

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ



МАСТЕР РАД

Композитни фермиони у изолованом
Ландауовом нивоу

Студент:
Ана Кнежевић,
7029/2021

Ментор:
проф. Др Милица
Миловановић

Београд, 2022.

Садржај

1 Увод	1
2 Квантни Холов ефекат	5
2.1 Класичан Холов ефекат	5
2.2 Квантни Холов ефекат	7
2.2.1 Симетрична калибрација	9
2.2.2 Проводност у квантном Холовом ефекту	12
3 Фракциони квантни Холов ефекат	13
3.1 Лафлинова стања	15
3.1.1 Потпуно попуњен Ландауов ниво	16
3.2 Композитни фермиони	17
3.2.1 Полупопуњен Ландауов ниво	19
3.3 Стање Мур-Рид	20
4 Бозони у изолованом Ландауовом нивоу на пуњењу $\nu = 1$	21
4.1 Паскјер-Халдејн-Рид конструкција за композитне фермионе	21
4.1.1 Конструкција физичког простора стања	22
4.1.2 Репрезентација у импулсном простору	25
4.2 Хартри-Фокова теорија	28
4.2.1 Кулонова интеракција	31
4.3 Бардин-Купер-Шифер (BCS) теорија	31
5 Електрони у полуупопуњеном изолованом Ландауовом нивоу	35
5.1 Хамилтонијан и везе	36
5.2 Хартри-Фокова теорија	38
5.3 Хартри-Фокова теорија за дугодометну Кулонову интеракцију	39
5.4 Генерализана Кулонова интеракција и Померанчук нестабилност	39
6 Квантна Болцманова једначина за полуупопуњен Ландауов ниво	43
6.1 Вигнерова функција	43
6.2 Извођење квантне Болцманове једначине	44
6.3 Дискусија	50
6.4 Померанчук нестабилност	51

7 Закључак	53
А Фафијан у суперпроводној теорији	55
Б Квантна Болцманова једначина	57
Ц Некомутативна геометрија	59
Ц.1 Некомутативна теорија поља	61
Д Извођења релација за таласне функције при симетричној калибрацији	63

1

Увод

Квантни Холов ефекат је привукао велику пажњу теоријских и експерименталних физичара одмах након његовог открића. Најпре су Клицинг, Дорда и Пепер [1] открили целобројни квантни Холов ефекат 1980. године, а затим су Цуи, Стормер и Госард[2] открили и фракциони квантни Холов ефекат 1982. године.

Квантни Холов ефекат је макроскопски квантни феномен који се јавља у дводимензионалном електронском гасу при ниским температурама и у присуству јаког спољашњег магнетног поља [3]. Холова проводност узима квантоване вредности:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\nu \quad (1.1)$$

где је ν цео број, у случају целобројног квантног Холовог ефекта, док у случају фракционог квантног Холовог ефекта може узимати одређене вредности рационалних бројева.

Један узорак може испољавати целобројни квантни Холов ефекат на одређеној јачини магнетног поља, а фракциони на другој јачини магнетног поља. Целобројни квантни Холов ефекат се јавља када је потенцијал неуређености јачи од потенцијала интеракције, док, у супротном имамо фракциони квантни Холов ефекат[4].

Експериментално најистакнутије вредности код фракционог Холовог ефекта су $\nu = \frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$. Међутим, касније су нађени платои Холове проводности и на другим фракцијама попуњености, како у оквиру основног Ландауовог нивоа, тако и на вишим Ландауовим нивоима. Егзотичне особине нису стране систему који испољава фракциони квантни Холов ефекат. Тако је пронађено да у таквом систему интеракција између електрона прави високо корелисано квантно стање, које је сада препознато као ново стање материје. Оно што је можда најзанимљије лежи у чињеници да наелектрисане честице које се крећу у оваквим системима носе фракцију наелектрисања електрона, као да се електрон поделио. Међутим, електрон је недељив конституент материје [5]. Велику улогу у објашњењу оваквог феномена има топологија и геометрија квантних многочестичних стања система.

Теорија фракционог квантног Холовог ефекта данас разматра све физичке особине дводимензионалних електронских система у присуству јаког магнетног поља, тако

да често мешање Ландауових нивоа, тј. утицај осталих Ландауових нивоа у односу на основни Ландауов ниво, можемо да посматрамо као слабу пертурбацију. Квалитативно, ово значи да најважније физичке особине система зависе од потенцијала међуелектронске интеракције. Ова претпоставка се показала као веома добра када се упореде овако добијени нумерички прорачуни са експерименталним резултатима.

Као што смо већ напоменули, од како је откривен, квантни Холов ефекат је имао велики удео изненађујућих открића. Многа, ако не и већина, важних концепата у овом пољу изгледају толико егзотично, да вероватно никада не би били узети за озбиљно да нису толико били потврђени у експерименту. Један такав концепт је композитни фермион[6]. Опис преко квазичестица које су комбинација електрона са корелационим шупљинама је први дао Рид[7] за опис електрона на пуњењу $\nu = \frac{1}{3}$ Ландауовог нивоа. Ту је представљена једна верзија Черн-Сајмонс теорије за композитне бозоне. Касније, Рид је предлагао сличну композитну слику за електроне на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$, тј. композитне фермионе као ефективни дипол који улази у опис ефективног Ферми мора.

Халперин, Ли и Рид (HLR)[8] дају конкретан опис система полупопуњеног Ландауовог нивоа примењујући Черн-Сајмонс теорију на композитне фермионе, аналогну Черн-Сајмонс-Ландау-Гинзбург теорији за композитне бозоне коју је дао Ценг[9]. У односу на теорију коју смо представили у другом поглављу овог рада, нису користили пројекцију на одређени Ландауов ниво. Они дају могуће одговоре система на спољашња поља разматрајући Черн-Сајмонс теорију у RPA (random phase approximation¹) апроксимацији.

Касније, Шанкар и Мурти [10] анализирају HLR теорију на начин Бома и Пајнса [11], који су разматрали Кулонову (дугодометну) интеракцију у систему електрона. Бом и Пајнс су анализирали колективне ексцитације електронског гаса, и тако увели додатне степене слободе, издвојили плазмоне (колективне ексцитације) у односу на једночестичне ексцитације на кратким дужинама. Примена овога у HLR теорији, довела је Шанкара и Муртија до најосновнијег описа диполне структуре, тј. одређеног узимања колективних ефеката у обзир у изградњи једночестичног описа. Изградња описа на начин магнетоплазмона и једночестичних ексцитација је довела до наметања неких веза. Када те везе уведемо у хамилтонијан, добијамо ефективно диполни опис.

У жељи да, са микроскопске стране, што егзактније разматрају систем композитних фермиона, Паскјер, Халдејн, и касније Рид, примењујући ограничење простора на један Ландауов ниво, уводе прецизан формализам проширеног простора, у случају бозона потпуно попуњеног Ландауовог нивоа. Изградња физичког простора је дефинисана на тај начин прецизно и представља једноставан траг по вештачким степенима слободе.

Донг и Сентил[12] поново разматрају бозонски проблем на $\nu = 1$ попуњености Ландауовог нивоа, инсистирајући да постоји својствена енергија дипола. Овакав поглед, у односу на Ридову формулатуру у средњеног поља, даје бољу основу за примену некомутативне теорије поља.

Настојећи да дубље разуме овај проблем, Сон је увео феноменолошки двокомпо-

¹RPA се неки пут назива "временски зависан Хартри". Ово име даје много бољи опис.

нентну формулатију проблема у случају полуупопуњеног Ландауовог нивоа. То произилази из очигледног захтева за постојање симетрије између честица и шупљина у опису. Затим, Гочанин, Предин, Димитријевић Ђирић, Радовановић и Миловановић[13] дају могући микроскопски опис као основу Сонове теорије где су компоненте Дираковог фермиона такозване композитне честице и композитне шупљине, тј. композитни фермиони.

Ослажајући се на претходне резултате, конструисаћемо теорију у изолованом Ландауовом нивоу засновану на идеји композитних фермиона. А затим, ћемо проверавати нашу теорију у односу на већ добијене раније експерименталне и нумеричке резултате.

