



Fizički fakultet
Univerziteta u Beogradu

Zlatko B. Papić

Bozonske korelacije u kvantnim Hall-ovim sistemima

diplomska teza

mentor: dr Milica Milovanović

Beograd, oktobar 2006.

Ovaj rad je nastao u Laboratoriji za primenu računara u nauci Instituta za fiziku u Zemunu i njima zahvaljujem na resursima i gostoprimstvu.

...

Sve glavne ideje ovog rada pripadaju mojoj mentorki, dr Milici Milovanović, koja ih je podelila sa mnom uz dozu entuzijazma kakvu sam retko sretao. Njoj posebno hvala.

SADRŽAJ

1	Uvod	1
2	Kvantni Hall-ov efekt	3
2.1	IQHE	4
2.2	FQHE	6
2.3	Kompozitne čestice i $\nu = 1/2$	8
2.4	Dvosloji	9
3	Gejdz teorija za FQHE	13
4	Dvosloj u blizini $d = 0$	20
5	Kvantno razuređenje dvosloja	25
5.1	Probne talasne funkcije za dvosloj	26
5.2	Chern-Simons teorija za dvosloj	31
6	Zaključak	38
A	Fabrikacija uzoraka	40
B	Chern-Simons transformacija	42
C	Funkcije odziva	45

SLIKE

2.1	Kvantni Hall-ov efekat	4
2.2	Kvantni Hall-ov dvosloj	9
2.3	Rezonantno tuneliranje kroz dvosloj	10
2.4	Longitudinalna i Hall-ova otpornost u dvosloju na $T = 350mK$	11
2.5	Polukružni zakon	12
3.1	Chern-Simons transformacija	15
5.1	Korelacije između elektrona	26
5.2	Preklapanje probne talasne funkcije Ψ_1 sa egzaktnim osnovnim stanjem	28
5.3	Korelaciona funkcija gustina-gustina, slučaj Ψ_1	34
5.4	Korelaciona funkcija gustina-gustina, slučaj Ψ_2	36
A.1	GaAs	40
A.2	Litografija	41

GLAVA 1

UVOD

Kvantni Hall-ov efekat (QHE) je, sasvim sigurno, jedno od najvećih otkrića u fizici poslednjih decenija, rame uz rame sa fenomenima superprovodnosti i superfluidnosti. Iako je njegova klasična verzija (koja potiče sa kraja 19. veka) deo standardne metodologije za karakterizaciju materijala, QHE je manifestacija kvantne mehanike *par excellence* na makroskopskim (preciznije, mezoskopskim) skalama i kao takav potpuno je revolucionizovao duboko usađene ideje o sistemima mnoštva čestica. Objašnjenje kvantnog Hall-ovog efekta teče ruku pod ruku sa razvojem tehnologija za sintezu poluprovodničkih nanostrukture, ali i teorijskih koncepata, kakvi su npr. pojam kompozitnih čestica sa frakcionim naelektrisanjem i topoloških teorija polja u dve dimenzije. Kratak pregled trenutnog korpusa znanja o QHE dat je u Glavi 2, gde je uveden i centralni pojam Chern-Simons transformacije kojom elektroni vezuju sa sebe kvante magnetnog fluksa, menjajući pritom statistiku.

Na ovom mestu nije loše skrenuti pažnju na naslov ovog rada koji naglašava *bozonske* korelacije. Osnovni "sastojak" Hall-ovog efekta su, naravno, elektroni, međutim kao i na mnogim drugim mestima u fizici kondenzovanog stanja, mi pažnju usredsređujemo na kvazičestice koje su u limitu malih energija neinteragujuće ili slabointeragujuće. Stoga i fermioni unutar jakointeragujućeg okruženja mogu da "gledano izdaleka" budu bozoni i *vice versa*. Kod supeprovodnosti, bozone predstavljaju slavni Cooper-ovi parovi, dok analogni slučaj kod kvantnog Hall-ovog efekta čine kompozitni bozoni kod FQHE (Glava 3) i dvosloji (Odeljak 2.4, Glava 4). U ovom radu nas primarno interesuju dvosloji. Kvantni fluid u tom slučaju čine elektron iz jednog sloja i šupljina u suprotnom sloju. Kada postoji mehanizam koji kvazičestice čini bozonima, onda se u nekim režimima otvaraju mogućnosti za kondenzaciju i dugodometno uređenje. Specifičnost kvantnog Hall-ovog efekta je da ceo pristup nije moguće izvršiti putem teorije perturbacije jer odsustvuje mali parametar po kome bi se vršio perturbativni razvoj - interakcija je u igri od samog početka! Dugodometno uređenje kod običnog

bozonskog superfluida povezano je sa narušenjem $U(1)$ simetrije, kakvu smo onda simetriju narušili u slučaju dvosloja? Kod dvosloja se radi o simetriji fazne koherencije između slojeva, odnosno ako se bozon sastoji od elektrona i šupljine, nemoguće je reći u kom od slojeva se oni nalaze. Naglasimo da je ovo čisto kvantnomehanički efekat i događa se kada je rastojanje između slojeva manje od neke kritične vrednosti i *pri nultom tuneliranju između slojeva*. Za ovaj složeni sistem dvosloja postoji čitav niz egzotičnih predikcija koje do danas nisu u celosti verifikovane u eksperimentima. U Glavi 2 dat je kratak izbor relevantnih eksperimenata sa dvoslojem.

Glave 3, 4 se jednako mogu shvatiti kao rekapitulacija poznatih rezultata. U njima su razrađene gejdž teorije za kvantni Hall-ov efekat (Glava 3) i dvosloj (Glava 4), koje su, kako je pokazano, u stanju da reprodukuju najbitnije eksperimentalne rezultate i omogućavaju lak proračun funkcija odziva sistema.

Glava 5 je centralna u ovom radu i ona se bavi kvantnim faznim prelazom koji se dešava u dvosloju pri variranju parametra d -rastojanja među slojevima. Ovom problemu je pristupljeno metodom probnih talasnih funkcija koji je i istorijski dao prvo objašnjenje za FQHE. Identifikovane su dve mogućnosti za razuređenje Bose kondenzata, formulisane su talasne funkcije koje njima odgovoraju i upoređene elementarne predikcije ovih modela. U nastavku je ovaj pristup dopunjen efektivnom teorijom polja koja pruža uvid u korelacije i uredenost sistema.

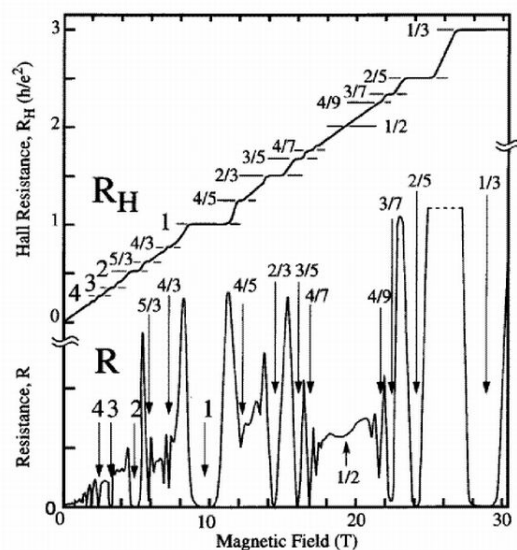
GLAVA 2

KVANTNI HALL-OV EFEKAT: FENOMENOLOGIJA I ISTORIJAT

Klasični Hall-ov efekat je otkriven krajem 19-og veka. U tipičnom eksperimentu, kroz tanak list metala (npr. zlata) se propušta struja, dok u pravcu normale na metal deluje magnetno polje. Elektroni "osećaju" Lorentz-ovu silu koja je normalna na pravac magnetnog polja i početne brzine. Tako se uspostavlja transverzalni, Hall-ov napon, a njemu odgovarajuća Hall-ova otpornost (prema klasičnoj teoriji) linearno zavisi od magnetnog polja. Za razliku od transverzalne, longitudinalna otpornost nema zavisnost od magnetnog polja.

Kvantni Hall-ov efekat (QHE) se dobija u esencijalno istom eksperimentu, samo što umesto lista metala posmatramo tzv. *dvodimenzioni elektronski gas* (2DEG). 2DEG se formira na granici između slojeva kristalne strukture *GaAs-AlGaAs* tako što elektroni bivaju konfinirani potencijalnom barijerom i efektivno se kreću u jednoj ravni. Na visokim magnetnim poljima ($\sim 5 - 20T$) i kriogenim temperaturama ($\sim 10mK$), klasični Hall-ov efekat biva narušen na dramatičan način: umesto linearne zavisnosti Hall-ove otpornosti, uočava se niz platoa (Slika 2.1).

Vrednost otpornosti na platoima je $R_H = \frac{h}{\nu e^2}$, gde je h -Planck-ova konstanta, a ν -ceo broj, pa je fenomen dobio ime *celobrojni* kvantni Hall-ov efekat (IQHE), a otkrili su ga von Klitzing, Dorda i Pepper 1980. godine [2]. Dve godine kasnije, Tsui, Störmer i Gossard [1] su ustanovili da ν može da uzima i vrednosti p/q , gde su najčuvaniji primeri bili $\nu = 1/3, 2/5$ i $3/7$ (Slika 2.1). Ovaj slučaj je nazvan *frakcioni* kvantni Hall-ov efekat (FQHE). U stvari, na istoj slici se vidi da na mestima gde je Hall-ova otpornost kvantovana dolazi i do anuliranja longitudinalne otpornosti - ovo odmah sigeriše da sistem mora da ima nekakav energetski procep (gap) između osnovnog i prvog pobuđenog stanja, međutim, kako će niže biti objašnjeno, poreklo ovog procepa je drugačije prirode za IQHE i FQHE.



Slika 2.1: Kvantni Hall-ov efekat, prema [1].

Kvantni Hall-ov efekat je izuzetan fenomen iz nekoliko razloga. Kvantizacija otpornosti dostiže univerzalnu preciznost od 10^{-9} , što ga čini jednim od najpreciznije merenih efekata u celoj fizici koji služi i za standard jedinice otpornosti. Dalje, paradoksalno, ova univerzalnost i visoka reproducibilnost je sasvim robustna i ne zavisi od prirode i čistoće uzorka na kojem se vrši merenje (štaviše, određena *neidealnost* materijala je neophodna da bi se efekat uopšte video). Ispitivanje QHE je u tesnoj vezi sa razvojem novih tehnologija za fabrikanju nanomaterijala (tehnike epitaksijalnog rasta heterostruktura, pisanja elektronskim snopovima itd., Dodatak A). Konačno, kvantni Hall-ov efekat je jedna od najboljih laboratorija za testiranje jako korelisanih sistema i koncepata koji bi inače predstavljali samo egzotične artefakte u teoriji polja.

2.1 IQHE

Kvantizacija koja se događa kod IQHE je u suštini jednočestični fenomen i svodi se na poznati kvantnomehanički problem kretanja elektrona u ravni pri postojanju magnetnog polja \mathbf{B} normalnog na ravan, koji je rešio Landau [3]. Za potrebe ovog rada, svuda pretpostavljamo da je magnetno polje veoma jako, tako da su svi spinski stepeni slobode efektivno zamrznuti, odnosno elektrone tretiramo kao fermione bez spina koji su opisani sledećim hamiltonijanom:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2 + \sum_i eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (2.1)$$

uz standardne oznake: \mathbf{p}_i -impuls, A^μ -elektromagnetni potencijal i V - potencijalna energija interakcije, gde nas prevashodno interesuje slučaj Coulomb-ove interakcije $V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{\epsilon|\mathbf{r}|}$ (ϵ je dielektrična konstanta materijala), ali u okviru neinteragujuće teorije, svakako, imamo $V \equiv 0$. Naelektrisanje elektrona je $-e$, a (gola) masa m .

Prema Landau-ovom rešenju, energija je kvantovana po tzv. Landau-ovim nivoima (LL): $E = \frac{e\hbar B}{m}(n + \frac{1}{2}) \equiv \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})$, gde je ω_0 ciklotronska frekvencija. Svaki LL ima degeneraciju¹ koja je jednaka Φ/Φ_0 , gde je Φ -magnetni fluks, a Φ_0 -jedinичni magnetni fluks dat izrazom $2\pi\hbar/e$. U daljem tekstu će biti u upotrebi sistem jedinica $\hbar = e = c = 1$, iako će mestimično biti poziva na SI-sistem kada je potrebno da se jasnije sagleda fizička suština. Svojsvene funkcije² za najniži Landauov nivo (LLL) su (u simetričnom gejdžu)

$$\psi_{LLL} = z^m e^{-|z|^2/4l_B^2},$$

gde je $z = x + iy$ -kompleksna koordinata, $m = 0, 1, \dots$ -komponenta angularnog momenta i $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ - prirodna jedinica dužine za problem, tzv. *magnetna dužina*. U daljem tekstu često će gausovski faktor u izrazu za talasne funkcije biti zanemaren.

Za više elektrona, moramo uzeti u obzir da postoji minimalna korelacija koja je nametnuta Paulijevim principom, iako je problem eksplicitno neinteragujući. Veličina od značaja u ovom slučaju je odnos broja čestica N i degeneracije LL, odnosno broja kvanata fluksa:

$$\nu = \frac{N}{\Phi/\Phi_0}. \quad (2.2)$$

Ovaj parametar se zove faktor popunjenosti i ukoliko je ceo broj npr. $\nu = 1$, to znači da je LLL potpuno popunjen, pa je osnovno stanje Slater-ova determinanta:

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_N & z_N^2 & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} \exp \left[-\frac{1}{4l_B^2} (|z_1|^2 + \dots + |z_N|^2) \right]$$

¹Ona potiče od grupe magnetnih translacija, čiji generatori komutiraju sa hamiltonijanom (2.1), [4].

²Umesto polinoma z^m može se uzeti bilo koji bazis prostora analitičkih funkcija [4].

$$= \prod_{i < j} (z_i - z_j) \exp \left[-\frac{1}{4l_B^2} (|z_1|^2 + \dots + |z_N|^2) \right]. \quad (2.3)$$

Osnovno stanje je nedegenerisano i razdvojeno je procepom energije ω_0 od pobuđenih stanja, što implicira da je osnovno stanje nekompresibilno (dodavanje novih elektrona istovremeno znači da bi se neki od postojećih morali da ekscituju u više LL). Ipak, ovo i dalje nije objašnjenje zašto se na Slici 2.1 vide *platoi*. Njihovo postojanje je povezano sa efektom nečistoća u materijalu [5]. One dovode do širenja LL-ova u trake, pri čemu za vrednost energije u centru trake elektronska stanja se prostiru širom kristala, a za ostale vrednosti su lokalizovana. Lokalizovana stanja ne doprinose transportnim svojstvima i stoga u okviru jedne energijske trake nema promene otpornosti. Problem lokalizacije je složen i izlazi iz okvira ovog rada, te mu ne možemo posvetiti adekvatnu pažnju [5],[6].

2.2 FQHE

Na Slici 2.1 je uočljivo da postoje platoi i za necelobrojne vrednosti ν . Kao što je prethodno napomenuto, poreklo ovih platoa ne može se objasniti jednočestičnom slikom kao u slučaju IQHE. Uzmimo, na primer, slučaj $\nu = 1/3$, odnosno kada imamo N -elektrona i $3N$ -stanja u LLL. Degeneracija nivoa u ovom slučaju je ogromna, pošto iznosi $\frac{(3N)!}{N!(2N)!}$, a N je makroskopski broj³. Naivno bi se očekivalo da je ovakvo stanje kompresibilno, međutim eksperimenti ukazuju suprotno. Jedino objašnjenje je da zanemarena elektron-elektron interakcija nekako favorizuje jedno stanje iz cele mnogostrukosti degenerisanih stanja u Hilbertovom prostoru.

