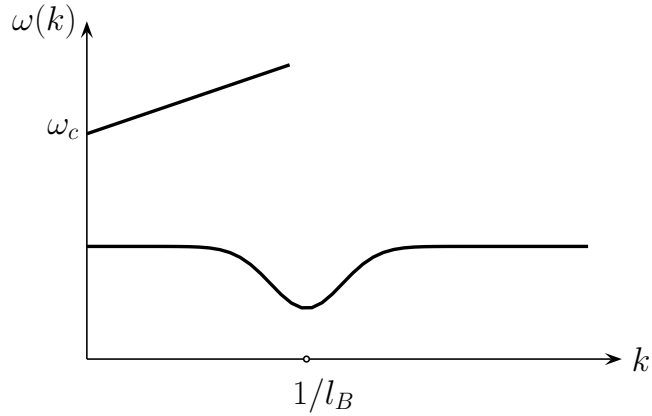
$$\exp \left\{ i \frac{Q}{\hbar c} \int_0^\pi \delta \vec{a} d\vec{l} \right\} = \exp \{ i Q \pi \} = \exp \left\{ i \frac{1}{m} \pi \right\} \quad (4.42)$$

Znači rezultat operacije izmene je netrivialna faza - frakcija ugla π . Mogućnost za frakcionu statistiku dolazi iz dvodimenzionalnosti sistema, jer recimo u tri dimenzije obilazak jedne čestice oko druge može se kontinuirano deformisati (bez prepreka) i identifikovati sa početnim stanjem.

Neutralne kombinacije vorteksa čine ekscitacije najniže energije i može se pokazati u okviru Chern-Simons bozonske teorije da čine granu ("magnetophonon") u ekscitacionom spektru pored grane ciklotronskih ekscitacija ("magnetoplasmon")(Slika 9).

Laughlin-ov sistem kao topološka faza

Topološke faze su faze kondenzovane materije koje karakteriše (1) energetski procep ("gap") u energetskom spektru (znači potrebna je konačna energija da se sistem pobudi) i (2) brojevi ili topološke invarijante koji su vezani za operaciju izmene - braiding-a njihovih kvazičestičnih ekscitacija. Laughlin-ov sistem na punjenju $\frac{1}{3}$ je jednostavan primer topološke faze. Njegov efektivni opis se može dati preko Chern-Simons lagranžijana (4.31) sa abelijanskim Chern-Simons članom. Abelijanskim jer je vezan za $U(1)$ grupu koja nema nekotirajuće generatore. U tom članu je kodiran podatak koliku fazu poprimi talasna funkcija ako jedna kvazičestica obidje drugu. Moguć je i tzv. dualni opis



Slika 4.3: “Magnetophonon”-ska grana u ekscitacionom spektru Laughlin-ove tečnosti zajedno sa ciklotronskom (“magnetoplasmon”) granom (shematski)

Laughlin-ovog sistema. Umesto da smatramo da se bozonske čestice kreću u gejdz polju a_μ može se smatrati da se kvazičestice kreću u nekom “background” polju b_μ koje potiče od čestica [20]. Ako zanemarimo kvazičestične ekscitacije naš dualni opis se svodi na Chern-Simons član:

$$\frac{m}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}b_\mu\partial_\nu b_\lambda + \frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}b_\mu\partial_\nu A_\lambda \quad (4.43)$$

gde A_μ predstavlja spoljašnje polje kao i ranije. Prosta jednačina kretanja koju dobijamo ako fiksiramo A_λ da opisuje uniformno magnetno polje na punjenju $\frac{1}{m}$ znači da svakoj čestici odgovara jedinični fluks polja b_μ .

Definišimo $a_\mu = b_\mu - A_\mu$ i razmatrajmo teoriju [21]:

$$S = \frac{m}{4\pi} \int \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \quad (4.44)$$

U gejdžu $a_0 = 0$ lagranžijan postaje

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2\pi} a_2 \partial_0 a_1 = \Pi_1 \partial_0 a_1 - 0 \quad (4.45)$$

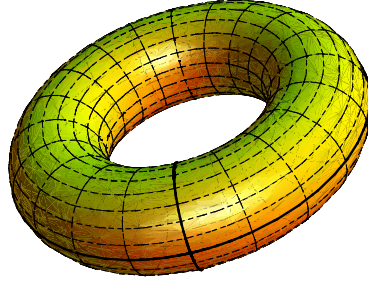
gde nalazimo da je hamiltonijan teorije jednak 0. Znači efektivna teorija opisuje samo osnovno stanje ili osnovna stanja. Kanoničke komutacione relacije koje slede su:

$$[a_1(\vec{x}, t), a_2(\vec{x}', t)] = \frac{2\pi}{m} i \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.46)$$

(Jedinice su $\hbar = 1, c = 1, i e = 1$.)