У првом поглављу овог рада упознаћемо се са основним појмовима везаним за квантни Холов ефекат. Оно се састоји из две целине. У првој ћемо се бавити класичним решењем за Холов ефекат, док ћемо у другој целини посматрати квантну теорију и применити симетричну калибрацију. Затим, друго поглавље је посвећено фракционом квантном Холовом ефекту. Ту уводимо појмове Лафлиновог стања, композитних фермиона, фафијанског стања и некомпресибилности. У трећем поглављу се бавимо Паскјер-Халдејн-Рид конструкцијом за композитне бозоне на пуњењу $\nu = 1$, решавамо својствени проблем хамилтонијана у оквиру тог формализма и испитујемо могућа спарена стања између композитних фермиона. У четвртом поглављу анализирамо систем електрона у полуупопуњеном Ландауовом нивоу. Као и код система бозона, прво ћемо конструисати хамилтонијан са везама, а потом решавати својствени проблем хамилтонијана у оквиру Хартри-Фокове теорије. У том поглављу ћемо разматрати још и постојање Померанчук нестабилности у систему композитних фермиона. У петом поглављу уводимо појам Вигнерове функције и изводимо квантну Болцманову једначину за систем електрона у полуупопуњеном Ландауовом нивоу. На крају ћемо дати кратку дискусију и закључак.

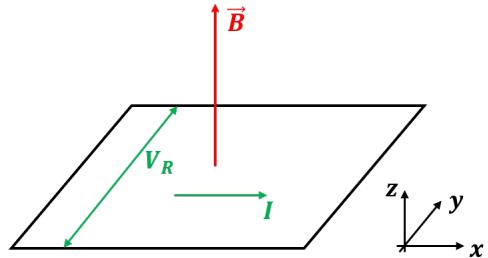
2

Квантни Холов ефекат

У овом поглављу ћемо објаснити основне појмове везане за квантни Холов ефекат који ће нам бити потребни у даљем раду. Холов ефекат се јавља када имамо раван у којој се налазе наелектрисане честице на које делује магнетно поље постављено ортогонално на ту раван. Простор где живе честице је дводимензионалан.

2.1 Класичан Холов ефекат

У овом одељку ћемо се бавити класичним Холовим ефектом. Помагтајмо скуп наелектрисаних честица чије је кретање локализовано у равни $z = 0$. Ово би у експерименту било изведено тако што бисмо узели танку плочицу кроз коју бисмо пуштали електричну струју. Затим укључујемо магнетно поље $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ортогонално на раван на којој се налазе честице. Описана поставка проблема је приказана на слици 2.1.



Слика 2.1: Поставка Холовог ефекта

Једначина кретања електрона у овако описаном систему је дата са:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.1)$$

где је m маса електрона, а e елементарно наелектрисање. Када распишемо ову јед-

начину по компонентама дуж x , y и z -осе редом, добијамо три једначине:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -ev_y B, \quad (2.2)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = ev_x B, \quad (2.3)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (2.4)$$

Како смо наметнули услов да се честице крећу у равни $z = 0$, онда је $v_z = 0$. Преостаје да решимо једначине по v_x и v_y . Кађа се још једном диференцира по времену једначина 2.2, и v_y изрази преко v_x из једначине 2.3, добијамо:

$$\ddot{v}_x + \left(\frac{eB}{m} \right)^2 v_x = 0. \quad (2.5)$$

Ово је једначина линеарног хармонијског осцилатора па су њена решења осцилаторна са фреквенцијом $\omega_B = \frac{eB}{m}$. Ова фреквенција се назива циклотронска фреквенција. За решења једначина кретања добијамо:

$$x(t) = X - R \sin(\omega_B t + \phi), \quad (2.6)$$

$$y(t) = Y + R \cos(\omega_B t + \phi). \quad (2.7)$$

Добили смо кретање по кружници центрираној у тачки (X, Y) и почетном фазом ϕ . Све добијене константе се могу одредити из почетних услова.

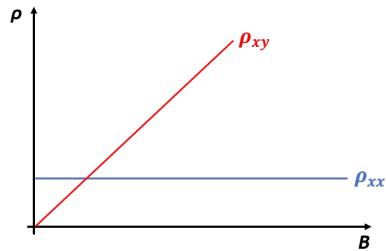
У Друдеовом моделу једначина кретања има облик:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B} - m \frac{\vec{v}}{\tau}, \quad (2.8)$$

где је последњи члан колизиони, а τ представља средње време између два судара честица. Решавањем ове диференцијалне једначине и увођењем једначине за густину струје $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -e\bar{\rho}\vec{v}$ (где је $\bar{\rho}$ концентрација електрона у материјалу), добијамо проводност као тензорску величину:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \tau^2 \omega_B^2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \omega_B \\ \tau \omega_B & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \frac{n \tau e^2}{m}. \quad (2.9)$$

У равнотежном стању Холов ефекат је одређен вандијагоналним елементима тензора специфичне проводности. Холов коефицијент је дефинисан са $R_H = \frac{1}{\sigma_{xy} B} = \frac{1}{n e}$. У класичном случају је зависност отпорности ρ ($\rho = \sigma^{-1}$) од интензитета магнетног поља B дата на слици 2.2.



Слика 2.2: Зависност отпорности од интензитета магнетног поља $\rho(B)$

2.2 Квантни Холов ефекат

У овом одељку ћемо анализирати кретање честице у магнетном пољу посматрајући класичан хамилтонијан оваквог система, а затим ћемо га квантовати. Спин честица нећемо узимати у обзир, уз претпоставку да су због јаког магнетног поља спинови електрона поларизовани[14]. Оваква претпоставка је оправдана у већини експеримената са квантним Холовим ефектом. Решићемо својствени проблем хамилтонијана и одредити својствене енергије у произвољној калибрацији. Те својствене енергије се називају Ландауови нивои. Затим ћемо фиксирати калибрациони услов на симетрични калибрациони услов и показати да је трећа компонента ангуларног момента добар квантни број.

Посматрамо наелектрисану честицу која се креће у спољашњем магнетном пољу. Честице у квантној механици поред орбиталних степена слободе имају и спинске степене слободе. При укључивању магнетног поља, долази до цепања линија, како због интеракције магнетног поља са орбиталним степенима слободе, тако и због интеракције магнетног поља са спинским. Овај ефекат се назива Земанов ефекат. Због малих енергија можемо, за сада, да занемаримо интеракцију са спином. У даљој анализи, електрон посматрамо као честицу без спина .

Класичан лагранжијан за горе описани систем има облик:

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - e\vec{v} \cdot \vec{A}, \quad (2.10)$$

где је T кинетича енергија, V потенцијална енергија која потиче од интеракције електрона са магнетним пољем, док је $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ векторски потенцијал. Одређујемо канонски импулс према дефиницији:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} - e\vec{A} \implies \vec{v} = \frac{\vec{p} + e\vec{A}}{m}. \quad (2.11)$$

Сада можемо да напишемо хамилтонијан овог система:

$$H = \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2. \quad (2.12)$$

Канонски импулс није исто што и механички импулс. Механички импулс можемо да напишемо као: $\vec{\pi} = \vec{p} + e\vec{A}$. Канонски импулс нам је био неопходан због квантације, али \vec{p} није инваријантан на избор калибрационог услова, па његове вредности немају физичко значење. Након квантације добијамо да важе уобичајене комутационе релације између оператора координате и импулса:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (2.13)$$

где су i и j ознаке за компоненте дуж x , односно y -осе.

Сада одређујемо спектар честице која се налази у магнетном пољу:

$$H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle. \quad (2.14)$$

У ту сврху, треба да израчунамо комутационе релације између механичких импулса. Након кратког рачуна добија се:

$$[\pi_1, \pi_2] = -ie\hbar B. \quad (2.15)$$

Уводимо оператор анахилације a на следећи начин:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_1 - i\pi_2). \quad (2.16)$$

Његовим адјунговањем добијамо оператор креације:

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_1 + i\pi_2). \quad (2.17)$$

Они задовољавају комутациону релацију:

$$[a, a^\dagger] = \hat{I}, \quad (2.18)$$

где је \hat{I} јединични оператор. Важно је приметити да овако уведени оператори креације и анахилације задовољавају алгебру бозонских креационих и анахилационих оператора. Сада можемо хамилтонијан да препишемо преко овако уведеног оператора:

$$H = \hbar\omega_B \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.19)$$

Видимо да се јавила циклотронска фреквенција као у класичном случају. Хамилтонијан у овом облику је изражен у другој квантацији и има исти облик као хамилтонијан линеарног хармонијског осцилатора. Након кратког рачуна Дираковом методом, добијамо енергетски спектар:

$$E_n = \hbar\omega_B \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.20)$$

Овиме смо без избора калибрационог услова одредили спектар нашег хамилтонијана. Добијени енергетски нивои се називају Ландауови нивои. Примећујемо да смо кренули од система који је имао два степена слободе, а добили смо систем са једним степеном слободе. Из овога закључујемо да су Ландауови нивои дегенерисани. Вектор из n -тог Ландауовог нивоа се добија на следећи начин:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (2.21)$$

и важи да је $a|0\rangle = 0$.