Kompletan fizički opis FQHE bi pošao od mikroskopske teorije (koja će ovde biti predstavljena u narednom poglavlju). Istorijski, međutim, stvari su tekle drugačije i objašnjenje FQHE je došlo Laughlin-ovim predlogom varijacione talasne funkcije za osnovno stanje [5]. Laughlin-ov predlog za funkciju osnovnog stanja FQHE u slučaju $\nu = 1/(2k + 1)$ je:

$$\Psi_{\frac{1}{2k+1}}(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2k+1} \exp \left[-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i (|z_i|^2) \right]. \quad (2.4)$$

Kao što se vidi, ovo je varijaciona funkcija bez varijacionog parametra! Stoga, možemo zaključiti da ako ona uopšte valja, mora da u sebi sadrži u neku fundamentalnu informaciju o našem problemu. Veliki broj numeričkih simulacija je pokazao da postoji izuzetno preklapanje između ove varijacione

³Odmah je jasno da je perturbativan pristup potpuno neadekvatan za ovaj problem, a takođe ni Hartree-Fock aproksimacija, primenjena direktno na hamiltonijan (2.1), [6]

funkcije i egzaktnih osnovnih stanja (tipično preko 95%, [5]). Laughlinov izbor možemo u retrospektivi obrazložiti na sledeći način. Prvo, posmatramo potprostor funkcija oblika Jastrow:

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} f(z_i - z_j)$$

(ograničavanjem na ovaj potprostor, u stvari, uzimamo u obzir repulziju između elektrona). Laughlinova funkcija je ona funkcija iz potprostora koja dodatno zadovoljava sledeće uslove:

- Ψ mora da bude antisimetrična, odnosno f mora da bude neparna funkcija;
- pošto se radi o stanju najniže energije, ono mora da bude izgrađeno od jednoelektronskih funkcija iz LLL tj. f mora da bude nekakav polinom po z_i (zbog analitičnosti ne sme da postoji zavisnost od \bar{z}_i).

”Tajna” uspeha Laughlin-ove funkcije je u tome što dobro tretira elektron-elektron korelacije. Iz izraza (2.4) vidi se da talasna funkcija jako brzo opada kada se dve čestice međusobno približe, te se tako minimizira vrednost Coulomb-ove energije (kinetička energija ne igra ulogu, jer se cela fizika odvija u LLL). Preciznije, Laughlin-ova funkcija ima nulu $(2k + 1)$ -og reda kada neki $z_i \rightarrow z_j$. Pošto je ukupan broj nula fiksiran vrednošću ν , talasna funkcija (2.4) postavlja *sve* nule na pozicije drugih elektrona, tako da maksimalno uzima u obzir njihovu međusobnu korelaciju⁴. Dublji uvid u prirodu Laughlin-ove funkcije može se steći pomoću tzv. *plazma analogije* [5]. Naime, iz formule (2.4) nije baš jednostavno videti kakvo stanje ona opisuje, na primer da li je uniformna gustina naelektrisanja. Posmatrajmo normu funkcije:

$$Z \equiv \int d^2 z_1 \dots \int d^2 z_N |\Psi|^2 = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2/\nu} e^{-\frac{1}{2l_B^2} \sum_i |z_i|^2} \quad (2.5)$$

i uvedimo oznaku $|\Psi|^2 = e^{-\beta U}$, gde je $\beta \equiv 2\nu$ i $U \equiv \frac{1}{\nu^2} \sum_{i < j} (-\ln|z_i - z_j|) + \frac{1}{4\nu} \sum_i |z_i|^2$. Kao što oznaka Z sugeriše, normu možemo formalno shvatiti kao partionu funkciju za sistem za koji se ispostavlja da je jednokomponentna $2D$ plazma čestica naelektrisanja $1/\nu$ sa neutrališućim pozadinskim naelektrisanjem (tzv. *jellium* model). Osobina ovakve plazme je da su fluktuacije gustine energijski vrlo ”skupe” i gledano na dužinama većim od Debye-ovog ekraniranja, plazma je elektroneutralna. Dakle, u plazma analogiji nam se pruža mogućnost da kvalitativno razumemo da Laughlin-ova funkcija opisuje *nekompresibilnu tečnost*, stanje koje je potpuno drugačije od Fermi gasa.⁵

⁴Paulijev princip bi zahtevao da samo N nula bude postavljeno na mestima drugih elektrona, a ne svih $N(2k + 1)$ nula.

⁵Nekompresibilnost FQHE stanja je potvrđena u brojnim egzaktnim dijagonalizacijama elektronskog hamiltonijana [5].

2.3 Kompozitne čestice i $\nu = 1/2$

Laughlin-ova konstrukcija za osnovno stanje u slučaju $\nu = 1/2$, na žalost, ne daje dobar rezultat, pošto se njenom primenom dobija funkcija sa bozonskom simetrijom! Rezayi i Read [7] su krenuli od ovakve bozonske funkcije i minimalno je deformisali da bi dobili fermionsku. Konkretno, oni su (2.4) pomnožili sa Slater-ovom determinantom ravnih talasa:

$$\Phi_f = \begin{vmatrix} e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1} & e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2} & \dots \\ e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1} & \dots & \\ \dots & & \end{vmatrix}$$

a zatim izvršili projekciju na LLL (jer član Φ_f u principu može da unese mešanje sa višim LL-ovima), da bi dobili:

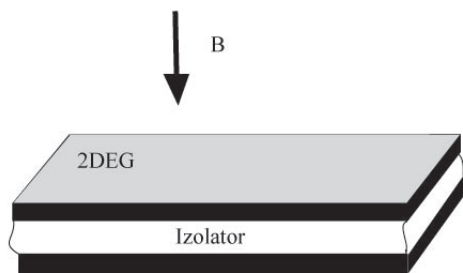
$$\Psi_{1/2} = \mathcal{P}_{LLL}\Phi_f \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 \exp \left[-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i (|z_i|^2) \right]. \quad (2.6)$$

Rezayi-Read talasna funkcija je takođe pokazala dobro poklapanje sa rezultatima numeričkih simulacija na sistemima sa malim brojem elektrona [7]. Postoji još jedan način da se interpretira slučaj $\nu = 1/2$ - u slici kompozitnih čestica koja potiče od Jain-a [8]. Formalno, prelaz u ovu sliku se obavlja unitarnom transformacijom koja je eksplicitno data u (B.6), a može se vizualizovati tako što svaki elektron vezuje za sebe određeni broj kvanata fluksa. U Dodatku B strogo je pokazana ekvivalencija početnog i na ovaj način transformisanog hamiltonijana, dok transformisana talasna funkcija zadržava fermionsku antisimetriju ako je broj kvanata fluksa paran, a inače poprima bozonsku simetriju. U slučaju $\nu = 1/2$ ispostavlja se elektroni vezuju spoljašnje magnetno polje u celosti tj. frakcioni QHE za elektrone na $\nu = 1/2$ je ekvivalentan celobrojnom QHE za kompozitne fermione! Naravno, epistemološki posmatrano, konstrukcija složenijih čestica je uvek moguća, ali ovde (u slici srednjeg polja) ona donosi znatna uprošćenja, pa ima i konceptualni i realni značaj, pošto su mnoge osobine kompozitnih fermiona izmerene u eksperimentima (možda jedna od najspektakularnijih jeste frakciono naelektrisanje, [9]) i smatramo da su oni prirodne čestice⁶ za FQHE [6]. Za potrebe ovog rada, sumiraćemo najbitnije zaključke koji se odnose na $\nu = 1/2$: to je *kompresibilno* stanje i ima Fermi sferu, zadato je Rezayi-Read funkcijom (2.6) a niskoenergijske ekscitacije su kompozitni fermioni.

⁶Stanje $\nu = 1/2$ je prvi put i bilo objašnjeno u slici kompozitnih fermiona [10].

2.4 Dvosloji

Kvantni Hall-ov dvosloj je sistem koji se sastoji iz dve potencijalne jame razdvojene izolatorom (Slika 2.2) i postavljene u normalno magnetno polje.



Slika 2.2: Kvantni Hall-ov dvosloj

Paradigma eksperimenta sa dvoslojem je sledeća: dve *GaAs-AlGaAs* jame širine $\sim 20nm$, sa izolatorom debljine $\lesssim 10nm$, u magnetnom polju koje je podešeno da faktor popunjenosti iznosi $\nu = 1/2$ (za *jedan* sloj). Fizika ovakvog sistema je određena, pre svega, sa dva parametra: srednjim rastojanjem između centara jama (d) i verovatnoćom za tuneliranje iz jednog sloja u drugi.

Prethodno je bilo napomenuto da je za IQHE (i FQHE) prirodna jedinica dužine l_B . Ukoliko je $d \gg l_B$, ne očekujemo nikakvu novost u odnosu na jedan Hall-ov sloj: imaćemo dva nekuplovana Fermi-mora za $\nu = 1/2$ koja su dobro opisana Rezayi-Read talasnom funkcijom (2.6). Sa druge strane, ukoliko je $d \lesssim l_B$, eksperimenti pokazuju da dolazi do kvantizacije otpornosti koja odgovara jednom Hall-ovom sloju sa $\nu_T = 1/2 + 1/2 = 1$. Očigledno, uspostavlja se nekakva koherencija među slojevima i utvrđeno je da ova koherencija preživljava i u limesu nultog tuneliranja, te njen uzrok mora biti (barem delimično) Coulomb-ova interakcija između elektrona. Stoga, nadalje potpuno zanemarujemo tuneliranje i tretiramo isključivo Coulomb-ovu interakciju.

U limitu kada nema tuneliranja (tada su brojevi čestica u svakom od slojeva očuvane veličine), Halperin je prvi predložio talasnu funkciju ("111") za osnovno stanje dvosloja:

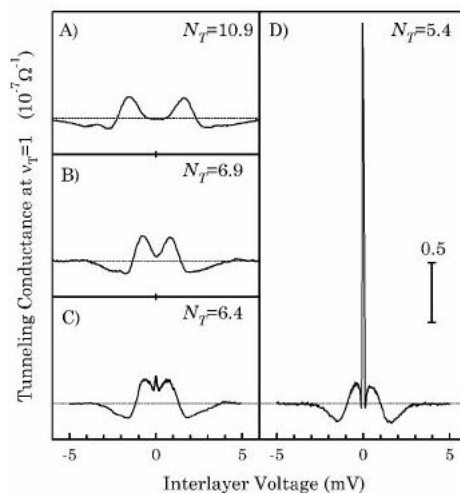
$$\Psi_{111} = \prod_{i < j} (z_{i\uparrow} - z_{j\uparrow}) \prod_{k < l} (z_{k\downarrow} - z_{l\downarrow}) \prod_{m,n} (z_{m\uparrow} - z_{n\downarrow}), \quad (2.7)$$

gde strelice \uparrow, \downarrow označavaju elektrone u gornjem i donjem sloju, respektivno. Proanalizirajmo ovu funkciju sa tačke gledišta (2.4). Ona se, kao što i treba,

anulira kada bilo koje dve čestice iz istog sloja se nađu na istom mestu (prva dva faktora u 2.7). Poslednji faktor unosi novu fiziku: naspram elektrona u jednom sloju ne može se naći elektron u drugom sloju (ili, ekvivalentno, naspram svakog elektrona mora da bude šupljina u drugom sloju). Elektron vezan za šupljinu u naspramnom sloju se zove *eksciton*, odnosno Halperinova funkcija kaže da je osnovno stanje dvosloja ekscitonski kondenzat u kojem je dominantna korelacija *između* slojeva. Za ovaj ekscitonski kondenzat se predviđa da poseduje Goldstonovu (akustičku) modu (koja je posledica narušene simetrije - spontane fazne koherencije među slojevima), Kosterlitz-Thouless fazni prelaz na konačnoj temperaturi i transport bez disipacije kada suprotno usmerene struje jednakih intenziteta teku u slojevima. Sa druge strane, sa porastom d , dolazi do dekuplovanja slojeva i jačaju korelacije *unutar* slojeva. Detalji ovog prelaza su i dalje predmet istraživanja i o njima će biti više reči u Glavi 5. Na ovom mestu možemo se zapitati kako izgleda fizički opis dvosloja u slici kompozitnih čestica koje su uvedene u Odeljku 2.3. Ni sa eksperimentalne, ni sa teorijske tačke gledišta stvari nisu jednako dobro zasnovane kao kod FQHE. Po svemu sudeći [11], fizički opis dvosloja je najprirodniji u slici kompozitnih bozona i ova ideja će biti sleđena u Glavama 4,5.

Na kraju, predstavimo tri kategorije eksperimenata koji ilustruju aktuelne probleme u fizici dvosloja:

- Spielman *et al.* [12],[13] su uočili rezonantni pik u tuneliranju iz jednog sloja u drugi (Slika 2.3).

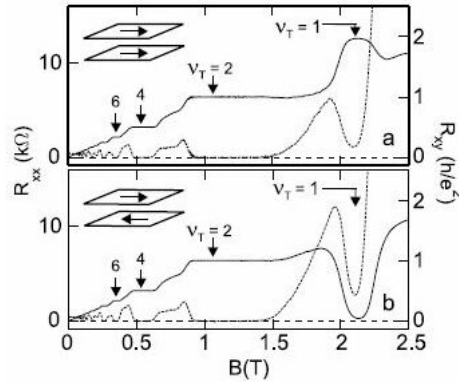


Slika 2.3: Rezonantno tuneliranje kroz dvosloj, prema [12].

Za visoke odnose d/l_B , tuneliranje je energijski potisnuto jer ubacivanje jednog elektrona u jako korelisano, kompresibilno more drugih

elektrona dovodi do potpunog preuređenja sistema, što je dovoljno sporo da blokira tuneliranje. Međutim, kako se d/l_B smanjuje, javlja se pik u konduktanci, odnosno postoji nekakva kolektivna moda koja prebacuje naelektrisanje iz jednog sloja u drugi i Spielman *et al.* zaključuju da se radi o linearnoj, Goldstone-ovoj modi.

- Kellog *et al.* [14] i Tutuc *et al.* [15] su sproveli eksperimente u kojima suprotno usmerene struje jednakih intenziteta teku kroz slojeve (Slika 2.4). Na slici su longitudinalna i Hall-ova otpornost, u konvencionalnom eksperimentu (kada struje kroz slojeve teku paralelno) i kada su struje u slojevima antiparalelne.

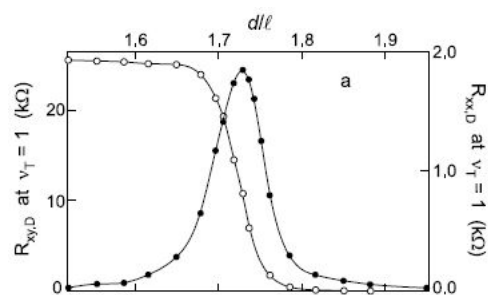


Slika 2.4: Longitudinalna i Hall-ova otpornost na $T = 350mK$. (a) Struje teku paralelno u slojevima. (b) Struje teku antiparalelno (prema [14].)

Uočava se da Hall-ova otpornost u drugom slučaju pada u nulu, što je konzistentno sa idejom ekscitonskog kondenzata. Oba eksperimenta direktno pokazuju da su nosioci naelektrisanja u sistemu elektroneutralni, odnosno da mogu biti elektroni i njima konjugovane šupljine u suprotnom sloju, ali daju različite temperaturske zavisnosti transportnih koeficijenata.

- "Drag" eksperimenti (Kellog *et al.*, [16],[17]) podrazumevaju propuštanje struje $I \sim nA$ kroz jedan sloj i merenje pada napona V_D na drugom (izolovanom) sloju. "Drag" otpornost se definiše kao $R_D = V_D/I$. Ova otpornost je direktna mera relaksacije transporta impulsa među slojevima i, na niskim T i malim d , zavisi isključivo od Coulomb-ovih rasejanja. Na $\nu_T = 1$, longitudinalna i Hall-ova otpornost zadovoljavaju tzv. *polukružnu* zavisnost, Slika 2.5.

Iako na prvi pogled deluje da ovi eksperimenti potvrđuju teorijske predikcije, oni otvaraju i mnoga dodatna pitanja. Na primer, pik na Slici 2.3 podseća na DC Josephson-ov efekat kod superprovodnika, ali očigledno je da ne može



Slika 2.5: Hall-ova (prazni kružići) i longitudinalna (puni kružići) otpornost na $\nu_T = 1$ i $T = 50mK$, kao funkcija d/l_B (prema [17]).

biti reči o pravom Josephson-ovom efektu pošto izmerena provodnost ne prelazi $10^{-2} \frac{e^2}{h}$. Takođe, nije demonstrirano postojanje Kosterlitz-Thouless prelaza na konačnoj temperaturi [16]. O ovim problemima biće više reči u Glavi 5.