Zamislimo da je naša teorija definisana na torusu. Razmatrajmo

$$W[\gamma] = \exp\{i \oint \vec{a} d\vec{l}\} \quad (4.47)$$



Slika 4.4: Dve topološki različite putanje na torusu

gde γ je proizvoljna kriva koja opisuje torus na dva moguća načina (Slika 10). Zbog jednačine kretanja $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$ integral ne zavisi od putanje ali može da poprimi netrivialnu vrednost $W_i = \exp\{i \oint_{\gamma_i} \vec{a} d\vec{l}\}$, $i = 1, 2$. Fiksirajmo koordinatni sistem na torusu: $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$. Rešenje jednačine može da se napiše u obliku

$$\vec{a} = \left(\frac{\alpha_1}{2\pi}, \frac{\alpha_2}{2\pi}\right) + \vec{\nabla}\phi \quad (4.48)$$

gde je ϕ jednoznačna funkcija. α_i ; $i = 1, 2$ su definisane do na tzv. velike gejdž transformacije kada smatramo da postoji ceo broj kvanata fluksa kroz dve šupljine torusa. Znači $\alpha_i \equiv \alpha_i + 2\pi$. Sledi za rešenje dato u takvom obliku da je

$$W_i = \exp\{i\alpha_i\} \quad (4.49)$$

Iz komutacionih relacija sledi

$$[\alpha_1, \alpha_2] = i \frac{2\pi}{m} \quad (4.50)$$

ali zbog definisanosti α_i ; $i = 1, 2$ do na gejdž mi moramo da radimo sa W_i . Zbog

$$\exp\{i\alpha_1\} \exp\{i\alpha_2\} = \exp\left\{i \frac{[\alpha_1, \alpha_2]}{2}\right\} \exp\{i\alpha_1 + i\alpha_2\} \quad (4.51)$$

mi imamo komutacione relacije

$$W_1 W_2 = \exp\left\{i \frac{2\pi}{m}\right\} W_2 W_1 \quad (4.52)$$

Ova algebra se može reprezentovati na konačno dimenzionom vektorskom prostoru $|n\rangle$: $\{|0\rangle, \dots, |m-1\rangle\}$ kao

$$\begin{aligned} W_1 |n\rangle &= \exp\left\{i \frac{2\pi}{m} n\right\} |n\rangle \\ W_2 |n\rangle &= |n+1\rangle \end{aligned} \quad (4.53)$$

sa $W_2 |m-1\rangle = |0\rangle$. (Da je dimenzija prostora m možemo zaključiti iz (4.50) iz čega sledi da fazni prostor ima zapreminu $2\pi m$ tj. da sadrži m stanja.) Znači

osnovno stanje teorije je m puta degenerisano na torusu što je u saglasnosti sa numerikom na Laughlin-ovom sistemu.

Algebra (4.52) ima interpretaciju preko kvazičestica. Zamislimo da kreiramo kvazišupljina-kvazičestica par i da oni obilaze torus oko meridijana i zatim ih anihiliramo. Tom procesu pridružimo operator T_1 . Neka T_2 predstavlja analogni operator duž longitude. Ako kvazičestice imaju statistiku $\frac{\pi}{m}$ važi

$$T_1 T_2 = \exp\left\{i\frac{2\pi}{m}\right\} T_2 T_1 \quad (4.54)$$

što nas vraća na algebru (4.52).

Poglavlje 5

Kvantni antiferomagnet

Proučavaćemo moguća rešenja Heisenberg-ovog hamiltonijana u proizvoljnoj dimenziji na rešetci,

$$H = \sum_{i,j} J \vec{S}_i \vec{S}_j \quad (5.1)$$

gde $J > 0$, suma je po najbližim susedima i spin S je proizvoljan, $\vec{S}^2 = S(S+1)$. Prelazimo u funkcionalni zapis particione funkcije koristeći spinska koherentna stanja $|\vec{\Omega}\rangle$, stanja najmanje kvantno- mehaničke neodređenosti spina u pravcu $\vec{\Omega}$ ($\vec{\Omega}^2 = 1$): $\langle \vec{\Omega} | \vec{S} | \vec{\Omega} \rangle = S\vec{\Omega} \equiv \vec{S}$. Particiona funkcija glasi

$$Z = \int \prod_i \mathcal{D}\vec{S}_i(\tau) \exp\{-A\} \quad (5.2)$$

sa akcijom

$$A = iS \sum_i \omega(\vec{S}_i(\tau)) + \int_0^\beta d\tau \sum_{i,j} J \vec{S}_i(\tau) \vec{S}_j(\tau) \quad (5.3)$$

$\omega(\vec{S}_i(\tau))$ označava Berry fazu (Zadatak I(4)) u koju su ugrađene kvantno-mehaničke (netrivijalne) komutacione relacije. ω ima interpretaciju prostornog ugla koji vektor $\vec{\Omega} = \frac{\vec{S}_i(\tau)}{S}$ opiše na intervalu $[0, \beta]$ sa uslovom $\vec{\Omega}(0) = \vec{\Omega}(\beta)$ na sferi jediničnog radijusa.

U višim dimenzijama na niskim temperaturama očekujemo uredjeno stanje nalik Nèelovom stanju $\langle \vec{S}_i \rangle = \exp\{i\vec{Q}\vec{R}_i\} \equiv (-)^i$ gde \vec{Q} ima vrednost $\frac{\pi}{a}$ za sve komponente a \vec{R}_i je koordinata spina \vec{S}_i . Da bi dobili kontinuum limit našeg modela [22] pretpostavljamo da možemo da uvedemo opis preko dva polja koja se sporo menjaju na rešetci. Zato razlažemo svaki spin \vec{S}_i :

$$\vec{S}_i = (-)^i S \vec{n}_i + a^d \vec{L}_i, \quad (5.4)$$

u tzv. “staggered” - alternirajuću komponentu i \vec{L}_i uniformnu komponentu. \vec{L}_i ima koeficijent a^d - konstantu rešetke na stepen dimenzije sistema jer time

\vec{L}_i poprima fizički smisao polja čiji integral u limitu kontinuuma u određenoj zapremini daje ukupnu magnetizaciju te zapremine [23]. Pretpostavljamo da \vec{L}_i i \vec{n}_i se sporo menjaju bar nekoliko konstanti rešetke daleko tako da naš opis bi trebalo da obuhvati i sisteme bez uredjenosti. Zbog $|\vec{S}_i(\tau)|^2 = S^2$ do prvog stepena po maloj veličini a^d važi

$$\vec{n}_i \vec{L}_i = 0 \quad (5.5)$$

Koristeći tu jednačinu, razvoj komponenata \vec{n}_i i \vec{L}_i po malom a , i koristeći

$$\vec{n}_i \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial R_i^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, d \quad (5.6)$$