2.2.1 Симетрична калибрација

У претходном одељку смо одредили спектар електрона који се креће у магнетном пољу без фиксирања калибрационог услова. Како понашање самог система не сме да зависи од избора калибрације, очекујемо да спектар хамилтонијана буде инваријантан на избор калибрације. Међутим како бисмо одредили конкретне таласне функције, неопходно је да изаберемо у којој калибрацији радимо.

У овом одељку ћемо изабрати симетричан калибрациони услов, дефинисан са: $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$. Изабрали смо симетричну калибрацију у односу на ротацију око z -осе. Овакав избор векторског потенцијала не нарушава ротациону симетрију, али нарушава трансляциону симетрију са $E(2)$ на $SO(2)$. Како је ангуларни момент дуж z -осе генератор $SO(2)$ ротација, он је добар квантни број. До сада смо све посматрали преко импулса $\vec{\pi} = \vec{p} + e\vec{A}$, који је инваријантан на избор калибрације. Сада ћемо увести још један импулс: $\tilde{\vec{\pi}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p} - e\vec{A}$. Он није инваријантан на избор калибрације. Одређујемо комутационе релације за овај импулс:

$$[\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2] = -[\pi_1, \pi_2] = ie\hbar B, \quad (2.22)$$

$$[\pi_i, \tilde{\pi}_j] = 0. \quad (2.23)$$

Видимо да у случају симетричне калибрације механички импулс и нови уведени импулс комутирају, те они представљају компатибилне опсервабле. Уводимо опет креационе и анахилационе операторе:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\tilde{\pi}_1 + i\tilde{\pi}_2), \quad (2.24)$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\tilde{\pi}_1 - i\tilde{\pi}_2). \quad (2.25)$$

Они задовољавају исту алгебру као и a и a^\dagger , tj:

$$[b, b^\dagger] = \hat{I}. \quad (2.26)$$

Овај пар оператора комутира са a и a^\dagger . Они доводе до дегенерације Ландауових нивоа. Основно стање, као и сва остала стања, су онда дата са:

$$a|0,0\rangle = 0 \quad b|0,0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad |n,m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n(b^\dagger)^m}{\sqrt{n!m!}}|0,0\rangle. \quad (2.27)$$

Желимо да одредимо основно стање. Прелазимо на независне комплексне координате: $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, па важи $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ и $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Парцијални изводи постају:

$$\begin{aligned} \partial &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \bar{\partial} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Одређујемо креационе и анахилационе операторе у овим координатама:

$$a = -i\sqrt{2} \left(l_B \partial + \frac{\bar{z}}{4l_B} \right), \quad (2.29)$$

$$a^\dagger = -i\sqrt{2} \left(l_B \bar{\partial} - \frac{z}{4l_B} \right), \quad (2.30)$$

$$b = -i\sqrt{2} \left(l_B \bar{\partial} + \frac{z}{4l_B} \right), \quad (2.31)$$

$$b^\dagger = -i\sqrt{2} \left(l_B \partial - \frac{\bar{z}}{4l_B} \right), \quad (2.32)$$

где је $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ магнетна дужина. Најниже стање ћемо добити из услова $a|0,0\rangle = b|0,0\rangle = 0$, тј. $\langle z, \bar{z}|0,0\rangle = \psi_{0,0}(z, \bar{z})$:

$$\langle z, \bar{z}|a|0,0\rangle = 0 \iff \left(l_B \partial + \frac{\bar{z}}{4l_B} \right) \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.33)$$

$$\implies \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = f(z) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}, \quad (2.34)$$

$$\langle z, \bar{z}|b|0,0\rangle = 0 \iff \left(l_B \bar{\partial} + \frac{z}{4l_B} \right) \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.35)$$

$$\implies \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = g(\bar{z}) e^{-\frac{|\bar{z}|^2}{4l_B^2}}. \quad (2.36)$$

Како је ово иста таласна функција, мора да важи: $f(z) = g(\bar{z})$. Одавде добијамо $\partial f(z) = \partial g(\bar{z}) = 0$, па је $f(z) = const.$ Закључујемо да је таласна функција основног

стања дата са: $\boxed{\psi_{0,0} = C_0 e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}}$, где је C_0 нормализациона константа. Из овога лако можемо да одредимо стање $|0, m\rangle$:

$$\langle z, \bar{z}|0, m\rangle = C_m \left(\frac{z}{l_B} \right)^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}. \quad (2.37)$$

На овај начин одредили смо базис у најнижем Ландауовом нивоу $\{|0, m\rangle |m \in \mathbb{Z}\}$. Желимо да одредимо шта је физичка интерпретација овог квантног броја. Наиме, знамо да је L_z добар квантни број. Испоставља се да је m баш својствена вредност оператора L_z , до на константу \hbar . Преписаћемо z компоненту ангуларног момента преко комплексних координата:

$$L_z = i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \implies L_z = \hbar(z\partial - \bar{z}\bar{\partial}), \quad (2.38)$$

а затим се директним деловањем овог оператора у координатном базису на стање $\psi_{0,m}$ добија:

$$L_z |0, m\rangle = m\hbar |0, m\rangle. \quad (2.39)$$

Видимо да је $|0, m\rangle$ заиста својствено стање од L_z . Коришћењем оператора a^\dagger овај базис из основног Ландауовог нивоа преносимо на више Ландауове нивое.

Раније смо добили једначине кретања 2.6, где су (X, Y) биле координате центра орбите. Када посматрамо координате центра орбите као квантне операторе, можемо их написати преко познатих оператора на следећи начин:

$$X = x - \frac{\pi_2}{m\omega_B}, \quad (2.40)$$

$$Y = y + \frac{\pi_1}{m\omega_B}. \quad (2.41)$$

Сада желимо да одредимо дегенерацију Ландауових нивоа помоћу ових оператора. Како бисмо то постигли, прво одређујемо комутационе релације између њих:

$$[X, Y] = il_B^2. \quad (2.42)$$

Овде видимо да координате центра орбите не комутирају и то је баш величина реда магнетне дужине. Једначине 2.6 можемо да посматрамо на следећи начин: локација честице $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$ је векторска сума макроскопског центра орбите $\vec{R} = (X, Y)^T$ око ког се честица креће дуж микроскопске кружнице полупречника $\sim l_B$ у најнижем Ландауовом нивоу (кружница расте са повећањем Ландауовог нивоа).

За одређивање дегенерације Ландауовог нивоа, користићемо аналогију са једнодимензионалном честицом. Њене основне опсервабле су положај x и импулс p , за које важи: $[x, p] = i\hbar$. Ако претпоставимо да се она може кретати само у интервалу реалне осе ширине L_x , имамо квантизацију импулса: $pL_x = 2\pi\hbar n$, $n \in \mathbb{Z}$; па је растојање између два стања дато са: $\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{L_x}$. Онда је број стања: $D = \frac{L_p}{\Delta p}$, где L_p представља ширину интервала могућих вредности импулса. За дегенерацију добијамо: $D = \frac{L_x L_p}{2\pi\hbar}$. Сада генерализујемо овај исказ на случај Ландауових нивоа. Претпостававимо да честица живи у узорку квадратног облика страница L_x и L_y (домет вектора \vec{r}). Како је l_B микроскопска дужина, домет вектора \vec{R} је исти као домет вектора \vec{r} , што је површина експерименталног узорка $A = L_x L_y$. Како су X и Y међусобно коњуговане опсервабле, површина A се може интерпретирати као површина фазног простора, која фигурише у изразу за дегенерацију. Из 2.42 видимо да квадрат магнетне дужине l_B^2 игра улогу \hbar , па је дегенерација коначно:

$$D = \frac{A}{2\pi l_B^2} = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad (2.43)$$

где је ϕ укупан флукс, а ϕ_0 квант флукса дефинисан као $\phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi\hbar}{e}$. Број стања у било ком Ландауовом нивоу је једнак флуксу који пролази кроз узорак мерен у јединицима ϕ_0 , тј. број кваната флукса. Дакле, квант флукса служи само за мерење јачине екстерног поља.