GLAVA 3

GEJDŽ TEORIJA ZA FQHE

U Glavi 2 je, iz istorijskih razloga, kvantni Hall-ov efekat bio objašnjen u formalizmu prve kvantizacije, gde je talasna funkcija osnovnog stanja poznata *ab initio* i ne postoji recept da se ona nađe. Sada želimo da ovaj pristup dopunimo efektivnom mikroskopskom teorijom koja bi nam omogućila da izračunamo fizičke veličine (odgovor) sistema i identifikujemo parametar poretka, odnosno uređenje. Zhang, Hansson i Kivelson [18] su razradili jednu takvu teoriju, tipa Landau-Ginzburg-Wilson, koja polazi od "prvih principa" i omogućava da se FQHE razume u okviru opšteg konteksta jako korelisanih sistema. Nadalje će se slediti prikaz ove teorije dat u [18].

Posmatrajmo fermionski sistem u dve dimenzije i u jakom magnetnom polju, opisan hamiltonijanom (2.1) i talasnom funkcijom koja je antisimetrična u odnosu na transpoziciju čestica. Kako je detaljno pokazano u Dodatku B, može se izvršiti mapiranje ovog problema na ekvivalentan *bozonski* problem, zadat hamiltonijanom:

$$\mathcal{H}' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + e\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)]^2 + \sum_i eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (3.1)$$

u kojem se javlja dodatni *Chern-Simons* gejdž potencijal:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\theta}{\pi} \sum_{j \neq i} \nabla_i \alpha_{ij}, \quad (3.2)$$

gde je Φ_0 -kvant fluksa, $\theta = (2k + 1)\pi$, k -ceo broj i α_{ij} -ugao između x -ose i radius-vektora koji spaja čestice j i i . Primetimo da gejdž potencijal koji vidi jedna čestica zavisi od položaja svih drugih čestica. Ova činjenica će imati dalekosežne posledice na mikroskopsko uređenje QHE stanja.

Smisao transformacije U (B.6) je da unosi fazni faktor $e^{\pm i\theta}$ pri transpoziciji dve čestice. Alternativno, možemo ovaj fazni faktor shvatiti kao Aharonov-Bohm efekat u gejdž potencijalu $\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \sum_{j \neq i} \mathcal{A}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, gde je

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \frac{\phi_0 \theta}{2\pi \pi} \left(\frac{-y}{|\mathbf{r}|^2}, \frac{x}{|\mathbf{r}|^2} \right). \quad (3.3)$$

Za proizvoljnu zatvorenu putanju C oko koordinatnog početka, imamo

$$\oint_C \mathcal{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\Phi_0 \theta}{2\pi \pi} \int_0^{2\pi} r d\phi \frac{1}{r} = \Phi_0 \frac{\theta}{\pi}, \quad (3.4)$$

a primenom Stokes-ove teoreme:

$$\oint_C \mathcal{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int d^2\mathbf{r} \nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Iz prethodne dve relacije sledi

$$\nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r}) = \Phi_0 \frac{\theta}{\pi} \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z \quad (3.6)$$

Pošto je (u dve dimenzije) zamena dve čestice ekvivalentna situaciji kada prva od njih miruje, a druga biva zarotirana za ugao π oko prve, vidimo da je promena faze $\Delta\Theta$ jednaka

$$\Delta\Theta = \frac{1}{2} \oint \mathcal{A}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_2 = \theta. \quad (3.7)$$

Ovaj efekat, specifičan za dve dimenzije, zove se statistička transmutacija. Za proizvoljno θ , čestice u 2D mogu imati statistiku koja nije ni Bose ni Fermi tipa.

Dakle, uspostavljena je verna bozonska reprezentacija za početni problem i nadalje radimo isključivo sa bozonskim funkcijama, odnosno operatorima polja koji zadovoljavaju $[\phi(\mathbf{r}), \phi^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Hamiltonijan (3.1) u reprezentaciji druge kvantizacije postaje:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' = \int d^2\mathbf{r} \phi^\dagger(\mathbf{r}) & \left(\frac{1}{2m} [-i\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r}) + e\mathbf{a}(\mathbf{r})]^2 - \mu + eA_0(\mathbf{r}) \right) \phi(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} \int d^2\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'), \quad (3.8) \end{aligned}$$

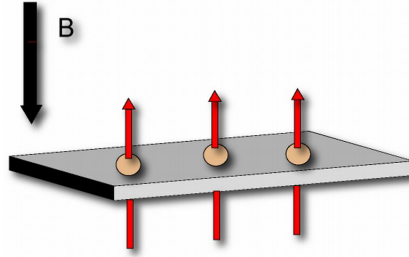
gde je μ -hemijski potencijal, a $\rho(\mathbf{r}) = \phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})$ -operator gustine. Relaciju za gejdž potencijal prepisujemo u obliku

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}' \mathcal{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'). \quad (3.9)$$

Odgovarajuće gejdž polje se lako nalazi:

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathcal{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') = \Phi_0 \frac{\theta}{\pi} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z \quad (3.10)$$

Ova relacija odslikava suštinu Chern-Simons transformacije: gejdž fluks θ/π je vezan za svaku od čestica (Slika 3.1).



Slika 3.1: Chern-Simons transformacija

Uzimanjem divergencije prethodnog izraza, vidimo da gejdž polje ispunjava Coulomb-ov kalibracioni uslov: $\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0$, kad god je $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$. Jednačina (3.10) je veza koju želimo da uključimo u funkcionalni integral - to se može uraditi uvođenjem Lagrange-ovog množitelja a_0 prema sledećem ansatz-u:

$$\begin{aligned} & \prod_{\mathbf{r}, t} \delta\left(\frac{\pi e}{\theta \phi_0} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}, t) - e\rho(\mathbf{r}, t)\right) \\ &= \int \mathcal{D}a_0(\mathbf{r}, t) \exp \left[\frac{\pi e}{\theta \phi_0} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha a_\beta(\mathbf{r}, t) - e\rho(\mathbf{r}, t) \right], \end{aligned}$$

gde smo uveli Levi-Civita tenzor u dve dimenzije $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$.

Konačno, možemo napisati funkcionalni integral za ceo sistem u spoljašnjem polju A_μ :

$$Z[A_\mu] = \int \mathcal{D}a_\mu \mathcal{D}\phi \exp [i\mathcal{S}_{C.S.}[a_\mu] + i\mathcal{S}_\phi[A_\mu + a_\mu, \phi]], \quad (3.11)$$

$$\mathcal{S}_{C.S.}[a_\mu] = \int dt \int d^2\mathbf{r} \frac{\pi e}{\theta \phi_0} \epsilon^{\alpha\beta} a_0 \partial_\alpha a_\beta, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\phi[A_\mu + a_\mu, \phi] = & \int dt \int d^2\mathbf{r} \{ \phi^\dagger(\mathbf{r}) (i\partial_t - e(A_0 + a_0) + \mu) \phi(\mathbf{r}) \\ & - \frac{1}{2m} |(-i\nabla + e(\mathbf{A} + \mathbf{a}))\phi|^2 \\ & - \frac{1}{2} \int dt \int d^2\mathbf{r} \int d^2\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ovde je \mathcal{S} -oznaka za dejstvo koje se sastoji od bozonskog dela, \mathcal{S}_ϕ , i kinetičkog člana za gejdž polje, $\mathcal{S}_{C.S.}$. Mera integracije i preostale oznake su standardne za formalizam funkcionalnih integrala u realnom vremenu [19].

Tretiraćemo integral (3.11) u aproksimaciji srednjeg polja. Bozoni, kao što je u zapisu formule (3.11) naglašeno, efektivno "vide" sumu spoljašnjeg i gejdž potencijala. Ako svaki od potencijala predstavimo u vidu odgovarajuće srednje vrednosti i fluktuacije oko nje (statičko spoljašnje magnetno polje \mathbf{B} je uzeto u negativnom smeru z -ose), za efektivno polje koje vide bozoni dobija se:

$$\mathbf{B}_{eff} = \nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{A}) = -B\mathbf{e}_z + \phi_0 \frac{\theta}{\pi} \rho \mathbf{e}_z. \quad (3.14)$$

Pošto je θ izraženo preko k , koji je proizvoljan neparan ceo broj, može se dogoditi da desna strana prethodne relacije bude jednaka nuli. Tada bozoni efektivno ne osećaju nikakvo polje. Primenom (2.2), lako se vidi da se ovo događa za

$$\nu = \frac{1}{2k + 1}. \quad (3.15)$$

Dakle, elektroni koji se nalaze u stanju FQHE za proizvoljno ν sa neparnim imeniocem se mogu shvatiti kao Chern-Simons bozoni koji interaguju kratkodometno i nalaze se *van* spoljašnjeg polja. Ovo su preduslovi za nastajanje Bose-kondenzacije i superfluidnosti. Da bismo detaljnije ispitali šta se događa, korišćićemo Madelung-ov ansatz koji bozonsko polje $\phi(\mathbf{r})$ predstavlja u obliku proizvoda amplitude $\rho(\mathbf{r})$ i faze $\theta(\mathbf{r})$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})}. \quad (3.16)$$

Zamenom u (3.13) može se ekstrahovati bozonska gustinu lagranžijana:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\phi &= \{\rho(-\partial_t\theta - e(A_0 + a_0) + \mu)\} \\
 &\frac{1}{2m}\rho(\nabla\theta + e(\mathbf{A} + \mathbf{a}))^2 - \frac{1}{8m}\rho^{-1}(\nabla\rho)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Metodom najbržeg spusta [19], pod pretpostavkom da tako dobijeno rešenje ne zavisi od prostorno-vremenskih promenljivih, dobija se vrednost ρ_0 koja odgovara ekstremumu dejstva:

$$\rho_0 = \frac{\mu}{\tilde{V}(0)} > 0. \tag{3.18}$$

($\tilde{V}(k)$ je Fourier transform od $V(\mathbf{r})$). Bozonska amplituda se sada može zapisati kao zbir stacionarne vrednosti ρ_0 i fluktuacije $\delta\rho$. Razvojem do drugog reda po $\delta\rho$ i $\partial_\mu\theta + e(a_\mu + A_\mu)$ dobija se:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\phi &= \{\delta\rho(-\partial_t\theta - e(A_0 + a_0)) \\
 &\quad - \frac{\rho_0}{2m}(\nabla\theta + e(\mathbf{A} + \mathbf{a}))^2 - \frac{1}{8m}\rho_0^{-1}(\delta\rho)^2\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta\rho(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}'). \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Član koji je proporcionalan sa $(\nabla\delta\rho)^2$ otpada u poređenju sa poslednjim (u dugotalasnom limesu). Nakon Fourier transformacije ($k \equiv (\omega, \mathbf{k})$) i integracije po $\delta\rho$ (koja se svodi na gausovsku, pošto su svi članovi u kojima figuriše $\delta\rho$ najviše drugog stepena), dobija se efektivni lagranžijan za fazni stepen slobode:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2\tilde{V}(\mathbf{k})} (-i\omega\theta(-k) - e(A_0(-k) + a_0(-k))) \\
 &\quad \times (i\omega\theta(k) - e(A_0(k) + a_0(k))) \\
 &\quad - \frac{\rho_0}{2m} (-i\mathbf{k}\theta(-k) + e(\mathbf{A}(-k) + \mathbf{a}(-k))) \\
 &\quad \times (i\mathbf{k}\theta(k) + e(\mathbf{A}(k) + \mathbf{a}(k))) \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Ukupno dejstvo dato je sumom $\mathcal{S}[\theta, a_\mu, A_\mu] = \mathcal{S}_{C.S.}[a_\mu] + \mathcal{S}_\theta[\theta, a_\mu + A_\mu]$. Da bi dobili odgovor sistema, neophodno je prointegraliti po svim preostalim stepenima slobode (θ, a_μ) . Integracija po a_μ se lakše obavlja u Coulomb-ovoj kalibraciji:

$$a_\alpha(k) = \frac{i\epsilon^{\alpha\beta}k_\beta}{|\mathbf{k}|}a_T(k), \quad (3.21)$$

gde grčki indeksi označavaju prostorne koordinate, a T je oznaka za transversalnu komponentu. Ova je gejdž ima vrlinu u $2D$ što se sva računanja sprovode samo sa jednom prostornom i jednom vremenskom komponentom. Kada se polja zapišu u transversalnoj kalibraciji, integracija se opet svodi na gausovsku i kao konačan rezultat se dobija:

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{2} \tilde{\pi}_{\mu\nu}(k) A_\mu(-k) A_\nu(k), \quad (3.22)$$

gde su koeficijenti $\tilde{\pi}_{\mu\nu}$ eksplicitno zapisani u Dodatku C. Ovde nas trenutno interesuje samo član koji se kupluje sa A_0^2 - on predstavlja kompresibilnost sistema:

$$\kappa = \lim_{k \rightarrow 0} \tilde{\pi}_{00}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tilde{V}(0)} (|\mathbf{k}|/2\theta)^2}{\frac{1}{\tilde{V}(0)} \frac{\rho_0}{m} + (|\mathbf{k}|/2\theta)^2} \quad (3.23)$$

Ukoliko pretpostavimo da je gustina ρ_0 -konačna, što je u skladu sa ponašanjem superfluida, vidi se da kompresibilnost (3.23) teži 0. Zaključujemo da se radi o *nekompresibilnoj* tečnosti. Pogled unazad pokazuje da je ovaj zaključak mogao biti anticipiran: nekompresibilnost je posledica Meissner-ovog efekta Bose kondenzata [18]. Naime, u komentaru relacije (3.10) je napomenuto da gejdž polje u direktnoj vezi sa gustinom čestica. Svaka promena gustine bi uzrokovala promenu fluksa gejdž polja, ali zbog Meissner-ovog efekta ovo je zabranjen proces, tako da se gustina opire ovakvim fluktuacijama i sistem se ponaša nekompresibilno. Takođe, iz opštih izraza za funkcije odziva, lako se vidi je provodnost kvantovana, baš kao što i treba, u jedinicama e^2/h , [18]. Za uobičajeni Bose superfluid znamo da je parametar poretka faza talasne funkcije koja opisuje kondenzat i da se Bose kondenzacija može shvatiti kao sponatno narušenje $U(1)$ simetrije, [19],[20],[18]. Alternativno, uređenje sistema se može dijagnostifikovati posmatranjem očekivane vrednosti izraza

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \langle \phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}') \rangle. \quad (3.24)$$

Ovo je element matrice gustine [3]; kondenzacija se manifestuje u nenultoj vrednosti gornje granične vrednosti (za bozone u nultom polju to je

konstanta), kada se kaže da postoji *dugodometno uređenje* (ODLRO¹). Nastavićemo sa ispitivanjem analogije između Bose superfluida i FQHE, trećeći signal ODLRO-a (3.24). Za to je potrebno vratiti se na početni izraz za dejstvo $\mathcal{S}[\theta, a_\mu, A_\mu]$ (3.13) i eliminisati a_μ , uz uslov $A_\mu = 0$. Račun se ni po čemu ne razlikuje od već pojašnjenih i kao konačan rezultat sledi:

$$\mathcal{L}[\theta, A_\mu = 0] = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2}{\tilde{V}(\mathbf{K}) + (\rho_0/4m)(4\theta/|\mathbf{k}|)^2} - \frac{\rho_0}{m} |\mathbf{k}|^2 \right] \theta(-\mathbf{k})\theta(\mathbf{k}). \quad (3.25)$$

Korelaciona funkcija se može direktno pročitati iz ovog kvadratičnog lagranžijana:

$$\langle \theta(-k)\theta(k) \rangle = \frac{\frac{2\pi}{\nu}\omega_C \frac{1}{k^2} + \tilde{V}(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega_k^2}, \quad (3.26)$$

gde je $\omega_k^2 = \omega_C^2 + \frac{\rho_0}{m} k^2 \tilde{V}(\mathbf{k})$, $\omega_C = \frac{2\pi\rho_0}{m\nu}$. Statička korelaciona funkcija je:

$$\langle \theta(-\mathbf{k})\theta(\mathbf{k}) \rangle = -i \int \frac{d\omega}{2\pi} \langle \theta(-k)\theta(k) \rangle = -\frac{1}{2\nu} \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|^2} + o\left(\frac{1}{|\mathbf{k}|}\right). \quad (3.27)$$

Prelaskom u realni prostor, izraz (3.24) postaje:

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \langle \phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}') \rangle &= \rho_0 \langle e^{i\theta(\mathbf{r})-i\theta(\mathbf{r}')} \rangle \approx \rho_0 e^{\langle \theta(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r}') \rangle} \\ &\propto \rho_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1/2\nu}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

gde je u prvom redu primenjen razvoj eksponenta, a potom Wick-ova teorema. Dobijeni ODLRO je algebarskog tipa i ne zavisi od interakcije V . Očigledno, ne radi se o običnom Bose superfluidu - modifikacija ODLRO-a je potekla od (3.2). Naime, gejdž potencijal koji vidi jedna čestica zavisi od položaja svih drugih čestica i ovo dovodi do stepenog zakona (3.28).