što proizilazi iz $\vec{n}_i^2 = 1$ dobijamo za H do na konstantu:

$$H = \int d^2 \vec{R} \left\{ \frac{JS^2}{2} a^{2-d} |\vec{\nabla} \vec{n}(\vec{R})|^2 + Jda^d \vec{L}^2(\vec{R}) \right\} \quad (5.7)$$

Mešoviti član $\sim \vec{n} \frac{\partial \vec{L}}{\partial R_\alpha}$ smo zanemarili jer je reda a u kontinuumu i time višeg reda nego od člana koji dobijamo iz Berry faze (Zadatak I(4))

$$\begin{aligned} S \sum_i \omega(\vec{\Omega}_i(\tau)) &= S \sum_i \omega((-)^i \vec{n}_i + a^d \vec{L}_i) \approx \\ &S \sum_i \{ (-)^i \omega(\vec{n}_i) + \int_0^\beta d\tau \frac{\delta \omega(\vec{\Omega}(\tau))}{\delta \vec{\omega}(\tau)} \Big|_{\vec{\Omega}_i = (-)^i \vec{n}_i} \frac{a^d}{S} \vec{L}_i \} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Koristeći (Zadatak II(1))

$$\frac{\delta \omega(\vec{\Omega}(\tau))}{\delta \vec{\omega}(\tau)} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \tau} \times \vec{\Omega} \quad (5.9)$$

sada efektivna akcija može da se predstavi kao

$$A_{eff} = iS \sum_i (-)^i \omega\{\vec{n}(\vec{R}_i)\} + i \int d^2 \vec{R} \int_0^\beta d\tau \vec{L} \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial \tau} \times \vec{n} \right) + \int_0^\beta d\tau H \quad (5.10)$$

Time smo u Berry fazi dobili opis konjugovanih polja u kontinuumu i naš cilj je da dobijemo oblik akcije u zavisnosti samo od \vec{n} . I pored veze (5.5) koju moramo uzeti u obzir iz same akcije vidimo da $\vec{L} \sim \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial \tau} \times \vec{n} \right)$ tj. da je veza zadovoljena i dovoljno je da “kompletiramo kvadriranje” tj. prointegralimo Gaussian.

Kao rezultat dobijamo

$$A_{eff} = iS \sum_i (-)^i \omega(\vec{n}_i) + \int_0^\beta d\tau \int d^2 \vec{R} \left\{ \frac{JS^2 a^{2-d}}{2} |\vec{\nabla} \vec{n}|^2 + \frac{a^{-d}}{4Jd} (\dot{\vec{n}})^2 \right\} \quad (5.11)$$

Pored Berry faze tu je tzv. nelinearni sigma model. Ako uvedemo konstante $c = \sqrt{2d}JSa$ tj. brzinu spinskih talasa i $g = \frac{2\sqrt{2d}}{S} a^{d-1}$ nelinearni sigma model

možemo zapisati u obliku lagranžijana u $d + 1$ dimenzionom prostoru $x_0 = c\tau$ i $x_\alpha = R_\alpha$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g} (\partial_\mu \vec{n})^2. \quad (5.12)$$

Inače konstanta $\rho_s = \frac{c}{g} = \frac{JS^2 a^2}{2}$ u (5.11) ima značenje tzv. "spin stiffness" tj. rigidnosti sistema na gradijentne promene.

Kontinualan limit je opravdan u limitu velikog S kada bazis koherentnih stanja veoma verno opisuje skup eigenstanja spina. Limit je kao što smo rekli potpuno opravdan i u većim dimenzijama kada dugodometna uredjenost nam sugerise zapis preko sporo menjajućih polja. Ipak zapis koji smo uveli nije narušio simetriju tj. ne ograničava se na situacije kada je simetrija spontano narušena i jedina pretpostavka je uredjenost na malim rastojanjima. Zato (5.11) ćemo primeniti i u slučaju spinskih lanaca sa malim S .

U jednoj dimenziji pri periodičnim graničnim uslovima i parnom broju čvorova $= 2N$ Berry faza postaje

$$\begin{aligned} S \sum_{k=1}^N [\omega\{\vec{n}(2ka)\} - \omega\{\vec{n}((2k+1)a)\}] &\approx \frac{S}{2} \int_0^\beta d\tau \int dx \frac{\delta\omega\{\vec{n}\}}{\delta\vec{n}} \frac{\partial\vec{n}}{\partial x} \\ &= \frac{S}{2} \int_0^{\beta c} dx_0 \int_0^{L=2Na} dx_1 \left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial x_0} \times \vec{n} \right) \frac{\partial\vec{n}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Zbog toga udeo Beri faze u particionoj funkciji može se zapisati kao

$$\sum_{Q=-\infty}^{+\infty} \exp\{-i2\pi SQ\} Z_{nl\sigma}(Q) \quad (5.14)$$

gde Q označava sektore sa fiksiranim topološkim brojem Q - (celim) brojem skirmiona koji klasifikuje konfiguracije sistema:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int dx_0 \int dx_1 \left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial x_0} \times \frac{\partial\vec{n}}{\partial x_1} \right) \vec{n} \quad (5.15)$$

\vec{n} je konstanta zbog uslova preiodičnosti na $[0, \beta] \times [0, L]$ tj. na granicama u (x_0, x_1) koordinatnom sistemu i Q predstavlja topološki broj preslikavanja sa dvodimenzione sfere na sferu jediničnog radijusa. (Uslov periodičnosti garantuje konačnost A_{eff} .)