Огромна дегенерација Ландауовог нивоа нам онемогућава да нађемо основно стање тако што попуњавамо једночестична стања у растућем редоследу. Једини изузетак је ако имамо број електрона такав да тачно попунимо одређен број Ландауових нивоа. У том случају постоји једно стање по електрону у сваком Ландауовом нивоу, и постоји само један начин да се она окупирају. Таласна функција је онда Слејтерова детерминанта окупираних Ландауових нивоа [14]. Ово нас мотивише да уведемо

величину коју називамо *фактор пуњења* ν као број попуњености стања Ландауовог нивоа. Што је природно број честица подељен бројем могућих стања у оквиру једног Ландауовог нивоа:

$$\nu = \frac{N}{\frac{\phi}{\phi_0}} = \frac{2\pi n \hbar}{eB}, \quad (2.44)$$

где је $n = \frac{N}{A}$ густина честица. Фактор пуњења не мора бити цео број.

2.2.2 Проводност у квантном Холовом ефекту

У овом одељку ћемо одредити проводност код квантног Холовог ефекта. Класични изрази за гудину наелектрисања $\rho(\vec{r}, t)$ и гудину струје $\vec{j}(\vec{r}, t)$ за N -честични систем су дати са:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N (-e) \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (2.45)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N (-e \vec{v}_i) \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.46)$$

Знамо да важи $\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i + e\vec{A}_i}{m}$. Квантујемо ове изразе и тражимо очекивану вредност, јер је то оно што меримо у експерименту. Како су у квантној механици стања "размазана" у целом простору, у изразима не може да стоји δ -функција. За расподелу морамо да узмемо цео простор са истом вероватноћом, па мењамо δ -функцију фактором $\frac{1}{A}$, где је A површина на којој се налазе електрони. Допринос гудини струје могу да дају само попуњена стања. Нека је скуп попуњених стања означен са \mathcal{P} ; онда имамо:

$$\vec{j} = -\frac{e}{Am} \sum_{|\psi\rangle \in \mathcal{P}} \langle \psi | (\vec{p} + e\vec{A}) |\psi\rangle = -\frac{e}{Am} \sum_n \sum_k \langle n, k | (\vec{p} + e\vec{A}) |n, k\rangle. \quad (2.47)$$

Овде ћемо користити Ландауов калибрациони услов $\vec{A} = -Bx\vec{e}_2$. Експериментална поставка је иста као код класичног Холовог ефекта. Укључујемо и електрично поље $\vec{E} = E\vec{e}_1$. Поново очекујемо тензорску везу између гудине струје и електричног поља преко проводности σ . Потребне су нам очекиване вредности оператора:

$$\begin{aligned} \langle n, k | p_2 | n, k \rangle &= \hbar k, \\ \langle n, k | p_1 | n, k \rangle &= 0, \\ \langle n, k | x | n, k \rangle &= -\frac{\hbar k}{eB} - \frac{mE}{eB^2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Када уврстимо изразе 2.48 у релацију за гудину струје, добијамо:

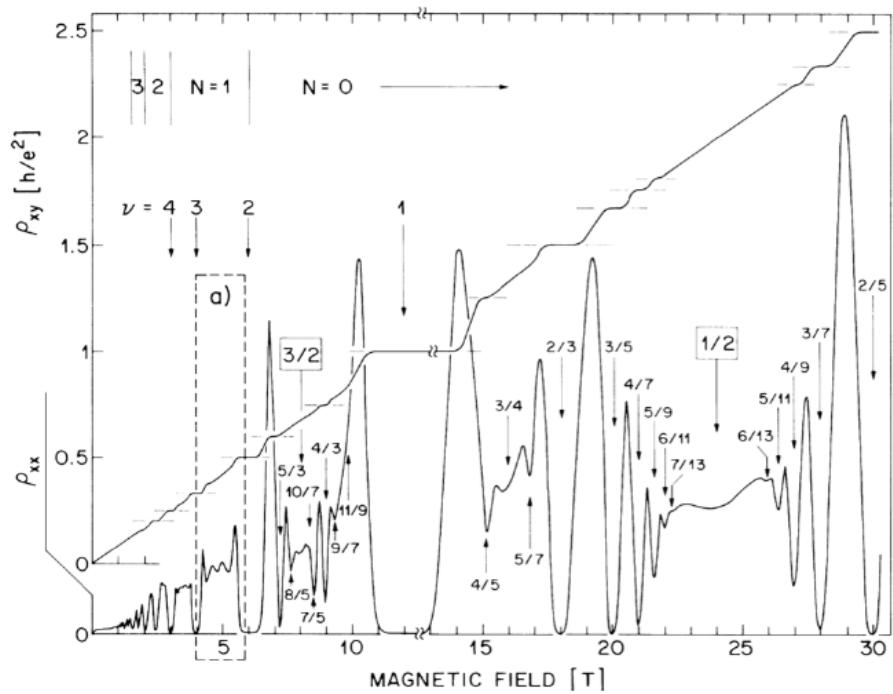
$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e^2}{2\pi\hbar}\nu \\ \frac{e^2}{2\pi\hbar}\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar}\nu}. \quad (2.49)$$

Знак "-" се јавља због избора смера магнетног поља. Видимо да смо добили да је проводност макроскопски квантована.

3

Фракциони квантни Холов ефекат

Фракциони квантни Холов ефекат је откријен 1982. године у експерименту. Први платои Холове отпорности виђени су на пуњењима $\nu = \frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, касније и на пуњењима $\nu = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots$ најнижег Ландауовог нивоа као и на $\nu = \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots$ у оквиру виших Ландауових нивоа.



Слика 3.1: Платои отпорности код фракционог квантног Холовог ефекта [15]

Мотивација да се научници баве темом фракционог квантног Холовог ефекта

потекла је од претпоставке да би Вигнеров кристал требало да се формира када је површинска густина електрона мала, а магнетно пољејако. Вигнеров кристал је вероватно јединствено стационарно стање најниже енергије на датој густини у класичном проблему. Када је магнетно поље слабо, а мала густина електрона, репулзивна Кулонова сила је доминантна у односу на кинетичку енергију. Међутим, када је магнетно поље доволнојако, мешање ексцитација на вишим Ландауовим нивоима се може занемарити, а кинетичка енергија постаје константна. У оваквим условима, електрони би требало да се понашају класично. Уследило је изненађење када су на доступним густинама, квантне флуктуације истопиле кристал и претвориле га у некакву квантну течност. Зашто се то дододило? Испоставља се да је разлог топљења кристала постојање платоа квантног Холовог ефекта на пуњењу $\nu = \frac{n\phi_0}{B}$ (промена фазе ће бити $\gamma = 2\pi N = \frac{\nu e\phi}{\hbar}$, а n густина), где ν узима вредност рационалних бројева са непарним делиоцем [16].

Рекли смо у уводу да се фракциони квантни Холов ефекат јавља када је потенцијал интеракције јачи од потенцијала неуређености. Посматрајмо, за тренутак, једноелектронску слику на пуњењу $\nu = \frac{1}{3}$. Претпоставимо да имамо макроскопски број честица у систему N и могућих $3N$ стања у најнижем Ландауовом нивоу на коме се електрони налазе. Број начина на које можемо да расподелимо електроне у стања најнижег Ландауовог нивоа је $\frac{(3N)!}{N!(2N)!}$, што представља огроман број начина. Свака од тих стања ће носити егзактно исту енергију $\frac{N}{2}\hbar\omega_B$, уколико не узмемо у обзир интеракције међу честицама. Али када узмемо у обзир и интеракције, неке расподеле електрона ће бити фаворизоване у односу на друге. Очекивали бисмо да је овакво стање система на пуњењу $\nu = \frac{1}{3}$ компресибилно због велике густине стања са врло сличним енергијама. Међутим, још једна важна особина квантног Холовог ефекта је некомпресибилност. Некомпресибилност на температури $T = 0$ у одсуству неуређености је неопходан услов за појаву квантног Холовог ефекта. Некомпресибилност Ландауових стања доводи до платоа у Холовој отпорности ρ_{xy} на пуњењу $\nu = \frac{1}{2k+1}$, док одсуство процепа (gapless) код ексцитација доводи до нестанка континуалног отпора ρ_{xx} [9].