Laughlinova talasna funkcija (2.4) prirodno sledi iz lagranžijana (3.25) kao osnovno stanje ([18], i iscrpnije u [20]). Dakle, sa sigurnošću možemo tvrditi da Chern-Simons teorija dobro opisuje FQHE na niskim energijama. Kao kod superfluidnosti, i ovde postoje ekscitacije u vidu vorteksa koje sistematski zanemarujemo u ovom radu, uz napomenu da vorteksi, pored kvantovane cirkulacije koja je prisutna kod običnih superfluida, ovde imaju frakcionu statistiku i naelektrisanje, spomenute u Glavi 2.

¹Off-diagonal long-range order.

GLAVA 4

TEORIJA ZA DVOSLOJ U BLIZINI $d = 0$

U Glavi 2 objašnjena je fenomenologija kvantnog Hall-ovog dvosloja $\nu_T = 1$. Osnovni izazov koji opstaje i nakon više od deceniju intenzivnog istraživačkog rada jeste priroda kvantnog faznog prelaza koji se događa variranjem parametra d -rastojanja između slojeva. I kada nema tuneliranja, za d manje od neke kritične vrednosti (koja je reda magnetne dužine) sistem prelazi u nekompresibilnu fazu u kojoj postoji spontana koherencija među slojevima. Za velike vrednosti d , naravno, slojevi su dekuplovani i i svaki ponaosob je kompresibilno stanje koje poseduje neke osobine Fermi tečnosti. Teorijska paradigma, u formalizmu prve kvantizacije, je Halperin-ova talasna funkcija (2.7). Podsetimo, ova talasna funkcija je zapisana uzimajući u obzir da ne postoji tuneliranje između slojeva, tako da je broj elektrona u svakom od slojeva očuvana veličina. Formalno, možemo zamisliti da se radi o dve vrste elektrona, z_\uparrow i z_\downarrow , koji su korelisani na dva načina: unutar i među slojevima. Odatle je sledila formula (2.7) koja je, strogo gledano, validna jedino u slučaju $d = 0$. U ovoj Glavi će biti pokazano da se ista formula može dobiti kao osnovno stanje jedne Chern-Simons teorije, iz koje automatski sledi i separacija spina i naelektrisanja, neutralna Goldstone-ova moda sa linearnom disperzijom i pravi ODLRO u spinskom kanalu. Neki od ovih zaključaka su prethodno već bili dobijeni moćnijim teorijama (od kojih su najprominentniju razvili Moon *et al.* u [21]), ali Chern-Simons pristup ima prednost u tome što na vrlo transparentan način daje kvalitativno dobre predikcije i ovo nas motivise da ga dalje razvijamo.

Podimo od lagranžijana:

$$\mathcal{L}_{111} = \sum_{\sigma} \{ \phi_{\sigma}^{\dagger} (i\partial_t - a_0 + A_0 + \sigma B_0) \phi_{\sigma} - \frac{1}{2m} |(-i\nabla + \mathbf{a} + \mathbf{A} + \sigma \mathbf{B}) \phi_{\sigma}|^2 \}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} a_0 (\nabla \times \mathbf{a}) \\
& - \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r}' \sum_{\sigma, \sigma'} \delta \rho_{\sigma}(\mathbf{r}) V_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta \rho_{\sigma'}(\mathbf{r}')
\end{aligned} \tag{4.1}$$

gde $\sigma = \uparrow, \downarrow$ prebrojava slojeve, \mathbf{a} je Chern-Simons polje, A_{μ}, B_{μ} su spoljašnja polja, pri čemu se B kupluje sa σ , pseudospinskom promenljivom (B može da bude, na primer, električno polje usmereno suprotno u gornjem i donjem sloju), dok je interakcija između slojeva opisana sa $V_{\sigma, \sigma'}$ (iz simetrije, $V_{\uparrow, \uparrow} = V_{\downarrow, \downarrow} \equiv V_a$ i $V_{\uparrow, \downarrow} = V_{\downarrow, \uparrow} \equiv V_e$). Interakcioni deo se može, uvodeći smenu $V_C = \frac{V_a + V_e}{2}, V_S = \frac{V_a - V_e}{2}$, dijagonalizovati u :

$$-\frac{1}{2} \delta \rho V_C \delta \rho - \frac{1}{2} \delta \rho_S V_S \delta \rho_S, \tag{4.2}$$

gde je $\delta \rho \equiv \delta \rho_{\uparrow} + \delta \rho_{\downarrow}$ i $\delta \rho_S \equiv \delta \rho_{\uparrow} - \delta \rho_{\downarrow}$. Primetimo da lagranžijan (4.1) u limesu $d \rightarrow 0$ ima $SU(2)$ simetriju, ali prisustvo člana V_S tu simetriju narušava do na $U(1)$.

Kao i do sada, radimo u Coulomb-ovom gejdžu (3.21), a integracija po a_0 daje sledeću vezu:

$$\nabla \times \mathbf{a} = 2\pi \delta \rho. \tag{4.3}$$

Bozonska polja ćemo tretirati Madelung-ovim ansatzem:

$$\phi_{\sigma} = \sqrt{\rho_{\sigma} + \delta \rho_{\sigma}} e^{i\theta_{\sigma}},$$

ali je prethodno zgodnije faze izraziti u vidu linearnih kombinacija $\theta \equiv \theta_{\uparrow} + \theta_{\downarrow}, \theta_S \equiv \theta_{\uparrow} - \theta_{\downarrow}$ i uvesti oznake $\delta \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + \mathbf{A}, \bar{\rho} \equiv \bar{\rho}_{\uparrow} = \bar{\rho}_{\downarrow}$. Nakon Fourier transformacije lagranžijan (4.1) se raspada na deo koji sadrži samo θ i opisuje naelektrisanje (tzv. *charge* kanal) i deo sa θ_S - pseudospinski kanal:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{111} = & \frac{i\omega}{2} \delta \rho \theta + \delta \rho A_0 - \frac{\bar{\rho} k^2}{4m} \theta^2 - \frac{\bar{\rho}}{m} (\delta a)^2 - \frac{1}{2} \delta \rho V_C \delta \rho \\
& + \frac{i\omega}{2} \delta \rho_S \theta_S - \delta \rho_S B_0 - \frac{\bar{\rho} k^2}{4m} \theta_S^2 - \frac{\bar{\rho}}{m} B^2 - \frac{1}{2} \delta \rho_S V_S \delta \rho_S,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

uz uslov (4.3). Parametar $\frac{\bar{\rho}}{m}$ se zove čvrstina (*stiffness*), pošto član uz koji stoji zavisi od kvadrata gradijenta θ , dakle elastične je prirode (kao da se faza ponaša kao čvrsto telo). Gornja formula je zapisana u krajnje kompaktnoj notaciji, kako će i nadalje biti činjeno, pa je potrebno čitati je uz

određen oprez. Na primer, svuda su potisnute zavisnosti od k , odnosno $-k$, a kvadratni članovi tipa $[X + Y]^2$ su u stvari $[X(-k) + Y(-k)][X(k) + Y(k)]$. Separacija koju smo dobili u (4.4) je važna zbog toga što pri projekciji na LLL operatori spina i naelektrisanja ne komutiraju [21], pa interakcija ova dva stepena slobode proizvodi zanimljive fizičke efekte (npr. kada se rotira spin, pomera se i naelektrisanje). U okviru Chern-Simons pristupa, imamo mogućnost da paralelno ispitujemo oba stepena slobode na jednostavan način. Na primer, za kanal naelektrisanja, lako se može dobiti $\rho - \rho$ korelaciona funkcija (prostom integracijom po θ i a), iz koje se vidi da je sistem nekompresibilan za $k, \omega \rightarrow 0$. Uređenje (ODLRO) je algebarskog tipa, kao i u (3.28), jer je efektivni lagranžijan:

$$\mathcal{L}_C = \frac{1}{2}\theta(-k)\frac{1}{4}\frac{\omega^2 - \omega_k^2}{V_C(k) + (\frac{2\pi}{k})^2\frac{2\bar{\rho}}{m}}\theta(k), \quad (4.5)$$

gde je $\omega_k^2 = \omega_C^2 + \frac{2\bar{\rho}}{m}k^2V_C(k)$ i $\omega_C = \frac{4\pi\bar{\rho}}{m}$, a prethodno je uzeto $A_\mu = 0$. Korelator je:

$$\langle\theta(-k)\theta(k)\rangle = -2 \times \frac{2\pi}{k^2} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad (4.6)$$

što je identično rezultatu za jedan sloj (upor. 3.27) i samim tim, ODLRO

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\rightarrow\infty}\langle\phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}')\rangle \propto \langle e^{i(\theta(\mathbf{r})-\theta(\mathbf{r}'))}\rangle \sim |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-2}, \quad (4.7)$$

je istog, algebarskog tipa, kao i kod običnog FQHE. Zanimljivija je situacija u pseudospinskom kanalu. Tamo se za efektivni lagranžijan dobija:

$$\mathcal{L}_{PS} = \frac{1}{2}\theta_S(-k)\frac{\omega^2 - \frac{2\bar{\rho}}{m}V_S(k)k^2}{4V_S(k)}\theta_S(k). \quad (4.8)$$

I ova formula je izvedena pod pretpostavkom da je spoljašnje polje $B_\mu = 0$ (kompletan linearni odgovor u pseudospinskom kanalu dat je u Dodatku C). Odavde je korelaciona funkcija:

$$\langle\theta_S(-k)\theta_S(k)\rangle = \frac{4V_S(k)}{\omega^2 - \frac{2\bar{\rho}}{m}V_S(k)k^2}. \quad (4.9)$$

Iz njenog pôla nalazi se disperziona relacija za pseudospinsku modu:

$$\omega^0(k) = \sqrt{\frac{2\bar{\rho}}{m}V_S(k)} \cdot k, \quad (4.10)$$

i ovo je dobro poznata akustička moda iz teorije superfluidnosti [20], do koje su u analizi dvosloja stigli i K. Moon *et al.* [21]. U dugotalasnom limesu, imamo da je $V_S(k) = \frac{1}{2\epsilon}(\frac{2\pi}{k} - \frac{2\pi}{k}e^{-kd}) \approx \frac{\pi}{\epsilon}d$, pa zamenom vrednosti za efektivnu masu $m \approx 0.07m_e$, gustinu $\bar{\rho} \approx 2.5 \times 10^{10} \text{cm}^{-2}$, rastojanje među slojevima $d/l_B = 1.6$, i dielektričnu konstantu $\epsilon = 12.6$, dobija se da Goldstone-ova moda premašuje izmerenu vrednost u [12] za faktor 10, što ilustruje kvantitativnu slabost Chern-Simons teorije (ona ne može mnogo toga da kaže o parametrima, kakav je npr. m , za koji je uzeta obična efektivna masa u *GaAs*).

Korelaciona funkcija za θ_S u realnom prostoru je:

$$\langle \theta_S(\mathbf{r})\theta_S(\mathbf{r}') \rangle = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sqrt{\frac{md}{2\pi\epsilon\bar{\rho}}}, \quad (4.11)$$

te u pseudospinskom kanalu postoji pravi ODLRO:

$$\langle \phi^\dagger(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}') \rangle \propto \lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} e^{\langle \theta(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r}') \rangle} \longrightarrow \text{const.} \quad (4.12)$$

Dakle, u pseudospinskom kanalu, sistem je superfluidan, kompresibilan i ima linearnu (akustičku) modu, koja je uzrok Slike 2.3.

Halperin-ova funkcija (2.7) prirodno sledi iz lagranžijana (4.1). Posmatrajmo za početak deo koji odgovara kanalu naelektrisanja. U njemu se θ i $\delta\rho$ sprežu u Berry-jevom članu, što znači da su konjugovane varijable i važi komutaciona relacija $[\theta(\mathbf{k}), \delta\rho(\mathbf{k}')] = 2i\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$. Hamiltonijan koji se odnosi na sektor naelektrisanja je:

$$\mathcal{H}_C = \frac{\bar{\rho}}{m} \left[\frac{k^2}{4}\theta(-k)\theta(k) + \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2\delta\rho(-k)\delta\rho(k) \right] + \frac{1}{2}\delta\rho(-k)V_C(k)\delta\rho(k) \quad (4.13)$$

gde je iskorišćena veza za gejdž polje (4.3). Uvođenjem smene $\theta(k) \rightarrow -2i\frac{\partial}{\partial\delta\rho(-k)}$, prepoznaje se hamiltonijan linearnog harmonijskog oscilatora i talasna funkcija osnovnog stanja je:

$$\Psi_{osn} \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_k \frac{2\pi}{k^2} \delta\rho(-k)\delta\rho(k) \right]. \quad (4.14)$$

Koristeći da je $\delta\rho(\mathbf{r}) = \sum(\mathbf{r} - \mathbf{z}_{i\uparrow}) + \sum(\mathbf{r} - \mathbf{z}_{i\downarrow}) - \bar{\delta\rho}$, prelaskom na realni prostor (uz neke suptilnosti oko integracije, objašnjene u [20]), dobija se da je Ψ_{osn} zapravo jednako modulu Halperinove funkcije:

$$\Psi_{osn} = |\Psi_{111}|. \quad (4.15)$$

Ovo je talasna funkcija u bozonskoj slici. Originalna fermionska talasna funkcija se dobija inverznom Chern-Simons transformacijom koja u ovom slucaju glasi:

$$U = \prod_{i < j} \frac{z_{i\uparrow} - z_{j\uparrow}}{|z_{i\uparrow} - z_{j\uparrow}|} \prod_{k < l} \frac{z_{k\downarrow} - z_{l\downarrow}}{|z_{k\downarrow} - z_{l\downarrow}|} \prod_{m,n} \frac{z_{m\uparrow} - z_{n\downarrow}}{|z_{m\uparrow} - z_{n\downarrow}|}. \quad (4.16)$$

Nakon delovanja U dobija se baš 111 funkcija: $U\Psi_{osn} = \Psi_{111}$. Međutim, u ovom izvođenju je korišćen okrnjeni hamiltonijan bez pseudospinskog dela. Analogan račun pokazuje da na $d = 0$ pseudospinski doprinos talasnoj funkciji je konstanta koja nema nikakvog uticaja. Sa druge strane, jasno je da za $d \neq 0$ funkcija osnovnog stanja više nije 111 funkcija nego nekakva modifikacija o kojoj sa tačke gledišta ovde iznete teorije ne možemo ništa tvrditi. Međutim, rigidnost Bose kondenzata [22] utiče na to da je 111 funkcija zadovoljavajuća i za konačne vrednosti d koje su manje od magnetne dužine. U režimu $d \sim l_B$ na scenu stupaju kvantne fluktuacije koje razuređuju Bose kondenzat i osnovno stanje počinje da pokazuje znatnu devijaciju u odnosu na 111.