Na primer, konfiguraciju jediničnog skirmionskog broja možemo zamisliti kao kvadrant u kome strelica (pravac \vec{n}) u centru je upravljena na dole i postepenim okretanjem, u svim pravcima na isti način, ona je konačno upravljena nagore na granicama kvadranta $[0, \beta] \times [0, L]$. Više takvih opisivanja tj. obmotavanja sfere preko rotacija strelice u kvadrantu dovodi do većih skirmionskih brojeva.

Iz (5.14) vidimo da ove fluktuacije tj. konfiguracije u vremenu i prostoru destruktivno interferišu i potiru u slučaju polucelobrojnih spinova tj. lanaca sa, na primer $S = \frac{1}{2}$ i njihov uticaj je veliki - imaju koherentni doprinos u slučaju celih spinova tj. lanaca sa, na primer, $S = 1$. Očekujemo da spinski lanac sa

$S = \frac{1}{2}$ ima veću uredjenost od onoga sa $S = 1$. Medjutim očekivana vrednost klasičnog uredjenog antiferomagnetnog Nèelovog stanja po spinu (čvoru) je

$$E_{Nèel} = -\frac{1}{2}zJS^2 \quad (5.16)$$

gde je z koordinacioni broj - broj najbližih suseda u zavisnosti u kojoj smo dimenziji. Primer neuredjenog sistema je tzv. "dimer" stanje ili stanje valentne veze ("valence bond" - VB) ili spinsko Peirls-ovo ("spin-Peirls") u kome po dva susedna spina (čvora) se udružuju i grade spin-singlet stanje:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_i |\downarrow\rangle_j - |\downarrow\rangle_i |\uparrow\rangle_j) \quad (5.17)$$

Za to stanje očekivana vrednost Heisenberg-ovog hamiltonijana računata po spinu je

$$E_{dimer} = -\frac{1}{2}JS(S+1) \quad (5.18)$$

Vidimo da ipak, u slučaju lanca sa $S = \frac{1}{2}$, $E_{dimer} < E_{Nèel}$ tj. da ipak a saglasno sa Mermin - Wagner-ovom teoremom kvantne fluktuacije onemogućuju prevagu klasičnog Nèelovog stanja koje se predviđa u dve dimenzije ($z = 4$).

Da bismo malo bolje upoznali moguće korelacije u spinskom lancu $S = \frac{1}{2}$ analiziraćemo tzv. XXZ lanac tj.

$$H = J_{\perp} \sum_i (S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y) + J_z \sum_i S_i^z S_{i+1}^z \quad (5.19)$$

Od velike pomoći će nam biti tzv. Jordan - Wigner -ova transformacija kojom možemo preći sa jezika spinova na sliku i jezik jednodimenzionih fermiona f_i :

$$S_i^+ = K(i)f_i^{\dagger} \quad iS_i^- = f_i K(i) \quad (5.20)$$

gde

$$K(i) = \exp\{i\pi \sum_{j=1}^{i-1} f_j^{\dagger} f_j\} \quad (5.21)$$

i

$$S_i^z = f_i^{\dagger} f_i - \frac{1}{2} \quad (5.22)$$

Vidimo da sličnost proizilazi iz identifikacije $|\uparrow\rangle$ stanja sa prisustvom fermiona i $|\downarrow\rangle$ sa odsustvom. Faktor $K(i)$ nadomešta razliku u komutacionim relacijama i sa njim smo se već susreli na jeziku eksponenata bozonskih polja pri razmatranju Luttinger tečnosti. I zaista sa datim definicijama moguće je izraziti (5.19) preko fermionskih varijabli:

$$H = \frac{J_{\perp}}{2} \sum_{i=1}^N (f_i^{\dagger} f_{i+1} + f_{i+1}^{\dagger} f_i) + J_z \sum_{i=1}^N (f_i^{\dagger} f_i - \frac{1}{2})(f_{i+1}^{\dagger} f_{i+1} - \frac{1}{2}) \quad (5.23)$$

Dobili smo hamiltonijan koji opisuje jednodimenzione fermine koji interaguju sa kratkodometnom interakcijom jačine J_z . Ipak primenivši bozonizaciju blizu fermi tačaka koje su definisane uslovom fermionske polupopunjenosti za $S_z^{tot} = 0$, $N = \text{paran broj}$, hamiltonijan se ne može podvesti pod opis Luttinger modela tj. modela u kome su obične gustina - gustina korelacije. Postoje ekstra tzv. Umklapp procesi gde je dozvoljena transformacija fermiona iz jedne grane (oko jedne fermi tačke) u drugu. (Model postaje Sine - Gordon model.) Ti procesi, za dovoljno jako J_z mogu dovesti do prave dugodometne antiferomagnetne uredjenosti. Ipak, u saglasnosti sa Mermin - Wagner-ovom teoremom, slučaj $J_{\perp} = J_z$ (Heisenbergov model) potpada pod niskoenergetski opis i čini fazu Luttinger-ove tečnosti direktno povezane sa slobodnim fermionima sa $J_z = 0$ (XY model) [4, 24]. Zato su spinske korelacije lanca $S = \frac{1}{2}$ quasi-dugodometnog tipa tj. karakterišu se tzv. algebarskim opadanjem kao u slučaju svake Luttinger tečnosti.