Да бисмо разумели фракциони квантни Холов ефекат, неопходно је да нађемо начин на који можемо да третирамо међуелектронске интеракције, на сличан начин на који третирамо кинетичку енергију Ландауових нивоа. Овде наилазимо на проблеме. Први начин који би покушали је да посматрамо интеракцију као неку врсту пертурбације почетног хамилтонијана. Међутим, правила пертурбационе теорије захтевају да прво дијагонализујемо сваки дегенерисан потпростор. Како имамо огромну дегенерацију Ландауовог нивоа на фракционим попуњеностима, овде већ имамо проблем. Не можемо да користимо пертурбациону теорију.

Велики део нашег разумевања фракционог квантног Холовог ефекта је базирано на разумевању пробних таласних функција. Први који су покушали да објасне овај феномен били су Лафлин [17], Халдејн [18] и Халперин [19]. Сматра се да је пробна таласна функција коју је дао Лафлин први велики корак у објашњењу квантног Холовог ефекта. Халдејн, Халперин и Јайн су конструисали хијерархијске таласне функције које објашњавају фракциони квантни Холов ефекат на осталим фактори-

ма пуњења. Јаин је заслужан за увођење композитних фермиона у смислу таласних функција [20].

У овом поглављу рада ћемо се бавити Лафлиновим стањем, стањем композитних фермиона, као и фафијанским стањем, односно стањем Мур-Рида.

3.1 Лафлинова стања

Прве покушаје да се објасни фракциони квантни Холов ефекат дао је Лафлин [17]. Он је објашњавао физику на пуњењу $\nu = \frac{1}{m}$, где је m цео број. Превише је тешко да егзактно дијагонализујемо хамилтонијан. Уместо тога, Лафлин је написао решење за таласну функцију користећи се малим бројем оправданих претпоставки и услова које опис оваквог система мора да задовољава.

Посматрајмо проблем две честице које интегришу на најнижем Ландауовом нивоу. Претпоставићемо да између њих делује произвољан централни потенцијал $V = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. У класичној механици бисмо овај проблем решавали користећи закон одржања ангуларног момента. У квантној механици радимо са својственим стањима ангуларног момента. Обзиром да радимо у најнижем Ландауовом нивоу наметнућемо симетричан калибрациони услов. Видели смо да једночестична таласна функција у овој калибрацији има облик дат једначином 2.37.

Мешање Ландауових нивоа можемо да занемаримо ако је $\hbar\omega_B \gg V$. Уколико подразумевамо да је услов немешања испуњен, онда можемо да напишемо двочестично својствено стање за било који потенцијал на следећи начин:

$$\psi \sim (z_1 + z_2)^M (z_1 - z_2)^m e^{-\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{4l_B^2}}, \quad M, m \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1)$$

где је M ангуларни момент центра масе, а m релативни ангуларни момент.

Сада посматрамо систем од много (N) честица у најнижем Ландауовом нивоу. У општем случају било која таласна функција у $n = 0$ Ландауовом нивоу мора да има форму:

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = f(z_1, \dots, z_N) e^{-\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}}, \quad (3.2)$$

где је $f(z_1, \dots, z_N)$ нека аналитичка функција која мора бити антисиметрична на замену било која два индекса $z_i \longleftrightarrow z_j$, јер су електрони фермиони. Лафлинова претпоставка за таласну функцију основног стања на пуњењу $\nu = \frac{1}{m}$ је:

$$\psi(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}}. \quad (3.3)$$

Лафлинова таласна функција је антисиметрична када је m непаран цео број, а симетрична уколико је m парно. Када је m паран цео број, ова таласна функција се може посматрати као квантно стање бозона.

Желимо да повежемо Лафлинову таласну функцију са одговарајућим бројем попуњености Ландауовог нивоа. Посматрајмо шта таласна функција говори о једној

честици, на пример на позицији z_1 . Чланови који садрже z_1 у себи испред експонента су:

$$\prod_{i=2}^N (z_1 - z_i)^m, \quad (3.4)$$

одавде видимо да је највиши степен z_1 у полиному $m(N-1)$. Ово нам говори да је максимални орбитални ангуларни момент прве честице $m(N-1)$, па је њен максимални радијус $R \approx \sqrt{2mNl_B^2}$, што би, отприлике, заузело површину $A \approx 2\pi mNl_B^2$ ($N-1 \approx N$, за N велико). Број стања у потпуно попуњеном Ландауовом нивоу је $\frac{AB}{\phi_0} = \frac{A}{2\pi l_B^2} \approx mN$. Овај аргумент нам даје фракцију попуњености: $\nu = \frac{1}{m}$.

Таласна функција коју је предложио Лафлин описује некомпресибилан флуид. Некомпресибилан флуид је онај који "не воли" промену густине. На пример Ферми гас би повећао своју густину глобално ако је сабијен, међутим, некомпресибилан флуид је везан за одређену густину и не би показао никакву промену, до одређеног тренутка када би одједном имао локализовану област другачије густине. У тој области се налазе квазичестице и квазишупљине које су заробљене и доприносе густини. Дакле, промена долази скоковито, потребна нам је коначна енергија да бисмо направили промену густине.

3.1.1 Потпуно попуњен Ландауов ниво

У Лафлиновом опису фракционог квантног Холовог ефекта, потпуно попуњен Ландауов ниво се јавља у случају када је $m = 1$. Прво треба да одредимо многочестичну таласну функцију за неинтерагујуће електроне. У ту сврху ћемо претпоставити да N електрона живи у стањима $\psi_i(x)$, $i = 1, \dots, N$. Уобичајено, у случају фермиона, таласну функцију вишег честица конструишимо преко Слејтерове детерминанте:

$$\psi(x_i) = \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \dots & \psi_1(x_N) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(x_1) & \psi_N(x_2) & \dots & \psi_N(x_N) \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

Сада ово можемо да применимо на најнижи Ландауов ниво, где су једночестична стања састављена од узастопних орбиталних квантних бројева:

$$\psi_m \sim z^{m-1} e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}, \quad m = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Слејтерова детерминанта ће у овом случају дати стање облика 3.2, где је функција $f(z_1, \dots, z_N) \stackrel{\text{def}}{=} f(z_i)$ заправо Вандермондова детерминанта:

$$f(z_i) = \begin{vmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_N^0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ \vdots & & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-2} & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j). \quad (3.7)$$

Производ који смо добили је потпуно антисиметричан полином у најнижем реду. Видимо да за $m = 1$ оваква Лафлинова функција јесте таласна функција потпуно попуњеног најнижег Ландауовог нивоа.

3.2 Композитни фермиони

Често се дешава да у току описивања физике квантних система, који су јако купловани, мењамо степене слободе, тј. могу се појавити слабо купловани степени слободе. Пример овога је фракциони квантни Холов ефекат, где почнемо са електронима, а завршимо са фракционо наелектрисаним честицама. Идеја овог одељка је да уведемо нове степене слободе - композитне фермионе. Конструкција композитних фермиона добро описује платое који су примећени код Холове отпорности на фракционим попуњеностима нивоа, слика 3.1. Највећи успех у описивању експерименталних резултата има на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$, где нису примећени платои у Холовој проводности.

Идеју композитних фермиона уводимо помоћу вортекса, што би, у овом случају, значило "увијање" у Лафлиновој таласној функцији. Ово можемо да разумемо ако знамо таласну функције за описивање квази-шупљина на позицији $\eta \in \mathbb{C}$:

$$\psi_h(z; \eta) = \prod_i (z_i - \eta) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m e^{-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}}, \quad (3.8)$$

где m потиче од ангуларног момента, а l_B је магнетна дужина. Оваква таласна функција представља таласну функцију ексцитованог стања. Даље ћемо радити у јединицама магнетне дужине, где је $l_B = 1$. Таласна функција нестаје на позицији $z_i = \eta$. Ово има две последице: даје квази-шупљини фракционо наелектрисање $\frac{e}{m}$. Међутим, Лафлинова таласна функција је холоморфна, те има фиксну зависност од угла, тј. фаза таласне функције се увије сваки пут кад се честица креће око η . То је оно што називамо вортексом. Бери фаза се јавља као последица увијања таласне функције. Фаза таласне функције се мења за 2π када се честица креће око квази-шупљине, ово значи да се фаза такође мења за 2π ако се квази-шупљина креће око честице. Ако вучемо квази-шупљину око $N = \frac{\nu\phi}{\phi_0}$ честица, фаза ће се променити за $\gamma = 2\pi N = \frac{\nu e\phi}{\hbar}$. Међутим, ако вучемо квази-шупљину тамо где већ постоји друга квази-шупљина, наелектрисање ће бити умањено за $\frac{e}{m}$, те је ефективни број честица ту $N = \nu \frac{\phi}{\phi_0} - \frac{1}{m}$. Због овога се мења фаза за $\gamma = -\frac{2\pi}{m}$, што можемо да повежемо са статистиком квази-шупљина где је $\gamma = \frac{2\pi}{m}$. Једино што нам је било потребно да добијемо ове резултате је вортексна природа квази-шупљина.