GLAVA 5

KVANTNO RAZUREĐENJE

111-STANJA

Fizika kvantnog Hall-ovog dvosloja je uslovljena kompeticijom dveju vrsta korelacija: među elektronima u suprotnim slojevima i između elektrona u istom sloju. Za malo d/l_B dominantan je prvi tip korelacija i postoji nekoliko teorijskih modela koji ga na odgovarajući način uzimaju u obzir: 111-stanje (dato funkcijom 2.7), kvantni Hall-ov feromagnet [21], kondenzat kompozitnih bozona ili ekscitona (Glava 4). Ipak, teorijski i eksperimentalno, jasno je da povećavanjem d/l_B dolazi do kvantnog razuređenja ovog stanja. Na primer, pik u tuneliranju (Slika 2.3) jeste oštar ali ima konačnu širinu, dok temperaturne zavisnosti Hall-ove i longitudinalne otpornosti u eskperimentima [16],[15] ne daju potvrdu predviđenog scenarija za Kosterlitz-Thouless fazni prelaz. Razumevanje prelaza na $d \sim l_B$ je važan, otvoren problem u fizici kvantnih Hall-ovih dvosloja i jako korelisanih sistema uopšte.

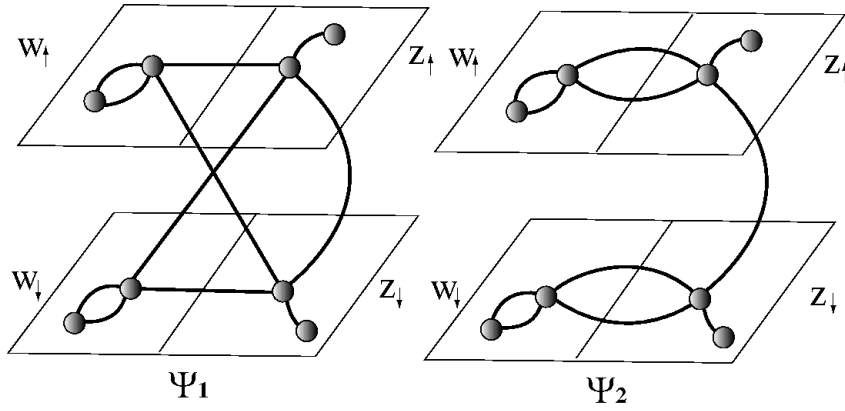
U ovoj Glavi će biti izloženi neki rezultati vezani za problem kvantnog razuređenja dvosloja. Osnovno stanje $d = 0$ je Bose kondenzat opisan 111-funkcijom (2.7). Niskoenergetske ekscitacije u ovom slučaju su kompozitni bozoni tj. elektroni odeveni sa jednim kvantom fluksa (Glava 3). Ideja razuređenja je da pri povećanju d/l_B dolazi do formiranja kompozitnih fermiona ¹ koji koegzistiraju zajedno sa kompozitnim bozonima [22]. Postoje dva načina da se (sa aspekta korelacija) uvedu kompozitni fermioni u Bose kondenzat i to će biti učinjeno u Odeljku 5.1. Zatim će biti ispitane elementarne predikcije ovakvih modela na bazi jedne fenomenološke Chern-Simons slike. U nastavku (Odeljak 5.2), kao i u prethodnoj Glavi, biće data efektivna gejdž teorija za oba slučaja i izvedene korelacione funkcije, mode niskoenergijskih ekscitacija i karakteristično uređenje (ODLRO), sa akcentom na fizički zanimljivijem, pseudospinskom kanalu. Sadržaj ove Glave se mahom oslanja na radove Simon *et al.* [22] i Milovanović [23], a mes-

¹U smislu Chern-Simons transformacije, to su isti elektroni samo odeveni sa *dva* kvanta fluksa.

timično će biti prezentovani rezultati koji do trenutka pisanja nisu objavljeni u literaturi.

5.1 Probne talasne funkcije za dvosloj

Sledeći Laughlin-ov predlog talasne funkcije za jedan sloj, konstrukciju Rezayi-Read talasne funkcije za $\nu = 1/2$ (2.6), te diskusiju oko Halperin-ove 111-funkcije za dvosloj (2.7), možemo zamisliti da u svakom od slojeva imamo dve vrste elektrona (z, w) koji su svi međusobno kuplovani intrakorelacijama (unutar jednog sloja) i interkorelacijama (između slojeva), Slika 5.1.



Slika 5.1: Korelacije između elektrona u dva sloja.

Krenućemo od 111-funkcije koja opisuje Bose kondenzat i minimalno je deformisati da bi se u nju uključili kompozitni fermioni. Pošto svaka čestica mora da vidi isti broj kvanata fluksa i pošto za fermione važi Paulijev princip, ovo se svodi na kombinatorni problem koji ima dva rešenja. U prvom slučaju:

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \mathcal{P}\mathcal{A}\left\{ \prod_{i<j} (z_{i\uparrow} - z_{j\uparrow}) \prod_{k<l} (z_{k\downarrow} - z_{l\downarrow}) \prod_{p,q} (z_{p\uparrow} - z_{q\downarrow}) \right. \\ & \times \Phi_f(w_{\uparrow}, \bar{w}_{\uparrow}) \prod_{i<j} (w_{i\uparrow} - w_{j\uparrow})^2 \times \Phi_f(w_{\downarrow}, \bar{w}_{\downarrow}) \prod_{k<l} (w_{k\downarrow} - w_{l\downarrow})^2 \\ & \left. \times \prod_{i,j} (z_{i\uparrow} - w_{j\uparrow}) \prod_{k,l} (z_{k\uparrow} - w_{l\downarrow}) \times \prod_{p,q} (z_{p,\downarrow} - w_{q,\uparrow}) \prod_{m,n} (z_{m,\downarrow} - w_{n,\downarrow}) \right\}. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Prvi red u formuli je 111-funkcija, drugi red su dva $\nu = 1/2$ sloja, a poslednji red su korelacije koje su nametnute vezom broja čestica i kvanata fluksa (sve ove korelacije su predstavljene na levoj polovini Slike 5.1). Oznake \mathcal{P}, \mathcal{A} označavaju redom projekciju na LLL i antisimetrizaciju (za svaki sloj

posebno). U termodinamičkom limesu veza između broja čestica i kvanata fluksa glasi [23]:

$$\begin{aligned} N_{\Phi} &= N_{b\uparrow} + N_{b\downarrow} + N_{f\uparrow} + N_{f\downarrow} \\ &= 2N_{f\uparrow} + N_{b\uparrow} + N_{b\downarrow} = 2N_{f\downarrow} + N_{b\uparrow} + N_{b\downarrow}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

što daje dodatni uslov $N_{f\uparrow} = N_{f\downarrow}$. Dakle, broj fermiona je balansiran, dok za bozone ne postoji ograničenje.

U drugom slučaju, za koji očekujemo da opisuje scenario kada su dominantne intrakorelacije, fermioni se vezuju isključivo unutar sloja u kojem se nalaze (desna polovina Slike 5.1) i talasna funkcija je:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \mathcal{P}\mathcal{A}\left\{ \prod_{i<j} (z_{i\uparrow} - z_{j\uparrow}) \prod_{k<l} (z_{k\downarrow} - z_{l\downarrow}) \prod_{p,q} (z_{p\uparrow} - z_{q\downarrow}) \right. \\ &\times \Phi_f(w_{\uparrow}, \bar{w}_{\uparrow}) \prod_{i<j} (w_{i\uparrow} - w_{j\uparrow})^2 \times \Phi_f(w_{\downarrow}, \bar{w}_{\downarrow}) \prod_{k<l} (w_{k\downarrow} - w_{l\downarrow})^2 \\ &\left. \times \prod_{i,j} (z_{i\uparrow} - w_{j\uparrow})^2 \prod_{k,l} (z_{k\downarrow} - w_{l\downarrow})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

U ovom slučaju veza broja kvanata fluksa i broja čestica je [23]:

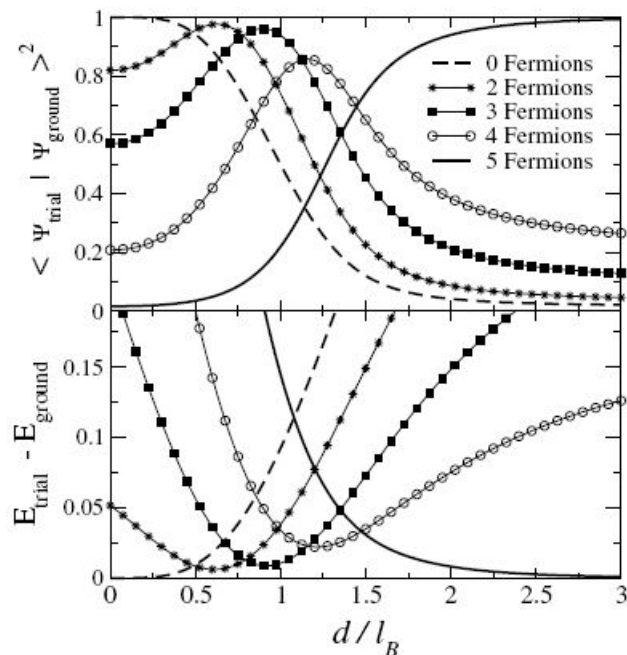
$$\begin{aligned} N_{\Phi} &= 2N_{f\uparrow} + 2N_{b\uparrow} = 2N_{f\downarrow} + 2N_{b\downarrow} \\ &= 2N_{f\uparrow} + N_{b\uparrow} + N_{b\downarrow} = 2N_{f\downarrow} + N_{b\uparrow} + N_{b\downarrow}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

odnosno broj i fermiona i bozona mora da bude balansiran: $N_{f\uparrow} = N_{f\downarrow}$, $N_{b\uparrow} = N_{b\downarrow}$.

U [22] numerički je računato preklapanje Ψ_1 za egzaktnom funkcijom osnovnog stanja za sistem od 5 elektrona po sloju u zavisnosti od d/l_B .

Ovde navodimo njihove rezultate (Slika 5.2) zato što se čini da ubedljivo (barem za male sisteme) demonstriraju da ceo pristup preko probnih talasnih funkcija koje interpoliraju između dva poznata limesa, 111 i odvojenih $\nu = 1/2$ slojeva, ima nekakvu fizičku suštinu. Iako je broj elektrona u ovoj simulaciji daleko od termodinamičkog limesa, činjenica da na Slici 5.2 postoje pikovi kod intermedijernih stanja uliva dodatno poverenje u opravdanost izbora talasne funkcije Ψ_1 . Za Ψ_2 još uvek ne postoji detaljna numerička analiza.

Ukoliko između mora kompozitnih bozona i kompozitnih fermiona postoji fazna granica, fazni prelaz će biti prvog reda. Ovakav scenario je opisan u [24], gde autori zamišljaju da postoje izolovani regioni nekoherentne faze



Slika 5.2: Preklapanje probne talasne funkcije Ψ_1 sa egzaktnim osnovnim stanjem, prema [22]. Napomena: oznaka za 111-stanje je $|0 \text{ fermiona}\rangle$ i za malo d/l_B ono ima najveće preklapanje; sa druge strane, za veliko d/l_B osnovno stanje je najbliže onom sa maksimumom kompozitnih fermiona.

unutar 111 faze. Iako ovaj model korektno predviđa neke uočene pojave (npr. polukružni zakon), Slika 2.3 sugerise da se pik razvija postepeno i da je fazni prelaz kontinualan. Ova mogućnost je prirodno prisutna u slici o mešavini kompozitnih bozona i kompozitnih fermiona.

Transportna teorija Drude-ovog tipa se može lako formirati ako se uzme u obzir da su kompozitni fermioni zapravo elektroni koji sa sobom nose dva kvanta magnetnog fluksa, dok kompozitni bozoni vezuju jedan kvant fluksa. Tada je efektivno električno polje koje vide čestice u sloju σ , u prvom slučaju (Ψ_1), dato sa:

$$\mathcal{E}_f^\sigma = \mathbf{E}^\sigma - 2\epsilon\mathbf{J}_f^\sigma - \epsilon(\mathbf{J}_b^1 + \mathbf{J}_b^2), \quad (5.5)$$

$$\mathcal{E}_b^\sigma = \mathbf{E}^\sigma - \epsilon(\mathbf{J}_b^1 + \mathbf{J}_b^2 + \mathbf{J}_f^1 + \mathbf{J}_f^2), \quad (5.6)$$

gde su $\mathbf{J}_{f(b)}^\sigma$ Fermi- i Bose-struje u sloju σ , a $\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{bmatrix}$, $\delta = \frac{h}{e^2}$.

Transportne jednačine su onda:

$$\mathcal{E}_{f(b)}^\sigma = \rho_{f(b)}^\sigma \mathbf{J}_{f(b)}^\sigma, \quad (5.7)$$

pri čemu je usled simetrije $\rho_{f(b)}^1 = \rho_{f(b)}^2$, dok je ukupna struja data sa $\mathbf{J}^\sigma = \mathbf{J}_b^\sigma + \mathbf{J}_f^\sigma$. Možemo definisati otpornost za jedan sloj (ρ^{11}) i "drag" otpornost (ρ^D):

$$\mathbf{E}^1 = \rho^{11} \mathbf{J}^1, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{E}^2 = \rho^D \mathbf{J}^1. \quad (5.9)$$

U slučaju $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$, tenzori ρ_b, ρ_f su dijagonalni (zato što su kompozitne čestice u nultom efektivnom polju): $\rho_b = \text{diag}[\rho_{bxx}, \rho_{bxx}]$, $\rho_f = \text{diag}[\rho_{fxx}, \rho_{fxx}]$, a u "drag" slučaju imamo i uslov $\mathbf{J}^2 = 0, \mathbf{J}^1$ —konačno. Tada iz (5.8,5.9) elementarnim algebarskim manipulacijama se dobija:

$$\rho^{11} = 1/2 \{ [\rho_b^{-1} + \rho_f^{-1}]^{-1} + 2\epsilon + [(\rho_f + 2\epsilon)^{-1} + \rho_b^{-1}]^{-1} \}, \quad (5.10)$$

$$\rho^D = 1/2 \{ [\rho_b^{-1} + \rho_f^{-1}]^{-1} + 2\epsilon - [(\rho_f + 2\epsilon)^{-1} + \rho_b^{-1}]^{-1} \}, \quad (5.11)$$

ili, preko matričnih elemenata:

$$\rho_{xx}^D = - \frac{2\rho_{bxx}^2 \delta^2}{(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})(\rho_{bxx}^2 + 2\rho_{bxx}\rho_{fxx} + \rho_{fxx}^2 + 4\delta^2)}, \quad (5.12)$$

$$\rho_{xy}^D = \frac{\delta(2\rho_{bxx}\rho_{fxx} + \rho_{fxx}^2 + 4\delta^2)}{\rho_{bxx}^2 + 2\rho_{bxx}\rho_{fxx} + \rho_{fxx}^2 + 4\delta^2}, \quad (5.13)$$

$$\rho_{xx}^{11} = \frac{\rho_{bxx}\rho_{fxx}(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})^2 + 2\rho_{bxx}(\rho_{bxx} + 2\rho_{fxx})\delta^2}{(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})^3 + 4(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})\delta^2}. \quad (5.14)$$

U formulama se javljaju parametri δ , ρ_{bxx} i ρ_{fxx} , pri čemu su poslednja dva slobodni i ne može se *a priori* ništa reći o njima. Stoga su Simon *et al.* [22] rezonovali na sledeći način. Pri velikim d/l_B mali je broj kompozitnih bozona zato što je kondenzat razbijen i ρ_{bxx} je veliko u odnosu na δ , koje je tipična Hall-ova otpornost. S druge strane, sa Slike 2.5 se vidi da je za velike d/l_B pouzdano $\rho_{fxx} \ll \delta$, a čak i kad se d/l_B smanjuje, ρ_{fxx} raste sporo [10]. Sve u svemu, za veliko d/l_B pretpostavljamo da važi $\rho_{bxx} \gg \delta \gg \rho_{fxx}$, a ako dodatno pretpostavimo i $\rho_{bxx}\rho_{fxx} \ll \delta^2$, imamo asimptotski:

$$\rho_{xx}^D \approx -\frac{2\delta^2}{\rho_{bxx}}, \quad (5.15)$$

$$\rho_{xy}^D \approx 4\delta\left(\frac{\delta}{\rho_{bxx}}\right)^2, \quad (5.16)$$

$$|\rho_{xx}^{11}| \approx |\rho_{xx}^D|. \quad (5.17)$$

Iz ovih formula sledi polukružni zakon:

$$(\rho_{xx}^D)^2 + \left(\rho_{xy}^D - \frac{\delta}{2}\right)^2 \approx \left(\frac{\delta}{2}\right)^2, \quad (5.18)$$

što se slaže sa [24] (ovaj zakon je opšteg karaktera za dvokomponentne sisteme u dve dimenzije i ovde ga shvatamo kao ključni test za gornji, pomalo naivan, niz aproksimacija).