Renormalizaciona grupa za nelinearni sigma model

Primenićemo program renormalizacione grupe na nelinearni sigma model sa lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g}(\partial_{\mu}\vec{n})^2, \quad \mu = 1, \dots, d \quad (5.24)$$

i vezom $\vec{n}^2 = 1$ za vektor sa n komponentata [25, 5]. Koristićemo pretpostavku da je g malo i da uvek možemo naći pravac $\hat{n}^0(x)$ koji se sporo menja i oko koga možemo da izvršimo razvoj $\vec{n}(x)$:

$$\vec{n}(x) = \hat{n}^0(x)\sqrt{1 - \bar{\Phi}^2} + \sum_{a=1}^{n-1} \Phi^a \hat{e}^a(x) \quad (5.25)$$

gde

$$\bar{\Phi}^2 = \sum_{a=1}^{n-1} (\Phi^a)^2 \quad (5.26)$$

i $\Phi^a; a = 1, \dots, n - 1$ pretstavljaju “brze” stepene slobode. Ostale “spore” stepene slobode nalazimo u pokretnom koordinatnom sistemu tj.

$$\begin{aligned} \hat{e}^0 &= \hat{n}^0(x) \\ \hat{e}^{\alpha}(x) \cdot \hat{e}^{\beta}(x) &= \delta_{\alpha,\beta} \quad \alpha = 0, 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (5.27)$$

i gejdž potencijalima

$$A_{\mu}^{\alpha,\beta} = \hat{e}^{\alpha} \partial_{\mu} \hat{e}^{\beta} \quad (A_{\mu}^{\alpha\beta} = -A_{\mu}^{\beta\alpha}) \quad (5.28)$$

koji opisuju varijacije bazisa

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \hat{n}^0 &= \sum_a A_{\mu}^{a0} \hat{e}^a \\ \partial_{\mu} \hat{e}^a &= \sum_b A_{\mu}^{ba} \hat{e}^b + A_{\mu}^{0a} \hat{n}^0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

“Brze” fluktuacije $\Phi_a; a = 1, \dots, n-1$ opisujemo momentima u rasponu $\tilde{\Lambda} < |\vec{k}| < \Lambda$ gde Λ je početni cut-off.

Za definisane veličine u aproksimaciji $\bar{\Phi}^2 \ll 1$ važi

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \vec{n} &= \sum_a A_\mu^{a0} \hat{e}^a \left(1 - \frac{1}{2} \hat{\Phi}^2\right) + \sum_{a=1}^{n-1} \nabla_\mu \Phi^a \hat{e}^a \\ &+ \sum_{c=1}^{n-1} \Phi^c \left(\sum_b A_\mu^{bc} \hat{e}^b - A_\mu^{c0} \hat{n}^0\right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Zanemarujući mešane članove [5] imamo da

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu \vec{n})^2 &= (\nabla_\mu \hat{n}^0)^2 + \sum_{a=1}^{n-1} (\nabla_\mu \Phi^a + \sum_{c=1}^{n-1} A_\mu^{ac} \Phi^c)^2 \\ &+ \sum_{a,b=1}^{n-1} (\Phi^a \Phi^b - \bar{\Phi}^2 \delta_{ab}) A_\mu^{a0} A_\mu^{b0} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Isto tako zanemarićemo i prisustvo A_μ^{ac} gejdž polja koji u razvoju po Φ ulaze samo preko svojih izvoda. Novi lagranžijan možemo napisati sa

$$(\nabla_\mu \vec{n})^2 = (\nabla_\mu \hat{n}^0)^2 + \sum_{a,b} \Phi^a (\Pi_0 - \Pi_1) \Phi^b \quad (5.32)$$

gde

$$\begin{aligned} (\Pi_0)_{\vec{k}, \vec{k}'} &= \vec{k}^2 \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \delta_{ab} \\ (-\Pi_1)_{\vec{k}, \vec{k}'} &= \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} [A_\mu^{a0} A_\mu^{b0} - \delta_{ab} \sum_c (A_\mu^{c0})^2] \end{aligned} \quad (5.33)$$

i $|\vec{k}| \in [\tilde{\Lambda}, \Lambda]$. Nameće nam se gausijanska integracija koja dovodi do doprinosa particionoj funkciji:

$$Z^{(2)} \sim \exp\left\{-\frac{1}{2} Tr \ln(\Pi_0 - \Pi_1)\right\} \quad (5.34)$$

gde sprovodimo razvoj po stepenima $A^{a0}(\Pi_1)$:

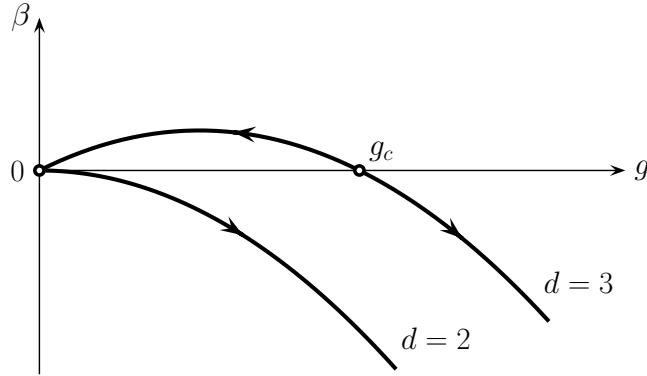
$$-\frac{1}{2} Tr \ln(\Pi_0 - \Pi_1) = -\frac{1}{2} Tr \ln(\Pi_0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Tr(\Pi_0^{-1} \Pi_1)^n \quad (5.35)$$

Zadržavajući se na članu $n = 1$ naše novo, renormalizovano g je

$$\frac{1}{\tilde{g}} = \frac{1}{g} + \Delta_d \quad (5.36)$$

gde

$$\Delta_d = (n-2) \int_{\tilde{\Lambda} < |\vec{k}| < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \quad (5.37)$$