Ако поново погледамо Лафлинову таласну функцију, део који даје симетрију је:

$$\psi_m(z) \sim \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m. \quad (3.9)$$

Уколико је m парно, ова функција описује бозоне; уколико је m непарно, функција описује фермионе јер је таласна функција у том случају антисиметрична. Можемо да

дефинишемо композитне фермионе као композитне честице које се састоје од електрона везаних за квази-шупљине, тј. вортексе. Цела структура ће бити бозон уколико је m парно. Композитни фермиони се некад описују као електрони који су везани за флукс, што ћемо ми углавном радити у даљем раду, али за сад ћемо се држати дефиниције изнад. Оно што је важно сада напоменути је да композитни фермиони не носе са собом прави магнетни флукс.

Желимо да покажемо да ће композитни фермиони осећати другачије магнетно поље B^* и имати различити фактор пуњења ν^* од електрона. У ту сврху, узећемо неку густину електрона $n = \frac{\nu B}{\phi_0}$ у магнетном пољу и накнадно додати вортексе како бисмо направили композитне фермионе. Затим рачунамо Бери фазу када померамо композитне фермионе дуж пута који окружује област површине A :

$$\gamma = 2\pi \left(\frac{AB}{\phi_0} - (m-1)nA \right), \quad (3.10)$$

где је B физичко, спољашње, магнетно поље. Видимо да Бери фаза има два доприноса: први члан је обичан Бом-Ахаронов члан, док је други члан настао због кружења електрона око вортекса ($m-1$ вортекс је везан за nA електрона). Како би, природно, Бом-Ахаронова фаза требало да буде једнака само првом члану, у опису теорије средњег поља, композитни фермиони виде редуковано ефективно магнетно поље B^* у односу на природно магнетно поље B :

$$\gamma = \frac{2\pi AB^*}{\phi_0} \implies B^* = B - (m-1)n\phi_0. \quad (3.11)$$

Обзиром да имамо само један електрон по композитном фермиону, густина остаје иста. Због тога што се ефективно магнетно поље које осећају композитни фермиони разликује од оног које осећају електрони, мења се и фактор попуњености на следећи начин: $n = \frac{\nu^* B^*}{\phi_0} = \frac{\nu B}{\phi_0}$. Одавде видимо везу између фактора пуњења електрона и фактора пуњења композитних фермиона:

$$\nu = \frac{\nu^*}{1 + (m-1)\nu^*}. \quad (3.12)$$

Ако имамо да је фактор пуњења композитних фермиона $\nu^* = 1$, онда следи да је фактор пуњења електрона $\nu = \frac{1}{m}$. Другим речима, фракциони квантни Холов ефекат се може посматрати као целобројни квантни Холов ефекат композитних фермиона[5].

Посматрајмо случај када имамо пуњење ν^* тако да добијемо целобројни квантни Холов ефекат за композитне фермионе. Претпоставка за таласну функцију, инспирирана Лафлиновим стањем, се обично назива Јајоново стање:

$$\tilde{\psi}_\nu(z) = \mathcal{P}_{LLL} \left[\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{m-1} \psi_{\nu^*}(z, \bar{z}) \right], \quad (3.13)$$

где је \mathcal{P}_{LLL} пројектор на најнижи Ландауов ниво, $\psi_{\nu^*}(z, \bar{z})$ таласна функција за ν^* потпуно попуњеног Ландауовог нивоа, а фактор $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{m-1}$ везује $m-1$ вортекса

за сваки електрон. Таласна функција $\psi_{\nu^*}(z, \bar{z})$ се лако може конструисати помоћу Слејтерове детерминанте. Зашто нам је потребан пројектор на најнижи Ландауов ниво? Ако имамо електроне на пуњењу $\nu < 1$, они ће бити у најнижем Ландауовом нивоу. Међутим, стања целобројног квантног Холовог ефекта $\psi_{\nu^*}(z, \bar{z})$ нису стања која припадају најнижем Ландауовом нивоу [5].

3.2.1 Полупопуњен Ландауов ниво

Као што смо горе напоменули, највећи успех слике композитних фермиона лежи у опису физике на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$. Када гледамо експерименталне резултате, на овом пуњењу не постоји плато Холове проводности. Заправо, изгледа да изразито одсуство Холовог платоа у целом тог региону.

Посматрајмо композитни фермион који се састоји од електрона везаног за два вортекса. Из аналогије са плазмом, ако на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$ густина електрона износи $n = \frac{eB}{4\pi} = \frac{B}{2\phi_0}$, онда је ефективно магнетно поље које осећа композитни фермион:

$$B^* = B - 2n\phi_0 = 0. \quad (3.14)$$

Добили смо да у полупопуњеном Ландауовом нивоу, композитни фермион, ефективно, не осећа магнетно поље.

Композитни фермиони формирају Ферми површ у најнижем Ландауовом нивоу са Ферми импулсом:

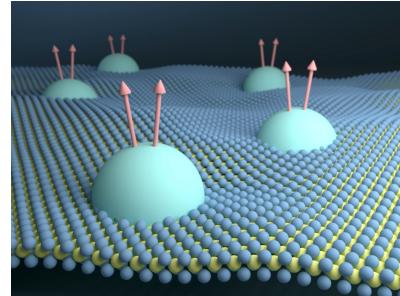
$$k_F = \sqrt{4\pi n} = 1.^1 \quad (3.15)$$

У експерименту видимо да се, на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$, Холово стање јавља на $B \approx 25\text{T}$. Ако имамо N честица са координатама \vec{r}_i , таласна функција за честице које леже у Ферми мору је дата са:

$$\psi_F = \det \left(e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j} \right). \quad (3.16)$$

Ово није таласна функција најнижег Ландауовог нивоа, јер имамо $i\vec{k}\vec{r} = i\frac{1}{2}(k\bar{z} + \bar{k}z)$. Што Можемо видети (додатак Џ), да ова величина може да се напише преко оба пара креационих и анихиляционих оператора које смо увели у првом поглављу. Таласна функција која описује интерагујуће Ферми море се назива Рејази-Рид таласна функција, и представља таласну функцију 3.16 пројектовану на најнижи Ландауов ниво:

¹Ово је случај када имамо потпуно поларизоване спинове електрона, међутим, када то није случај, добијамо фактор $\sqrt{2}$.



Слика 3.2: Композитни фермион са два вортекса у суперпроводнику

$$\tilde{\psi}_{\nu=\frac{1}{2}} = \mathcal{P}_{LLL} \left[\prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \det \left(e^{ik_m \vec{r}_i} \right) e^{-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4}} \right], \quad (3.17)$$

где фактор $(z_i - z_j)^2$ показује да сваки композитни фермион има два вортекса, по претпоставци са почетка. Развличите особине ових стања на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$, са интеракцијама, проучавана су у контексту HLR-теорије.

Постоји доста експерименталних доказа који показују да на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$ заиста постоји стање Ферми течности. Ово се може показати кад бисмо мало променили спољашње магнетно поље. Онда би композитни фермиони осетили веома мало магнетно поље B^* .

3.3 Стање Мур-Рид

Фафијанско стање, односно Мур-Рид стање[21] описује паран број честица N на пуњењу $\nu = \frac{1}{m}$. Таласна функција фафијана се може написати на следећи начин:

$$\tilde{\psi} = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m. \quad (3.18)$$

У односу на Лафлиново стање, ово стање је симетрично када је m непарно, а антисиметрично (описује фермионе) када је m парно.