U suprotnom limesu (kada se d/l_B smanjuje), u skladu sa [22], važi $\rho_{bxx} \ll \rho_{fxx} \ll \delta$, jer ρ_{bxx} opada zbog Bose kondenzacije. Kada $\rho_{bxx} \rightarrow 0$ sledi kvantizacija Coulomb-ovog drag-a:

$$\rho_{xy}^D \approx \delta, \quad (5.19)$$

$$\rho_{xx}^D \sim \frac{\rho_{bxx}^2}{\rho_{fxx}} \rightarrow 0, \quad (5.20)$$

što su izmerili Kellogg *et al.* [16].

Sada se vratimo na slučaj kada su kada su dominantne intrakorelacije (5.3).

U skladu sa Slikom 5.1 formule za efektivna polja se modifikuju u:

$$\mathcal{E}_f^\sigma = \mathbf{E}^\sigma - 2\epsilon\mathbf{J}_f^\sigma - 2\epsilon\mathbf{J}_b^\sigma, \quad (5.21)$$

$$\mathcal{E}_b^\sigma = \mathbf{E}^\sigma - \epsilon(\mathbf{J}_b^1 + \mathbf{J}_b^2 + 2\mathbf{J}_f^\sigma), \quad (5.22)$$

pa analogni račun daje za tenzore otpornosti:

$$\begin{aligned} \rho^{11} &= \frac{1}{2}\left\{\left[\rho_b^{-1} + \rho_f^{-1}\right]^{-1} + 2\epsilon\right. \\ &+ \left. \left[(\rho_b - 2\epsilon)^{-1} + \rho_f^{-1}\right]^{-1} \left[(\rho_b - 2\epsilon)^{-1}\rho_b + 2\rho_f^{-1}\epsilon\right]\right\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \rho^D &= \frac{1}{2}\left\{\left[\rho_b^{-1} + \rho_f^{-1}\right]^{-1} + 2\epsilon\right. \\ &- \left. \left[(\rho_b - 2\epsilon)^{-1} + \rho_f^{-1}\right]^{-1} \left[(\rho_b - 2\epsilon)^{-1}\rho_b + 2\rho_f^{-1}\epsilon\right]\right\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Matrični elementi od interesa su:

$$\rho_{xx}^D = -\frac{2\rho_{fxx}^2\delta^2}{(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})^3 + 4(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})\delta^2}, \quad (5.25)$$

$$\rho_{xy}^D = \frac{\rho_{fxx}^2\delta}{(\rho_{fxx} + \rho_{bxx})^2 + 4\delta^2}, \quad (5.26)$$

$$\rho_{xx}^{11} = \frac{\rho_{bxx}\rho_{fxx}(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})^2 + 2\rho_{fxx}(2\rho_{bxx} + \rho_{fxx})\delta^2}{(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})^3 + 4(\rho_{bxx} + \rho_{fxx})\delta^2}. \quad (5.27)$$

I u ovom slučaju postoje dva fizički značajna limita uz skladu sa sledećim pretpostavkama za ρ_{bxx}, ρ_{fxx} . Kada je $\rho_{bxx} \ll \rho_{fxx} \ll \delta$:

$$\rho_{xx}^D \approx -\frac{\rho_{fxx}}{2}, \quad (5.28)$$

$$\rho_{xy}^D \approx \frac{1}{4} \frac{\rho_{fxx}^2}{\delta}, \quad (5.29)$$

$$\rho_{xx}^{11} \approx \frac{\rho_{fxx}}{2}, \quad (5.30)$$

tako da važi polukružni zakon $(\rho_{xx}^D)^2 + (\rho_{xy}^D - \frac{\delta}{2})^2 = (\frac{\delta}{2})^2$ i $|\rho_{xx}^D| = |\rho_{xx}^{11}|$.

U režimu $\rho_{bxx} \ll \delta \ll \rho_{fxx}$ dobijamo kvantizaciju Coulomb-ovog drag-a:

$$\rho_{xy}^D \longrightarrow \frac{\rho_{fxx}^2\delta}{\rho_{fxx}^2} \approx \delta, \quad (5.31)$$

$$\rho_{xx}^D \sim \frac{\delta^2}{\rho_{fxx}} \longrightarrow 0. \quad (5.32)$$

Naglasimo da su ovi limiti različiti od onih koje su posmatrali Simon *et al.* [22]. Na primer, ovde polukružni zakon sledi kada je ρ_{bxx} -malo (dakle, suprotno u odnosu na [22]), dok ρ_{fxx} može da bude i veliko u odnosu na δ . Pošto je već napomenuto da za vrednosti ρ_{bxx}, ρ_{fxx} ne znamo kolike su, onda ne možemo ni sa sigurnošću reći koji od ovih graničnih slučajeva su fizički korektni. Smisao pređašnje analize je samo da se ustanovi kakvo kvalitativno ponašanje u principu može da se pojavi u eksperimentu.

5.2 Chern-Simons teorija za dvosloj

Pošto preliminarni račun iz prethodnog odeljka pokazuje kvalitativno slaganje sa eksperimentom, kao i u Glavi 4 želimo da formulišemo Chern-Simons teoriju polja za koju će funkcije Ψ_1, Ψ_2 biti osnovno stanje. Ovaj zahvat ne vršimo samo radi kompletnosti, već i zbog toga što će se iz takve

teorije lako videti funkcije odziva, uređenost sistema i spektar niskoenergetskih ekscitacija. Generalni nedostatak Chern-Simons teorija je što ne uključuju projekciju na LLL, gde mora da se odvija celokupna fizika. Ovde, pored tog problema, postoji i problem uključivanja antisimetrizacije kao u (5.1,5.3). Nadalje će oba nedostatka biti ignorisani. Polazni lagranžijan je dat sa [23]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{\sigma} \left\{ \Psi_{\sigma}^{\dagger} (i\partial_0 - a_0^{F\sigma} + A_0 + \sigma B_0) \Psi_{\sigma} - \frac{1}{2m} |(-i\nabla + \mathbf{a}^{F\sigma} - \mathbf{A} - \sigma \mathbf{B}) \Psi_{\sigma}|^2 \right\} \\ & + \sum_{\sigma} \left\{ \Phi_{\sigma}^{\dagger} (i\partial_0 - a_0^{B\sigma} + A_0 + \sigma B_0) \Phi_{\sigma} - \frac{1}{2m} |(-i\nabla + \mathbf{a}^{B\sigma} - \mathbf{A} - \sigma \mathbf{B}) \Phi_{\sigma}|^2 \right\} \\ & + \sum_{\sigma} \sum_{i=F,B} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} a_0^{i\sigma} (\nabla \times \mathbf{a}^{i\sigma}) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^2 \mathbf{r}' \delta \rho_{\sigma}(\mathbf{r}) V_{\sigma\sigma'} \delta \rho_{\sigma'}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (5.33)$$

gde su oznake u skladu sa Glavom 4: σ prebrojava slojeve, Ψ_{σ} i Φ_{σ} su polja kompozitnih fermiona i kompozitnih bozona u sloju σ , $V_{\uparrow\uparrow} = V_{\downarrow\downarrow} \equiv V_a$, $V_{\uparrow\downarrow} = V_{\downarrow\uparrow} \equiv V_e$, a gustine su $\delta \rho_{\sigma} = \delta \rho_{\sigma}^F + \delta \rho_{\sigma}^B$. Polja \mathbf{A} i \mathbf{B} se kupluju sa naelektrisanjem i pseudospinom, a u opštem slučaju moramo uvesti 4 gejdž polja $\mathbf{a}^{F(B)\sigma}$. Srećom, nisu sva nezavisna. Tako u prvom slučaju analogon relacije (5.2) su jednačine za gejdž polja:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a}^{F\sigma} &= 2\pi(2\delta \rho^{F\sigma} + \delta \rho^{B\uparrow} + \delta \rho^{B\downarrow}), \\ \nabla \times \mathbf{a}^{B\sigma} &= 2\pi(\delta \rho^{F\uparrow} + \delta \rho^{F\downarrow} + \delta \rho^{B\uparrow} + \delta \rho^{B\downarrow}), \end{aligned} \quad (5.34)$$

iz kojih se vidi da postoje samo dva linearno nezavisna gejdž polja: $\mathbf{a}_C = \frac{\mathbf{a}^{F\uparrow} + \mathbf{a}^{F\downarrow}}{2} = \frac{\mathbf{a}^{B\uparrow} + \mathbf{a}^{B\downarrow}}{2}$ i $\mathbf{a}_S = \frac{\mathbf{a}^{F\uparrow} - \mathbf{a}^{F\downarrow}}{2}$, za koja (5.34) u Coulomb-ovom gejdžu glasi: $\frac{ika_C}{2\pi} = \delta \rho_{\uparrow} + \delta \rho_{\downarrow} \equiv \delta \rho$ i $\frac{ika_S}{2\pi} = \delta \rho^{F\uparrow} - \delta \rho^{F\downarrow} \equiv \delta \rho_S^F$. Ovo su veze koje u funkcionalni integral uključujemo Lagrange-ovim množiteljima a_0^S i a_0^C . Deo sa interakcijom se lako dijagonalizuje (kao u Glavi 4) uvođenjem $V_C = \frac{V_a + V_e}{2}$ i $V_S = \frac{V_a - V_e}{2}$.

Strategija za integraciju bozonskih funkcija je ranije već primenjivan Madelung-ov ansatz (3.16), dok se fermionske funkcije tretiraju kako je detaljno objašnjeno u [10]. Nakon Fourier transformacije, u kvadratičnoj (RPA) aproksimaciji, uvođenjem smena $\delta \rho_C^i = \delta \rho_{\uparrow}^i + \delta \rho_{\downarrow}^i$, $\delta \rho_S^i = \delta \rho_{\uparrow}^i - \delta \rho_{\downarrow}^i$, $i = F, B$ i $\theta_C = \theta_{\uparrow} + \theta_{\downarrow}$, $\theta_S = \theta_{\uparrow} - \theta_{\downarrow}$, svi članovi se uredno raspadaju na deo koji opisuje kanal naelektrisanja i pseudospinski deo:

$$\mathcal{L}_C = K_{00}(\delta a_0^C)^2 + K_{11}(\delta a_C)^2 + \frac{1}{2\pi} a_0^C i k a_C -$$

$$\delta\rho_C^B\delta a_0^C + \frac{i\omega}{2}\delta\rho_C^B\theta_C - \frac{\bar{\rho}_b}{m}\frac{k^2}{4}\theta_C^2 - \frac{\bar{\rho}_b}{m}(\delta a_C)^2 - \frac{1}{2}\frac{k^2 a_C^2}{(2\pi)^2}V_C \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PS} = & K_{00}(\delta a_0^S)^2 + K_{11}(\delta a_S)^2 + \frac{1}{2\pi}a_0^S ika_S \\ & + \delta\rho_S^B B_0 + \frac{i\omega}{2}\delta\rho_S^B\theta_S - \frac{\bar{\rho}_b}{m}\frac{k^2}{4}\theta_S^2 - \frac{\bar{\rho}_b}{m}B^2 - \frac{1}{2}V_S(\delta\rho_S^B + \frac{ik}{2\pi}a_S)^2, \end{aligned} \quad (5.36)$$

gde su $\delta a_0^C \equiv a_0^C - A_0$, $\delta a_C \equiv a_C - A$, $\delta a_0^S \equiv a_0^S - B_0$, $\delta a_S \equiv a_S - B$, $\bar{\rho}_b$ -srednja gustina bozona u (bilo kom) sloju, a u zapisu je iskorišćena kompaktna notacija koja je pojašnjena u Glavi 4. $K_{00}(k)$ i $K_{11}(k)$ su korelacione funkcije (gustina-gustina i struja-struja, redom) za slobodne fermione u RPA aproksimaciji [10]. U dugotalasnom limesu ($k/k_f \ll 1$) one se mogu izračunati prema opštim formulama iz [10]:

$$\begin{aligned} K_{00}(k, \omega) = & \frac{m}{2\pi}(1 - \Theta(x^2 - 1))\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ & + i\Theta(1 - x^2)\frac{|x|}{\sqrt{1 - x^2}}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} K_{11}(k, \omega) = & \frac{2n_f}{m}(-x^2 - \frac{k^2}{24\pi n_f} + \Theta(x^2 - 1)|x|\sqrt{x^2 - 1}) \\ & + i\Theta(1 - x^2)|x|\sqrt{1 - x^2}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

gde je $x = \frac{m\omega}{k_f k}$, k_f -Fermi impuls i n_f -gustina fermiona, a Θ - Heaviside-ova funkcija. Masa koja figuriše u izrazima za K_{00}, K_{11} može se poistovetiti sa golom masom elektrona samo u okviru RPA aproksimacije (u kojoj trenutno radimo).

Sada posmatramo kanal naelektrisanja (5.35). Integracijom po $\delta\rho_C^B$, a potom po δa_C , dobija se korelaciona funkcija za gustinu:

$$\pi_0(k) = \frac{(\frac{k}{2\pi})^2}{\frac{2\bar{\rho}_b}{m} - 2K_{11} + V_C(\frac{k}{2\pi})^2 + \frac{(\frac{k}{2\pi})^2}{\frac{2\bar{\rho}_b k^2}{m\omega^2} - 2K_{00}}}. \quad (5.39)$$

Pošto je u graničnom slučaju $x \ll 1$: $K_{00} \approx \frac{m}{2\pi}(1 + ix)$, $K_{11} \approx -\frac{k^2}{12\pi m} + i\frac{2n_f}{m}x$, iz korelacione funkcije (5.39) se vidi da je sistem nekompresibilan za $k, \omega \rightarrow 0$, sve dok postoji termodinamički značajna količina bozona.

U pseudospinskom kanalu pre svega tražimo signal Bose kondenzata, odnosno interesuje nas da li postoji Goldstone-ova moda (4.10) i kakvo je dugodometno uređenje. Zato u (5.36) stavljamo² $A_\mu = B_\mu = 0$, pa eliminacijom $a_0^S, a_S, \delta\rho_S^B$ dobija se:

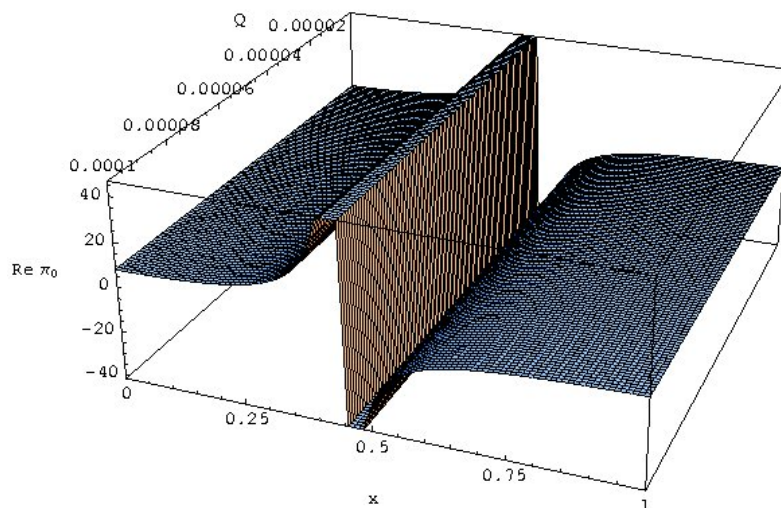
²Kompletan linearni odgovor u pseudospinskom kanalu dat je u Dodatku C.

$$\langle \theta_S(-k)\theta_S(k) \rangle = \frac{4V_S}{\omega^2 \frac{\frac{1}{2}V_S + \alpha}{\alpha} - \frac{2\bar{\rho}_b V_S}{m} k^2}, \quad (5.40)$$

gde je $\alpha = \frac{1}{4}K_{00}^{-1} - K_{11}(\frac{2\pi}{k})^2$. Zaista se pojavljuje Goldstone-ova moda, doduše uz mali disipativni član³:

$$\omega^0(k) = \sqrt{\frac{2\bar{\rho}_b V_S}{m}} k - i \frac{V_S}{16\pi^{3/2} \sqrt{n_f}} k^3. \quad (5.41)$$

Čak i za velike vrednosti x , može se proveriti da pol ostaje na istom mestu ako pretpostavimo da je $\bar{\rho}_b \gg n_f$ (što je opravdana pretpostavka u ovom slučaju), a imaginarni član pritom nestaje. Kao i u 4.12, ovo implicira postojanje pravog ODLRO-a, znači radi se o "dobrom" Bose kondenzatu. Goldstone-ova moda $\omega^0(k)$ (5.41) lako se uočava na Slici 5.3, gde je predstavljen realni deo korelacione funkcije gustina-gustina, $\pi_{00}(k)$ (Dodatak C.12) u zavisnosti od parametara $Q \equiv k/k_f$ i $x \equiv \omega/(kk_f)$. Preostali (fiksirani) parametri su: $m = l_B = 1$, $d = 0.5$, $\epsilon = 12.6$, $V_S = \pi d/\epsilon$, $\bar{\rho}_b + n_f = 1/(4\pi)$, $\eta = n_f/\bar{\rho}_b = 1/10$.