Slika 5.1: β funkcija sa tokovima renormalizacione grupe u zavisnosti od g

Vrednosti Δ_d su

$$\begin{aligned}\Delta_d &= -\frac{(n-2)}{2\pi} \ln \frac{\tilde{\Lambda}}{\Lambda} & d=2 \\ &= \Lambda \frac{(n-2)}{2\pi^2} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\Lambda}}{\Lambda}\right)\right] & d=3\end{aligned}\quad (5.38)$$

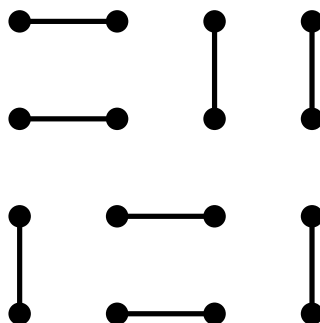
Zato je i prirodno uvesti konstantu kuplovanja koja ne zavisi od dimenzije - mi ćemo jednostavno reskalirati $g : g\Lambda^{d-2} \rightarrow g$ za koje onda važi sledeći tok pri transformacijama renormalizacione grupe:

$$\beta = \frac{df}{d\left(\frac{\tilde{\Lambda}}{\Lambda}\right)} = (d-2)g - \frac{(n-2)}{\zeta_d} g^2 \quad (5.39)$$

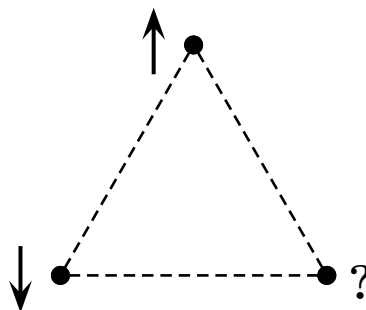
gde $\zeta_{d=2} = 2\pi$ i $\zeta_{d=3} = 2\pi^2$ (Slika 11). Rezultat (5.39) je izveden pod pretpostavkom da drugi članovi višeg reda po Φ i izvodi su irelevantni ili marginalni i takvo zanemarivanje se naziva "Poor Man's Scaling". Ipak naši rezultati su validni pod pretpostavkom malog g .

β funkcija u $d=2$ i za $n=3$ jasno ukazuje da ako želimo da saznamo kakav je efektivni niskoenergetski opis spinskog lanca sa S veliko ($g \sim \frac{1}{S}$ - malo) on je kvalitativno istovetan opisu na jakim kuplovanjima ($S_{eff} \sim malo$) za koje znamo iz opisa klasičnih Heisenberg-ovih feromagneta na visokim temperaturama da opisuju neuredjena stanja. To podrazumeva postojanje energetske procepa (m) i korelacione dužine ($\xi \sim \frac{1}{m}$) koja karakteriše eksponencijalno opadanje korelacija sa rastojanjem.

β funkcija u $d=3$ i za $n=3$ poseduje tzv. fiksnu tačku renormalizacione grupe za $g \neq 0$ koja ukazuje na postojanje faznog prelaza i dve faze: uredjene (sa narušenjem spinske simetrije) i neuredjene. Efektivni opis uredjene faze može se okarakterisati stabilnom fiksnom tačkom u $g=0$ blizu koje je moguć razvoj preko spinskih talasa [5].



Slika 5.2: Moguća konfiguracija spinskih singleta - dajmera



Slika 5.3: Frustracija u trougaonoj rešetci

Spinske tečnosti

U odnosu na Nèel-ovo uređeno stanje primer neuredjenog stanja je VB stanje tj. stanje valentne veze koje smo uveli diskutujući jednodimenzione spinske lance. U dve dimenzije na rešetki takvo stanje može izgledati kao na Slici 12 gde linije sjedinjuju parove spinova (najbližih suseda) u singletna stanja - dajmere. Stanje koje bi bila linearna superpozicija svih mogućih konfiguracija sparivanja, dakle ono koje ne bi narušavalo translacionu simetriju nazivamo stanje rezonirajuće valentne veze - RVB stanje. Uopšte stanje koje ne narušava ni translacionu ni spinsku simetriju nazivamo spinska tečnost.

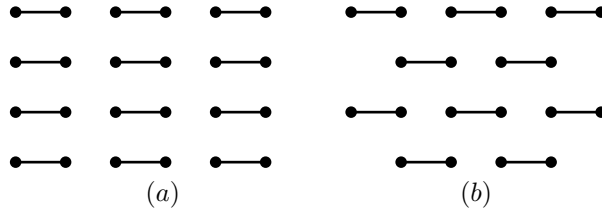
Stanja koja se sastoje od dajmera su verovatnija kada interakcije medju spinovima u rešetki su u nesuglasju sa geometrijom (simetrijom) kristalne rešetke. Takvu pojavu u magnetima nazivamo frustracija i najjednostavniji primer frustriranog magneta je trougona rešetka u kojoj su interakcije opisane Heisenberg-ovim hamiltonijanom. Ako spinovi dve tačke trougla zadovoljavaju težnju interakcije izmedju njih da su suprotnih projekcija na osu kvantizacije treći spin ima slobodu ali i frustraciju u izboru projekcije (Slika 13). Tada stvaranje dajmera je najprirodniji način da se prevaziđe frustracija; spin-singletni VB ima energiju $-\frac{3}{4}J$ koja je niža od običnog klasičnog (Nèel-ovog) sparivanja koje daje

$-\frac{1}{4}J$ i veze koje su frustrirane a nadovezuju se na dajmere ne doprinose totalnoj energiji.