Уочимо неку $N \times N$ антисиметричну матрицу $[M_{ij}]_{N \times N}$. Детерминанта такве матрице ће бити једнака нули уколико је N непаран број, али када је N паран број она се може изразити преко квадрата неког објекта који називамо *фафијан*:

$$\det(M) = \text{Pf}(M)^2. \quad (3.19)$$

Фафијан је полином степена $\frac{N}{2}$ над елементима матрице са целобројним коефицијентима. Дефинишемо фафијан на следећи начин:

$$\text{Pf}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^N N!} \sum_p (-1)^p M_{1_p 2_p} M_{3_p 4_p} \dots M_{N-1_p N_p}, \quad (3.20)$$

где је p пермутација $\{1, 2, \dots, N\}$, на пример 1_p је пермутована верзија 1, $(-1)^p$ је знак пермутације [14].

На пример, фафијан за четири честице има облик:

$$\text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} + \frac{1}{z_1 - z_3} \frac{1}{z_4 - z_2} + \frac{1}{z_1 - z_4} \frac{1}{z_2 - z_3}, \quad (3.21)$$

међутим када расте број честица, израз се брзо повећава.

Мур-Рид таласна функција се може интерпретирати у терминима композитних фермиона. Фактор $\prod (z_i - z_j)^m$ везује m вортекса за сваки електрон. Ако је m паран број, онда је електрон, у основи композитног фермиона, фермион. Везивањем парног броја вортекса за електрон, електрон остаје фермион. У случају да је m непаран број, онда је "електрон" у основи композитног фермиона, заправо, бозон. Везивањем непарног броја вортекса за бозон, посматрана композитна честица постаје фермион.

4

Бозони у изолованом Ландауовом нивоу на пуњењу $\nu = 1$

Теоријски посматрано течност композитних фермиона је очекивано да настане када су наелектрисане честице у систему бозони, а не фермиони. За бозоне, на пуњењу $\nu = 1$, један квант флукса се пребације са бозона на композитне фермионе који се крећу у ефективном магнетном пољу $B^* = 0$. Нумерички прорачуни показују да је право основно стање некомпресибилног фракционог Холовог система заправо бозонски фафијан. Он се добија кондензацијом паре композитних фермиона. Неспарено стање композитних фермиона је занимљиво за разматрање као могуће основно стање за неке интеракције, и као "родитељско" стање за разумевање бозонског фафијана.

У овом поглављу ћемо разматрати бозоне у изолованом Ландауовом нивоу на пуњењу $\nu = 1$. У оквиру њега ћемо конструисати физички простор стања за квантни опис система који посматрамо, а затим ћемо га изразити у импулсном простору. Други одељак поглавља се бави решавањем својственог проблема хамилтонијана са везама помоћу Хартри-Фокове теорије. У трећем одељку ћемо применити Хартри-Фок теорију на дугодометну Кулонову интеракцију. На крају овог поглавља ћемо применити BCS теорију средњег поља на наш микроскопски хамилтонијан.

4.1 Паскјер-Халдејн-Рид конструкција за композитне фермионе

Формализам који су развили Паскјер и Халдејн[22], а касније допунио Рид[23], описује Хилбертов простор бозона на пуњењу $\nu = 1$ у терминима Хилбертовог простора композитних фермиона. На пуњењу $\nu = 1$, у сваком стању ψ_n изолованог Ландауовог нивоа постоји, у средњем, један бозон.

4.1.1 Конструкција физичког простора стања

Једночестични Хилбертов протор $\mathcal{H} = \text{span}\{|n, m\rangle | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ уводимо са две врсте индекса, леви индекс m одговара електрону из композитног фермиона, док десни индекс n одговара квази-шупљини. Десне индексе ћемо обележавати са n, n', n'', \dots , а леве, слично, са m, m', m'', \dots У овом простору уводимо операторе креације који креирају стање $|n, m\rangle$ из Фоковог вакуума на следећи начин $|n, m\rangle = c_{nm}^\dagger |0\rangle$. На сличан начин уводимо и операторе анахилације. Уведене операторе желимо да "попакујемо" у матрицу:

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

што скраћено записујемо као $c = [c_{mn}]_{N \times N}$, односно $c^\dagger = [c_{nm}^\dagger]_{N \times N}$. Овако уведено, видимо да c_{mn} и c_{nm}^\dagger живе у Хилбертовом простору \mathcal{H}^N . Радимо са фермионима те су нам потребне антикомутационе релације, с тим што пазимо на леве и десне индексе:

$$\{c_{mn}, c_{m'n'}^\dagger\} = \delta_{mm'}\delta_{nn'}, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

Сада желимо да видимо које су симетрије ове алгебре. Обзиром да радимо са матрицама очекујемо да су то неке унитарне групе, јер желимо да се одржи траг матрица. Пошто разликујемо леве и десне индексе имамо леву и десну унитарну групу $U_L(N)$ и $U_R(N)$, редом. Примећујемо да ово јесте симетрија алгебре, јер се при дејству овако уведених оператора симетрије анахилациони и креациони оператори трансформишу на следећи начин:

$$\begin{aligned} c &\longrightarrow U_L c U_R, \\ c^\dagger &\longrightarrow U_R^\dagger c^\dagger U_L^\dagger, \end{aligned} \quad (4.3)$$

па се директном провером види да је ово симетрија алгебре:

$$\begin{aligned} \{U_{Lnl} c_{lk} U_{Rkm}, U_{Rm'l'}^\dagger c_{l'k'}^\dagger U_{Lk'n'}^\dagger\} &= U_{Lnl} U_{Rkm} U_{Rm'l'}^\dagger U_{Lk'n'}^\dagger \{c_{lk}, c_{l'k'}^\dagger\} \\ &= U_{Lnl} U_{Rkm} U_{Rm'l'}^\dagger U_{Lln'}^\dagger = U_{Lnl} U_{Lln'}^\dagger U_{km} U_{Rm'l'}^\dagger \\ &= \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Следећи корак је да репрезентујемо групе у N -димензионом простору стања. Овај простор стања називаћемо проширен Хилбертов простор. Приметимо да се оператор броја честица може изразити на следећи начин:

$$\hat{N} \stackrel{\text{def}}{=} c_{nm}^\dagger c_{mn}, \quad (4.5)$$

што може да се напише и као: $\hat{N} = \text{Tr}(c^\dagger c)$. Подразумевана је Ајнштајнова конвенција о сумирању по поновљеним индексима. Закључујемо да се оператор броја честица

не трансформише при горе дефинисаним трансформацијама. Из физичких разлога желимо да нам број честица буде одржан у систему. Радимо са N -честичним стањима, а знамо да је $U(1)$ симетрија квантне механике чији је генератор баш оператор броја честица:

$$U \in U(1) \implies U(\alpha) = e^{i\alpha\hat{N}}. \quad (4.6)$$

Желимо да оператор c^\dagger креира N -честично стање тако да се симетрија дефинисана горе наведеним трансформацијама понаша као $U(1)$ симетрија над тим стањима. Из тог разлога дефинишемо следећи закон трансформације c -ова:

$$c \longrightarrow c' = e^{i\alpha\hat{N}}c = e^{i\alpha N}c, \quad (4.7)$$

са друге стране:

$$\begin{aligned} c &\longrightarrow c' = e^{i\rho_L\epsilon}ce^{i\rho_R\epsilon}, \\ c^\dagger &\longrightarrow c'^\dagger = e^{-i\rho_L\epsilon}c^\dagger e^{-i\rho_R\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где су оператори ρ_L и ρ_R генератори симетрија $U_L(N)$ и $U_R(N)$ респективно, те су самим тим хермитски оператори. Посматрајући инфинитетизималне законе трансформације добијамо:

$$\begin{aligned} \delta c &= c' - c = (1 + i\rho_L\epsilon)c(1 + i\rho_R\epsilon) \\ &= i\epsilon(\rho_Lc + c\rho_R), \end{aligned} \quad (4.9)$$

слично и за операторе креације

$$\delta c^\dagger = -i\epsilon(\rho_R^\dagger c^\dagger + c^\dagger \rho_L^\dagger). \quad (4.10)$$

Одавде добијамо једначине:

$$Nc = \rho_Lc + c\rho_R, \quad (4.11)$$

$$Nc^\dagger = c^\dagger \rho_L^\dagger + \rho_R^\dagger c^\dagger. \quad (4.12)$$

На једначину 4.11 делујемо са леве стране оператором c^\dagger , док на једначину 4.12 делујемо оператором c са десне стране и добијамо:

$$\begin{aligned} Nc^\dagger c &= c^\dagger \rho_L c + c^\dagger c \rho_R, \\ Nc^\dagger c &= c^\dagger \rho_L c + \rho_R c^\dagger c. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Одузимањем ових једначина добијамо да важи:

$$\boxed{\left[\rho_R, c^\dagger c \right] = 0}. \quad (4.14)$$

Очигледно решење је $\rho_R = c^\dagger c$. Ово није једино решење али га бирали тако из физичких разлога. Помоћу симетрије десних индекса ћемо наметнути одређене услове који ће нам дати физички простор стања.