Slika 5.3: $\text{Re}\pi_{00}(k)$ i Goldstone-ova moda za slučaj Ψ_1

Opredelili smo se za grafik korelacione funkcije gustina-gustina jer ona ima direktan fizički smisao, mada i $\theta - \theta$ korelaciona funkcija daje kvalitativno

³Disipativni član nam, u principu, smeta i poželjno je otkloniti ga [23].

identičnu sliku (može se lako proveriti da oba izraza, C.12 i 5.40, imaju isti singularitet).

Sada se vratimo na drugi slučaj (5.3). U skladu sa Slikom 5.1, relacije (5.34) postaju:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{a}^{F\sigma} &= 2\pi(2\delta\rho^{F\sigma} + 2\delta\rho^{B\sigma}), \\ \nabla \times \mathbf{a}^{B\sigma} &= 2\pi(2\delta\rho^{F\sigma} + \delta\rho^{B\uparrow} + \delta\rho^{B\downarrow}),\end{aligned}\quad (5.42)$$

odakle se vidi da u ovom slučaju postoje 3 linearno nezavisna gejdž polja, $a_C = \frac{a^{F\uparrow} + a^{F\downarrow}}{2} = \frac{a^{B\uparrow} + a^{B\downarrow}}{2}$, $a_S = \frac{a^{F\uparrow} - a^{F\downarrow}}{2}$ i $a_{FS} = \frac{a^{B\uparrow} - a^{B\downarrow}}{2}$. Uvođenjem istih smena kao i u prethodnom slučaju, lagranžijan se opet raspada na sektor naelektrisanja:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_C &= K_{00}(\delta a_0^C)^2 + K_{11}(\delta a_C)^2 + \frac{ik}{2\pi} a_0^C a_C \\ &+ \frac{i\omega}{2} \delta\rho_C^B \theta_C - \delta\rho_C^B \delta a_0^C - \frac{\bar{\rho}_b k^2}{4m} \theta_C^2 - \frac{\bar{\rho}_b}{m} (\delta a_C)^2 - \frac{1}{2} V_C \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 a_C^2\end{aligned}\quad (5.43)$$

i pseudospinski sektor:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{PS} &= K_{00}(\delta a_0^S)^2 + K_{11}(\delta a_S)^2 + \frac{ik}{2\pi} a_0^S a_{FS} + \frac{ik}{2\pi} a_0^{FS} (a_S - a_{FS}) \\ &+ \frac{i\omega}{2} \delta\rho_S^B \theta_S - \delta\rho_S^B \delta a_0^{FS} - \frac{\bar{\rho}_b k^2}{4m} \theta_S^2 - \frac{\bar{\rho}_b}{m} (\delta a_{FS})^2 - \frac{1}{2} V_S \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 a_S^2,\end{aligned}\quad (5.44)$$

gde su $\delta a_0^{FS} \equiv a_0^{FS} - B_0$, $\delta a_{FS} = a_{FS} - B$, a sve ostale oznake su iste kao i ranije.

Na kanalu naelektrisanja se nećemo zadržavati. Napomenimo samo da se integracijom po svim gejdž poljima, gustinama i bozonskoj fazi, dobija da je sistem nekompresibilan u ovom sektoru. Za pseudospinski deo, $\theta - \theta$ korelator je:

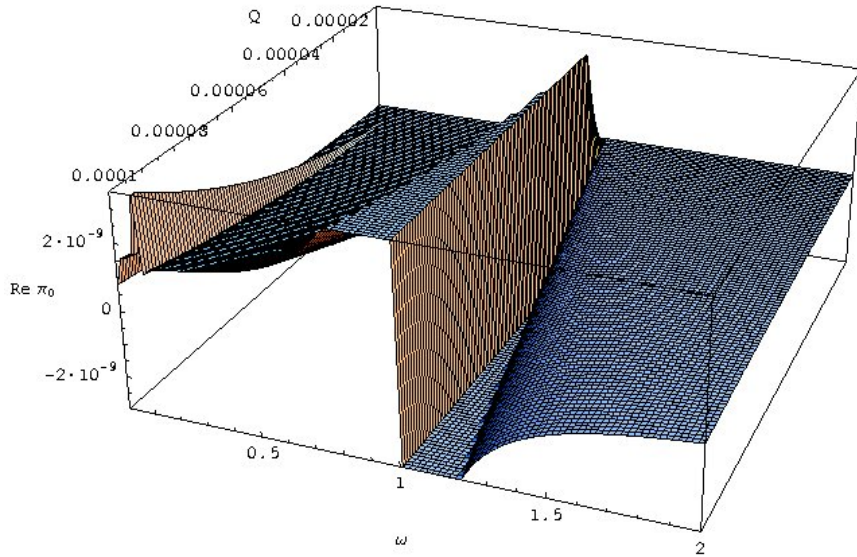
$$\langle \theta_S(-k) \theta_S(k) \rangle = \frac{\frac{1}{k^2} \beta \gamma}{\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)^2 (\beta + \gamma) - \frac{\bar{\rho}_b}{2m} \beta \gamma},\quad (5.45)$$

gde su $\beta = \frac{1}{2K_{00}} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 + \frac{2\bar{\rho}_b}{m}$, $\gamma = V_S \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 - 2K_{11}$. Za male vrednosti k/k_f i x , korelator divergira za $\omega^0 = \frac{4\pi\bar{\rho}_b}{m} = const$, što očigledno nije u saglasnosti sa pretpostavkom o vrednosti tekućih varijabli i ovaj pôl odbacujemo. Za $x \gg 1$ (i $k \ll k_f$), relacije (5.37) su približno $K_{00} \approx -\frac{1}{4\pi x^2}$, $K_{11} \approx -\frac{n_f}{m}$, pa se dobijaju dva pôla:

$$\omega^0(k) = \frac{4\pi n_f}{m} \eta, \quad (5.46)$$

$$\Omega^0(k) = \frac{4\pi n_f}{m} (1 + \eta), \quad (5.47)$$

gde je parametar $\eta = \bar{\rho}_b/n_f$, odnos bozonske i fermionske gustine za koji očekujemo da je mali u limesu koji na ovom mestu posmatramo. Na Slici 5.4 prikazan je realni deo korelacione funkcije gustina-gustina za slučaj Ψ_2 (formula C.15), gde je, za razliku od Slike 5.3, prikazana zavisnost od ω i Q , uz promenjene parametre $d = 1.5$ i $\eta = \bar{\rho}_b/n_f = 1/10$ za koje očekujemo da su relevantniji za ovaj slučaj. Lako se uočava "plazmena" frekvencija Ω^0 na $\omega \cong 1$ i ω^0 na $\omega \cong 1/10$. Takođe, upadljivo je odsustvo Goldstone-ove mode na Slici 5.4.



Slika 5.4: $\text{Re}\pi_{00}(k)$ za slučaj Ψ_2

Sada se bez većih problema može izračunati ODLRO. Prema [18], znamo da u takvom računu interakcija nema uticaja na vrednost karakterističnog eksponenta (ovo je evidentno i iz Glave 3, primedba nakon relacije 3.28), pa ćemo uzeti $V_S \equiv 0$. Imajući u vidu da radimo u dugotalasnom limesu i da je η -malo, dobija se sledeći izraz za korelator:

$$\langle \theta_S(-k) \theta_S(k) \rangle = \frac{2m\omega_P}{k^2 n_f} \frac{\omega^2 - \omega_P^2 \eta}{[\omega^2 - (\omega^0(k))^2] [\omega^2 - (\Omega^0(k))^2]}, \quad (5.48)$$

gde je $\omega_P = \frac{4\pi n_f}{m}$. Do na linearne članove po η , usled kvadriranja u imeniocu, pôl $\omega^0(k)$ izjednačavamo sa nulom i nakon konturne integracije po ω (slične onoj u Glavi 3), dobija se:

$$\langle \theta_S(-k)\theta_S(k) \rangle = -\frac{4\pi}{k^2}(1 - 2\eta), \quad (5.49)$$

i ODLRO je algebarskog tipa:

$$\langle e^{i\theta_S(\mathbf{r})} e^{-i\theta_S(\mathbf{r}')} \rangle \propto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{2(1-2\eta)}}. \quad (5.50)$$

Vidimo da za $\eta = 1/2$ u stvari možemo govoriti i o pravom ODLRO. Izraz (5.50) formalno podseća na Kosterlitz-Thouless XY-uređenje, samo što ulogu temperature preuzima parametar η (ceo sadržaj ove Glave je baziran na pretpostavci $T = 0$). Prema ovoj analogiji, relativne fluktuacije bozonske i fermionske gustine predstavljaju mehanizam koji dovodi do ultimativnog razuređenja kondenzata.

GLAVA 6

ZAKLJUČAK

Jako korelisani sistemi u niskim dimenzijama, kakvi su kvantni Hall-ovi jednosloji i dvosloji, i dalje su predmet intenzivnog eksperimentalnog i teorijskog istraživanja. U ovom radu predstavljene su neke osobine ovih sistema, pre svega kvantnomehaničke korelacije, parametri poretka i uređenje. Preslikavanje elektronskog sistema na odgovarajući bozonski sistem koji može da ispolji Bose-Einstein-ovu kondenzaciju (ili, opštije, superfluidnost) ispostavlja se kao vrlo efikasan metod za objašnjenje raznovrsne fenomenologije kvantnog Hall-ovog efekta u različitim sistemima (Glava 2). Tako, kompozitno-bozonska teorija (Glava 3) uspeva da čak i u slici srednjeg polja potpuno reprodukuje najbitnije eksperimentalne rezultate koji se odnose na FQHE. Ipak, mesto na kojem kompozitno-bozonska teorija može da pokaže svoj pun potencijal su kvantni Hall-ovi dvosloji (Glava 4).

Dvosloji su složen sistem koji i dalje nije kompletno opisan, a Glava 5 donosi rezultate koji se odnose na kvantni fazni prelaz u dvosloju pri variranju rastojanja d između slojeva. Za male vrednosti d , eksperimenti ukazuju da su dominantne interkorelacije, a za velike d intrakorelacije postaju značajnije. Režim $d \sim l_B$ je otvoren problem i u Glavi 5 su ponuđene dve probne talasne funkcije za koje očekujemo da dobro opisuju sistem u tom režimu i njegovoj okolini. U stvari, za manje d prethodno je već utvrđeno da prva od ovih funkcija (Ψ_1) ima zadovoljavajuće preklapanje sa egzaktnim osnovnim stanjem u simulacijama sa malim brojem elektrona. U okviru Chern-Simons pristupa mi smo pokazali da Ψ_1 opisuje nekompresibilno stanje u kanalu naelektrisanja i ima pravi ODLRO u pseudospinskom kanalu i linearnu Goldstone-ovu modu.

Druga mogućnost (Ψ_2) nas zapravo više interesuje jer se čini da bi mogla da objasni neidealnost superfluida koja se vidi u eksperimentima (npr. konačan pik u tuneliranju ili izostanak Kosterlitz-Thouless prelaza). Pokazano je da u okviru Chern-Simons RPA aproksimacije Ψ_2 dobro opisuje "drag" eksperimente i predviđa polukružni zakon u određenom režimu. Dalje, Ψ_2 u stvari pokazuje kako se kondenzat dvosloja razuređuje (uvođenjem kompozitnih

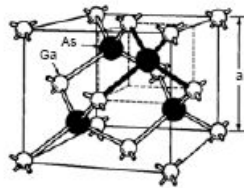
fermiona) i ODLRO u pseudospinskom kanalu postaje algebarskog tipa. Ovaj zaključak je, na neki način, glavni rezultat ovog rada.

Potrebna je dodatna analiza da bi se mogao konstruisati definitivan fazni dijagram za dvosloj i da bi se uopšte videlo može li homogen opis razuređenja (kakvim smo se bavili u ovom radu) da objasni eksperimentalne rezultate. Neka od pitanja koja ostaju predmet budućeg istraživanja su npr. izostanak Goldstone-ove mode u slučaju Ψ_2 , efekat neuređenosti u sistemu, kao i proširenje formalizma za konačne temperature $T \neq 0$.

DODATAK A

FABRIKACIJA UZORAKA

Uobičajeni metod za fabrikaciju niskodimenzionih struktura je uzgajanje poluprovodničkih legura, sloj-po-sloj, unutar tzv. MBE¹ mašina sa visokim vakuumom. *GaAs* kao materijal (Slika A.1) je trenutno najzastupljeniji (jedna od prednosti je što elektroni u *GaAs* imaju vrlo malu efektivnu masu), iako najnoviji trendovi otvaraju mogućnost povratka ugljenika, u vidu grafena).

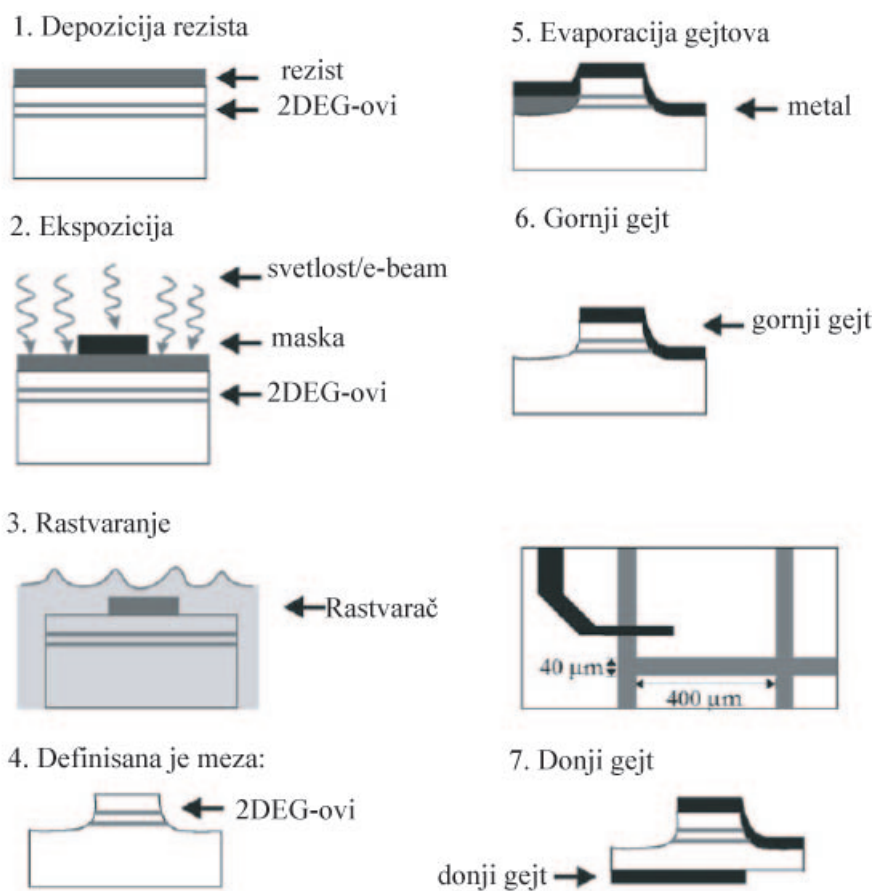


Slika A.1: GaAs

MBE rast omogućava da se eliminišu defekti, tako da je mobilnost elektrona i šupljina vrlo visoka. Tehnikama MBE moguće je i direktno konfinirati elektrone u dve dimenzije. Da bi se potpuno definisala nanonstruktura uređaja koji se dizajnira, proces se nastavlja *litografijom* (Slika A.2). Ona podrazumeva nanošenje organskog materijala (*rezist*) na supstrat i njegovu delimičnu polimerizaciju zagrevanjem. Nakon izlaganja svetlosti ili fokusiranom elektronskom snopu (e-beam) kroz *masku* (na kojoj je šema buduće nanostrukture), polimer na određenim mestima biva razgrađen. Ispiranjem u rastvaraču, ti delovi će biti potpuno odstranjeni i imamo definisanu *mezu* koja nosi 2DEG nekih $\sim 100\text{nm}$ ispod površine (korak 4 na Slici A.2).