Kvantni dajmer modeli su definisani na Hilbertovom prostoru dajmer pokrivanja rešetki tj. svih pokrivanja valentnim vezama najbližih suseda. Fokus ovih modela je dinamika spin-singleta. Prvi takav model na četvorougaoj rešetki su uveli Rokhsar i Kivelson [26] i njegov hamiltonijan glasi:

$$H = \sum_{\text{po plaketama}} [-J(|\parallel\rangle\langle =| + h.c.) + V(|\parallel\rangle\langle \parallel| + |=\rangle\langle =|)] \quad (5.40)$$

Prvi član opisuje okretanje paralelnih dajmera na jediničnom kvadrantu tj. plaketi. Drugi član se odnosi na susedne dajmere na jednoj plaketi i predstavlja njihovo odbijanje ili privlačenje V . Za $\frac{V}{J} \ll 1$ i $\frac{V}{J} \gg 1$ očigledna su rešenja u obliku VB kristala kao na Slici (a) i (b) respektivno. Tačka $V = J$ je specijalna



Slika 5.4: Kristalna rešenja za (a) $\frac{V}{J} \ll 1$, (b) $\frac{V}{J} \gg 1$ kvantnog dajmer modela.

jer u tom slučaju rešenje je jedno RVB stanje tj. skup svih mogućih pokrivanja rešetke dajmerima. U to se možemo uveriti ako napišemo hamiltonijan kao sumu projektora:

$$H_{J=V=1} = \sum_p |\Psi_p\rangle\langle\Psi_p| \quad (5.41)$$

$$|\Psi_p\rangle = |\parallel\rangle - |=\rangle \quad (5.42)$$

RVB stanje je stanje nula energije - osnovno stanje ovakvog hamiltonijana. Ipak ovo stanje nije i tipična spinska tečnost zato što dajmer-dajmer korelacije nisu kratkog dometa već ispostavlja se algebarski opadajuće tj. sa kvaziuredjenošću i prate postojanje mode bez procepa. Za ovo stanje je lako uočiti postojanje četiri vakuumska sektora na torusu slično diskusiji kojoj smo imali u okviru Laughlin-ovog sistema. Fiksirajući koordinatni sistem na torusu vidimo da je broj dajmera duž longitude i latitute fiksiran broj do na moduo dva uzimajući u obzir dozvoljene operacije u hamiltonijanu što dovodi do postojanja četiri sektora. Prava spinska tečnost sa procepom RVB tipa nadjena je na intervalu $\frac{V}{J}$ ($\frac{2}{3} \lesssim \frac{V}{J} \leq 1$) na sličnom modelu na trouganoj rešetki [27]. Za tu tečnost važi da ima topološku uredjenost sa četiri vakuumska sektora na torusu. Drugim rečima ne postoji lokalni parametar uredjenja koji bi nam ukazivao u kojem smo sektoru. Kao u svakoj topološkoj fazi u ovoj RVB fazi postoje elementarne čestice sa frakcionom statistikom.

Postoje indikacije za spinsku tečnost u eksperimentima na sistemima koje karakterišu rešetke kagome tipa. Kagome rešetku karakteriše veći stepen frustracije u odnosu na trougaonu rešetku i time veća verovatnoća za stanja RVB tipa.

Poglavlje 6

Hubbard-ov model

U tzv. atomskom limitu “overlap” (prekrivanje) talasnih funkcija elektrona vezanih za atome kristalne rešetke je eksponencijalno veoma malo. Eksplicitno važi da

$$\int d^3\vec{r} |\Phi_i^*(\vec{r})\Phi_j(\vec{r})| \sim \exp\left\{-\frac{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|}{l_a}\right\} \quad (6.1)$$

gde su Φ_i i Φ_j orbitale vezane za atome na čvorovima \vec{R}_i i \vec{R}_j i l_a je prosečan radijus atomske orbitale. U tom limitu efekti interakcije se mogu svesti na tzv. “on-site” član (član na čvoru rešetke i):

$$\sum_i U n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \quad (6.2)$$

gde su $n_{i\uparrow}$ i $n_{i\downarrow}$ operatori popunjenosti spina \uparrow i \downarrow elektrona na čvoru i i $U \sim \frac{e^2}{l_a}$. Jedini član koji uzimamo u obzir između čvorova je onaj koji opisuje kretanje sa čvora na čvor i odgovara kinetičkom članu u Bloch-ovom bazu:

$$- \sum_{ij} t c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} \quad (6.3)$$

gde sumiranje vršimo po najbližim susedima.

Samo ta dva člana zajedno čine hamiltonijan Hubbard-ovog modela:

$$H = - \sum_{ij} t c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \sum_i U n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \quad (6.4)$$

koji i pored svoje jednostavnosti u definisanju važi kao težak problem i u čija rešenja imamo samo delimičan uvid.

Kao što smo istakli u uvodu kinetički deo ima težnju da delokalizuje elektrone nezavisno od spina koji poseduju dok interakcioni deo se protivi toj degeneraciji i pri određenim punjenjima tj. odnosu broja elektrona sa brojem čvorova rešetke dovodi do lokalizacije elektrona.