Zgodan način za konfiniranje elektrona je putem metalnih gejtova koji se mogu evaporirati na površinu uzorka. Postavljanjem napona na gejtove,

¹Molecular Beam Epitaxy



Slika A.2: Proces litografije za 2DEG: prva kolona opisuje definisanje meze, druga kolona se odnosi na dizajniranje gejtova. Donji gejtovi(7) su pogodni za eksperimente sa dvoslojima.

modifikuje se profil gustine elektronskog gasa duboko unutar poluprovodnika². Gejtovi se obično postavljaju sa gornje strane, ali u nekim slučajevi (kod dvosloja npr.) pogodno je da budu i sa gornje i sa donje strane. Tako je željena struktura (po modelu sa maske) realizovana, potrebno je samo dodati omske kontakte da bi se išta na njoj moglo meriti (omski kontakti se dobijaju kaljenjem *Au*, *Ge*, *Ni*).

Ovde je izložena procedura fabrikacije u najgrubljim crtama, namera je bila, pre svega, da se opiše njena kompleksnost i da se omogući razumevanje citiranih eksperimenata u Odeljku 2.4. Za sve dodatne detalje, konsultovati [25].

²Svega nekoliko volti DC napona dovoljno je da dovede do potpunog proboja 2DEG-a, tako da je ovaj metod zaista vrlo koristan.

DODATAK B

CHERN-SIMONS TRANSFORMACIJA

Sistem od N elektrona u dve dimenzije i magnetnom polju normalnom na ravan zadat je hamiltonijanom

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]^2 + \sum_i eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (\text{B.1})$$

i talasnom funkcijom koja je antisimetrična u odnosu na transpoziciju dve čestice:

$$P\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \Psi(\mathbf{r}_{P1}, \dots, \mathbf{r}_{PN}) = (-1)^P \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (\text{B.2})$$

Transformacijom koja deluje na fazu talasne funkcije, moguće je gornji elektronski problem preslikati u ekvivalentan *bozonski* problem. Naime, talasna funkcija

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = U^{-1}\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \exp \left[-i \sum_{i<j} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (\text{B.3})$$

i hamiltonijan

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= U^{-1}\mathcal{H}U \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) + e\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)]^2 + \sum_i eA_0(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

opisuju isti sistem kao i (B.1,B.2), pri čemu je ϕ -simetrična u odnosu na transpozicije čestica i u transformisanom hamiltonijanu (B.4) se javlja dodatni, tzv. *Chern-Simons* gejdž potencijal, koji je dat izrazom:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_i) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\theta}{\pi} \sum_{j \neq i} \nabla_i \alpha_{ij}, \quad (\text{B.5})$$

gde je Φ_0 -kvant fluksa, $\theta = (2k + 1)\pi$, k -ceo broj i α_{ij} -ugao između x -ose i radijus-vektora koji spaja čestice j i i ¹.

U nastavku će biti pokazana ova ekvivalencija. Unitarna transformacija je eksplicitno:

$$U = \exp \left[i \sum_{i < j} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right], \quad (\text{B.6})$$

gde je α_{ij} - ugao između x -ose i radijus-vektora $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, pa kao takav ne zavisi od operatora impulsa \mathbf{p}_i . Impuls se pod uticajem U transformiše kao:

$$\begin{aligned} U \mathbf{p}_i U^{-1} &= U (-i \nabla_i U^{-1}) + U U^{-1} (-i \nabla_i) \\ &= \exp \left[i \sum_{i < j} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right] \left(- \sum_{j \neq i} \frac{\theta}{\pi} \nabla_i \alpha_{ij} \right) \exp \left[-i \sum_{i < j} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right] + \mathbf{p}_i \\ &= -e \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

a ceo kinetički član:

$$\begin{aligned} &U [\mathbf{p}_i + eA(\mathbf{r}_i) + e\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)]^2 U^{-1} \\ &= U [\mathbf{p}_i + eA(\mathbf{r}_i) + e\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)] U^{-1} U [\mathbf{p}_i + eA(\mathbf{r}_i) + e\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)] U^{-1} \\ &= U [\mathbf{p}_i + eA(\mathbf{r}_i)]^2 U^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

pošto U ne zavisi od impulsa, pa tada A_0 i V ostaju invarijantni, te je

$$\mathcal{H} = U \mathcal{H}' U^{-1}, \quad (\text{B.9})$$

odnosno, $\mathcal{H}' = U^{-1} \mathcal{H} U$, što je i trebalo pokazati. Ostalo je još ispitati kakva je simetrija transformisane talasne funkcije (B.3) u odnosu na transpoziciju

¹Vrednost ugla je određena do na 2π , ali pošto deluje operator ∇ , rezultat je jednoznačan.

čestica. U tu svrhu, uzmimo da se vrši zamena čestica n i l tako da je, recimo, $n < l$ i raspišimo U u obliku:

$$\begin{aligned}
& U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{r}_N) \\
= & \exp\left(i \sum_{i < j (\neq n, l)}^N \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} + i \sum_{j=n+1}^N \frac{\theta}{\pi} \alpha_{nj} + i \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{in} + i \sum_{j=l+1}^N \frac{\theta}{\pi} \alpha_{ij} \right. \\
& \left. + i \sum_{i=1 (i \neq n)}^{l-1} \frac{\theta}{\pi} \alpha_{il} + i \frac{\theta}{\pi} \alpha_{nl}\right). \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

Sada se lako može videti ukupna promena faze (celog izraza u eksponentu) kada n i l zamene mesta:

$$\frac{\theta}{\pi} \sum_{m=n+1}^{l-1} [\alpha_{lm} - \alpha_{ml} + \alpha_{mn} - \alpha_{nm}] + \frac{\theta}{\pi} (\alpha_{ln} - \alpha_{nl}). \quad (\text{B.11})$$

Iz očiglednih geometrijskih razloga, $\alpha_{ij} - \alpha_{ji} = \pm\pi$. Kada je $\theta = (2k+1)\pi$, ukupna promena faze je

$$\sum_{m=n+1}^{l-1} (2\pi \text{ ili } 0 \text{ ili } -2\pi) \frac{\theta}{\pi} \pm \theta, \quad (\text{B.12})$$

pa prvi član ne daje doprinos pri eksponenciranju. Dakle, U daje doprinos $\pm i\theta$ pri transpoziciji dve čestice i u slučaju $\theta = (2k+1)\pi$ talasna funkcija nakon transformacije je simetrična, odnosno opisuje *bozone*.

DODATAK C

FUNKCIJE ODZIVA

U ovom dodatku navodimo osnovne napomene i međukorake koji dovode do formule (3.22), te njenih analogona u slučaju dvosloja. Da bi se dobile funkcije odziva, treba izvršiti ogrublјivanje po svim stepenima slobode osim onih koji opisuju spoljašnje polje. Integracija nekog polja, u svim slučajevima razmatranim u ovom radu, se svodi na gausovsku i kompleksni integral:

$$\int d(z, z^*) \exp[-z * wz + u * z + vz^*] = \frac{\pi}{w} \exp\left[\frac{u * v}{w}\right], \operatorname{Re} w > 0. \quad (\text{C.1})$$

Tako se θ -integracija u (3.20) može izvršiti dopunjavanjem do potpunog kvadrata i primenom (C.1), da bi se dobio efektivni bozonski lagfranzijan:

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_{\mu, \nu} \frac{1}{2} \pi_{\mu\nu}(k) \delta a_{\mu}(-k) \delta a_{\nu}(k), \quad (\text{C.2})$$

$$\pi_{00}(k) = \frac{1}{\tilde{V}(k)} \frac{-(\rho_0/2m)|\mathbf{k}|^2}{\omega^2/2\tilde{V}(\mathbf{k}) - (\rho_0/2m)|\mathbf{k}|^2} \quad (\text{C.3})$$

$$\pi_{\alpha\beta}(k) = -\frac{\rho_0}{m} \left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{(\rho_0/2m)k_{\alpha}k_{\beta}}{\omega^2/2\tilde{V}(\mathbf{k}) - (\rho_0/2m)|\mathbf{k}|^2} \right] \quad (\text{C.4})$$

$$\pi_{0\alpha}(k) = \pi_{\alpha 0}(k) = -\frac{\rho_0}{2m} \frac{wk_{\alpha}}{\tilde{V}(\mathbf{k})} \frac{1}{\omega^2/2\tilde{V}(\mathbf{k}) - (\rho_0/2m)|\mathbf{k}|^2}, \quad (\text{C.5})$$

gde je $\delta a_{\mu} \equiv a_{\mu} + A_{\mu}$. Funkcije $\pi_{\mu\nu}$ predstavljaju linearni elektromagnetni odgovor bozonskog polja. U statičkom limesu, $\pi_{00}(k) = 1/\tilde{V}(\mathbf{k})$, $\pi_{\alpha\beta}(k) = -\frac{\rho_0}{m}(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{|\mathbf{k}|^2})$. Na sličan način se može izvršiti i integracija po gejdž polju a_{μ} (u Coulomb-ovoj kalibraciji), tako da se mogu dobiti kompletne funkcije odziva u gausovskoj aproksimaciji:

$$\tilde{\pi}_0(k) = \frac{-\pi_0(k)(|\mathbf{k}|/2\theta)^2}{\pi_0(k)\pi_1(k) - (|\mathbf{k}|/2\theta)^2} \quad (\text{C.6})$$

$$\tilde{\pi}_1(k) = \frac{-\pi_1(k)(|\mathbf{k}|/2\theta)^2}{\pi_0(k)\pi_1(k) - (|\mathbf{k}|/2\theta)^2} \quad (\text{C.7})$$

$$\tilde{\pi}_{01}(k) = \tilde{\pi}_{10} = \frac{\pi_0(k)\pi_1(k)(|\mathbf{k}|/2\theta)^2}{\pi_0(k)\pi_1(k) - (|\mathbf{k}|/2\theta)^2}. \quad (\text{C.8})$$

U slučaju 111, funkcije odziva u pseudospinskom kanalu su:

$$\pi_{00}(k) = \frac{1}{V_S - \frac{m\omega^2}{2\bar{\rho}k^2}}, \quad (\text{C.9})$$

$$\pi_{01}(k) = \pi_{10} = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\pi_{11}(k) = -\frac{2\bar{\rho}}{m}. \quad (\text{C.11})$$

Za pseudospinski kanal kod Ψ_1 (5.1):

$$\pi_{00}(k) = \frac{\Omega(V_S + 2\alpha)}{V_S(1 - \Omega V_S) + 2\alpha}, \quad (\text{C.12})$$

$$\pi_{01}(k) = \pi_{10}(k) = \frac{4\pi i}{k} \frac{K_{11}\Omega V_S}{V_S(1 - \Omega V_S) + 2\alpha}, \quad (\text{C.13})$$

$$\pi_{11}(k) = \frac{(V_S(1 - \Omega V_S) + \frac{1}{2K_{00}})(2K_{11} - \frac{2\bar{\rho}_b}{m}) + 4K_{11}\frac{\bar{\rho}_b}{m}(\frac{2\pi}{k})^2}{V_S(1 - \Omega V_S) + 2\alpha}, \quad (\text{C.14})$$

gde je $\alpha \equiv \frac{1}{4}K_{00}^{-1} - K_{11}(\frac{2\pi}{k})^2$, $\Omega \equiv \left[V_S - \frac{m\omega^2}{2\bar{\rho}_b k^2} \right]^{-1}$.

Funkcije odziva u slučaju Ψ_2 (5.3) za pseudospinski kanal:

$$\pi_{00} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2, \quad (\text{C.15})$$

$$\pi_{01} = \pi_{10} = \frac{1}{\Delta} \frac{ik}{2\pi} \Lambda, \quad (\text{C.16})$$

$$\pi_{11} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \Lambda^2 + \Delta \left(2K_{11} - \frac{2\bar{\rho}_b}{m} - 16W^4 \left(\frac{2\pi\bar{\rho}_b}{m\omega} \right)^4 \right) \right\}, \quad (\text{C.17})$$

gde je $W^4 \equiv -\frac{(\frac{m\omega^2}{2\bar{\rho}_b(2\pi)^2})^2}{\frac{1}{2K_{00}}(\frac{k}{2\pi})^2 - \frac{m\omega^2}{2\bar{\rho}_b(2\pi)^2} + \frac{2\bar{\rho}_b}{m}}$, $\Delta \equiv W^4 - \frac{m\omega^2}{2\bar{\rho}_b(2\pi)^2} - 2K_{11} + V_S(\frac{k}{2\pi})^2$,

$\Lambda \equiv 4W^4(\frac{2\pi\bar{\rho}_b}{m\omega})^2 - 2K_{11}$.

BIBLIOGRAFIJA

- [1] H. L. Stormer, D. C. Tsui, and A. C. Gossard, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999).
- [2] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980).
- [3] L. Landau and E. Lifshitz, *Quantum Mechanics: non-relativistic theory*, volume 3, Pergamon Press, 2nd edition, 1965.
- [4] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, Frontiers in Physics, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [5] R. E. Prange and S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, 2nd edition, 1990.
- [6] R. Shankar and G. Murthy, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003).
- [7] E. Rezayi and N. Read, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994).
- [8] J. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989).
- [9] R. de Picciotto et al., *Nature* **389** (1997).
- [10] B. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev. B* **47** (1993).
- [11] I. Stanić and M. V. Milovanović, *Phys. Rev. B* **71** (2005).
- [12] I. Spielman, J. Eisenstein, L. Pfeiffer, and K. West, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001).
- [13] I. Spielman, J. Eisenstein, L. Pfeiffer, and K. West, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000).
- [14] M. Kellogg, J. Eisenstein, L. Pfeiffer, and K. West, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004).
- [15] E. Tutuc, M. Shayegan, and D. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **3** (2004).
- [16] M. Kellogg, I. Spielman, J. Eisenstein, L. Pfeiffer, and K. West, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002).

- [17] M. Kellogg, J. Eisenstein, L. Pfeiffer, and K. West, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003).
- [18] S. C. Zhang, *Int. J. of Mod. Phys. B* **6**, 25 (1992).
- [19] J. W. Negele and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, Frontiers in Physics, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.
- [20] N. Nagaosa, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*, Springer-Verlag, 1999.
- [21] K. Moon et al., *Phys. Rev. B* **51** (1995).
- [22] S. H. Simon, E. Rezayi, and M. V. Milovanović, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003).
- [23] M. V. Milovanović, Wavefunctional approach to the bilayer $\nu = 1$ system and a possibility for a double (non-chiral) pseudospin liquid, preprint, 2006.
- [24] A. Stern and B. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002).
- [25] M. Kelly, *Low-Dimensional Semiconductors: Materials, Physics, Technology, Devices*, Series on Semiconductor Science and Technology, Oxford University Press, 1996.