Razmotrićemo limit $U \gg t$. Prirodna podela Fock-ovog prostora je na dva potprostora: (1) potprostor stanja sa popunjenošću čvorova do najviše jedan elektron po čvoru $S = \{|\{n_{i\sigma}\} : \forall i, n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow} \leq 1\}$ i (2) potprostor stanja sa bar nekim od čvorova duplo popunjenim $D = \{|\{n_{i\sigma}\} : \exists i, n_{i\uparrow} + n_{i\downarrow} = 2\}$. Neka projektor P projektuje na stanja potprostora S u kome želimo da vidimo kako glasi efektivan opis Hubbard-ovog hamiltonijana. Hubbard-ov hamiltonijan sadrži dijagonalni, interakcioni član u Fock-ovom prostoru i nedijagonalni, "hopping" član koji povezuje potprostore S i D tj. $H = U + T$. Tada važi dekompozicija

$$H = \begin{bmatrix} P(U+T)P & PT(I-P) \\ (I-P)TP & (I-P)(U+T)(I-P) \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Zainteresovani smo za projektovan zapis rezolventnog operatora [5]: $G(E) = (E - H)^{-1}$:

$$G_{SS}(E) = PG(E)P = (E - H_{eff})^{-1} \quad (6.6)$$

čime definišemo efektivni hamiltonijan. Koristeći

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{SS}^{-1} = (A - BD^{-1}C)^{-1} \quad (6.7)$$

sledi da efektivni hamiltonijan glasi:

$$H_{eff} = P(U+T)P - PT(I-P)[(I-P)(E - (U+T))(I-P)]^{-1}(I-P)TP \quad (6.8)$$

Uvešćemo aproksimaciju $\frac{E}{U} \ll 1$ i $\frac{t}{U} \ll 1$ što će skratiti moguć razvoj na

$$\begin{aligned} H_{eff} &= PTP - PTU^{-1}TP \\ &= P\left(T - \frac{t^2}{U} \sum_{ijk, \sigma\sigma'} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} c_{j\sigma'}^\dagger c_{k\sigma'}\right)P \end{aligned} \quad (6.9)$$

Drugi član u slučaju $i = k$ može se prepisati u obliku

$$H^H = \frac{J}{2} \sum_{i,j} (\vec{S}_i \vec{S}_j - \frac{n_i n_j}{4}) \quad (6.10)$$

gde $J = \frac{4t^2}{U}$ i $\vec{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} c_{i\sigma}^\dagger \vec{\sigma} c_{i\sigma'}$ - operatori spina sa $\sigma_\alpha; \alpha = 1, 2, 3$ Pauli matricama. Kao što vidimo iz (6.9) Heisenberg-ov antiferomagnetni deo hamiltonijana nastaje kao posledica virtuelnih procesa gde elektron odredjenog spina dolazi na susedni čvor koji je popunjen elektronom suprotnog spina, oni mogu izmeniti spinove i elektron se vraća na početni čvor. Time elektron redukuje svoju kinetičku energiju i to navodi elektrone da se organizuju svoje spinove u antiferomagnetnom poretku. Proces vezan za ovu pojavu naziva se "superexchange".

Kada smo tačno na tzv. "half - filling"-u tj. polupopunjenosti atomskih orbitala $H_{eff} = H^H$ i nema transporta naelektrisanja jer je za tako nešto potrebna konačna energija U . Govorimo o Mott-ovom izolatoru. Opštiji problem (6.9), poznat pod nazivom $t - J$ hamiltonijan je težak za rešavanje. Teorije usrednjenog polja sa "slave - boson" formalizmom [28], koji smo upoznali u Kondo problemu, sugerišu rešenja bliska spinskim tečnostima.

Literatura

- [1] J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. Lond. A **276**, 238 (1964).
- [2] B.T. Matthias et al., Phys. Rev. Lett. **5**, 542 (1960).
- [3] P.W. Anderson, Phys. Rev. **124**, 41 (1961).
- [4] N. Nagaosa, *Quantum Field Theory in Strongly Correlated Electronic Systems*, Springer (1999).
- [5] A. Auerbach, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, Springer (1994).
- [6] A.J. Heeger in *Solid State Physics*, ed. F. Seitz, D. Turnbull, and Ehrenreich, Academic Press, NY (1969).
- [7] N. Read and D.M. Newns, J. Phys. C **16**, 3273 (1983).
- [8] P. Coleman, Phys. Rev. B **35**, 5072 (1987).
- [9] J.M. Luttinger, Phys. Rev. **119**, 1153 (1960); D. Mattis and E. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965).
- [10] F.D.M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).
- [11] A.O. Gogolin, A.A. Nersesyan, and A.M. Tsvelik, *Bosonization and Strongly Correlated Systems*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [12] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical field theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [13] A. Chang, L. Pfeiffer, and K. West, Phys. Rev. Lett. **77**, 2538 (1996).
- [14] C.L. Kane and M.P.A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **68**, 1220 (1992)
- [15] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [16] D.C. Tsui, H.L. Stoermer, and A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1599 (1982).

- [17] R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 873 (1983); R.B. Laughlin, Phys. Rev. **B27**, 3383 (1983); R.B. Laughlin, in *The Quantum Hall Effect*, ed. R.E. Prange and S.M. Girvin, Springer (1987).
- [18] F.D.M. Haldane, in *The Quantum Hall Effect*, ed. R.E. Prange and S.M. Girvin, Springer (1987).
- [19] D. Arovas, J.R. Schrieffer, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).
- [20] S.-C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. B **6**, 25 (1992).
- [21] M. Freedman et al., Ann. Phys. **310**, 428 (2004).
- [22] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983).
- [23] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press, Cambridge (2001)
- [24] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, Addison-Wesley, Redwood City (1991).
- [25] A.M. Polyakov, Phys. Lett. B **59**, 79 (1975).
- [26] D. Rokhsar and S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **61**, 2376 (1988).
- [27] R. Moessner and S.L. Sondhi, Phys. Rev. Lett. **86**, 1881 (2001).
- [28] P.A. Lee and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **46**, 5621 (1992).