За ρ_L добијамо из једначине 4.11 $[\rho_L - (N - cc^\dagger)]c = 0$, па је:

$$\boxed{\rho_L = N \cdot \hat{I} - cc^\dagger}. \quad (4.15)$$

Као што смо већ напоменули, желимо да број честица у систему буде одржан. Тако да је први услов који намећемо на проширен простор стања:

$$\hat{N} |\psi_{phy}\rangle = N |\psi_{phy}\rangle, \quad (4.16)$$

$$\iff \text{Tr}\{\rho_R\} |\psi_{phy}\rangle = N |\psi_{phy}\rangle. \quad (4.17)$$

Генератор $U_R(N)$ групе можемо да декомпонујемо на следећи начин:

$$\rho_R = \frac{1}{N} \text{Tr}\{\rho_R\} \cdot \hat{I} + \rho_R - \frac{1}{N} \text{Tr}\{\rho_R\} \cdot \hat{I}, \quad (4.18)$$

где је \hat{I} јединични оператор. Први члан у декомпозицији представља везе које намећемо систему, док преостали члан генерише $SU(N)_R$ групу.

Други услов који намећемо на стања јесте њихова инваријантност под дејством $SU(N)_R$ групе, тј. захтевамо да су физичка стања синглети $SU(N)_R$ групе. Како бисмо формирали иредуцибилне тензоре при дејству неке групе, користимо инваријантне тензоре те групе. Зато при формирању наших физичких стања (синглета $SU(N)_R$ групе) користимо N -димензиони Леви-Чивита тензор:

$$|\psi_{phy}^{m_1, m_2, \dots, m_N}\rangle = \mathcal{N} \epsilon^{n_1 n_2 \dots n_N} c_{m_1 n_1}^\dagger c_{m_2 n_2}^\dagger \dots c_{m_N n_N}^\dagger |0\rangle, \quad (4.19)$$

где је \mathcal{N} нормализациона константа. Добијено стање очигледно задовољава оба услова која смо наметнули: да је N -честично и синглетно. Услед антисиметричности Леви-Чивита тензора, као и фермионских креационих оператора ово стање је симетрично на замену левих n индекса. То значи да се оно може посматрати као стање N бозона дефинисано помоћу креационих оператора $\{a_m^\dagger | m \in \mathbb{N}_0\}$ таквих да важе комутационе релације:

$$[a_m, a_{m'}^\dagger] = \delta_{mm'}, \quad (4.20)$$

а горе наведено стање постаје:

$$|\psi_{phy}^{m_1 m_2 \dots m_N}\rangle = a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \dots a_{m_N}^\dagger |0\rangle. \quad (4.21)$$

Приметимо да је $\text{Tr}\{\rho_L\} = N - \text{Tr}\{c^\dagger c\} = 0$, што значи да је група везана за леве индексе заправо $SU(N)_L$. Она ће остати симетрија нашег система и садржаће подгрупу која ће представљати ротације и транслације неке дводимензионе многострукости (сфера, торус, бесконачна раван,...) на којој наше физичке честице живе [23]. Можемо да напишемо генераторе трансформације за десне индексе n преко оператора креације и анахилације са два индекса на следећи начин:

$$\rho_{nn'}^R = c_{nm}^\dagger c_{mn'}, \quad (4.22)$$

Из релације 4.15 можемо исто то да урадимо за генераторе трансформације левих индекса m :

$$\rho_{mm'}^L = c_{nm'}^\dagger c_{mn}. \quad (4.23)$$

Операторе дефинисане једначинама 4.22 и 4.23 зовемо **десни оператори густине** и **леви оператори густине** редом. Индекси m и n означавају орбитале у оквиру једног Ландауовог нивоа.

Десни оператори густине морају да задовољавају N^2 услова на овако постављен систем:

$$(\rho_{nn'}^R - \delta_{nn'}) |\psi_{phy}^{m_1, m_2, \dots, m_N}\rangle = 0, \quad (4.24)$$

како бисмо добили потпростор стања који одговара физичком (непроширеном) Хилбертовом простору [23]. Док генератори ρ^L представљају физичку густину посматраног система. Важност оператора густине лежи у Коновој теореми која каже да је основно стање било ког интерагујућег система, са датом (фиксном) међучестичном интеракцијом, јединствен функционал електронске густине.

4.1.2 Репрезентација у импулсном простору

Желимо операторе густине да изразимо преко њиховог Фурије трансформа, тј. у импулсном простору. Међутим, морамо да водимо рачуна о некомуутативности. У решењу за класичан случај кретања наелектрисане честице у спољашњем магнетном пољу $\vec{B} = Be_z$ добијамо кретање честице по кружници центрираној око тачке (X, Y) . Након квантовања координате центра орбите не комутирају:

$$[X, Y] = i. \quad (4.25)$$

Ако дефинишемо вектор центра орбите са $\vec{R} = (X \ Y)^T$, можемо да уведемо оператор магнетне транслације $\tau_{\vec{k}} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\vec{k}\vec{R}}$. Овај оператор ћемо користити да бисмо прешли у импулсни простор (видети апендиксе А и Б)[12]. Да бисмо пребацили операторе густине у импулсни простор, прво ћемо то урадити за анахилационе операторе. Анахилациони оператори, преко својих Фурије трансформа се могу записати на следећи начин:

$$c_{mn} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \langle m | \tau_{\vec{k}} | n \rangle c_{\vec{k}}. \quad (4.26)$$

Сви оператори се могу представити као кернел интеграла, у случају аничилационог оператора c имамо кернел $c(z, \bar{z}')$. Такође оператори се могу записати преко базиса:

$$c(z, \bar{z}') = c_{mn} \psi_m(z) \overline{\psi_n(z')} \quad (4.27)$$

$$= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} c_{\vec{k}} \tau_{\vec{k}}(z, \bar{z}'). \quad (4.28)$$

Да бисмо прешли у импулсни простор треба да нађемо инверз. То можемо да урадимо тако што помножимо са инверзном транслацијом и проинтегралимо по z и z' :

$$\begin{aligned}
 \int d^2z d^2z' c(z, \bar{z}') \tau_{-\vec{k}'}(z', \bar{z}) &= \int \frac{d^2k d^2z d^2z'}{(2\pi)^2} c_{\vec{k}} \tau_{\vec{k}}(z, \bar{z}') \tau_{-\vec{k}'}(z', \bar{z}) \\
 &= \int \frac{d^2k d^2z}{(2\pi)^2} c_{\vec{k}} \langle z | e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{R} + \frac{i}{2}\vec{k}\wedge\vec{k}'} | z \rangle \\
 &= \int \frac{d^2k d^2z}{(2\pi)^2} c_{\vec{k}} \langle z | e^{\frac{iz}{2}((\vec{k}-\vec{k}')_x - i(\vec{k}-\vec{k}')_y) + \frac{i\bar{z}}{2}((\vec{k}-\vec{k}')_x + i(\vec{k}-\vec{k}')_y)} | z \rangle e^{\frac{i}{2}\vec{k}\wedge\vec{k}'} \\
 &= \int \frac{d^2k d^2r}{(2\pi)^2} c_{\vec{k}} e^{\frac{i}{2}\vec{k}\wedge\vec{k}'} e^{-\frac{|\vec{k}-\vec{k}'|^2}{2}} e^{i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')} \\
 &= \int d^2k c_{\vec{k}} e^{\frac{i}{2}\vec{k}\wedge\vec{k}'} e^{-\frac{|\vec{k}-\vec{k}'|^2}{2}} \delta^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}') \\
 &= c_{\vec{k}'}.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Из претходног рачуна следи да је оператор анихилације једнак:

$$c_{\vec{k}} = \sum_{m,n} c_{mn} \langle n | \tau_{-\vec{k}} | m \rangle. \tag{4.30}$$

Током рачуна смо користили комутациону релацију између z и \bar{z} дату са $[z, \bar{z}] = -2$. Антикомутациона релација за операторе креације и анихилације у импулсном простору је дата са:

$$\{c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'}^\dagger\} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{4.31}$$

Сада рачунамо леви и десни оператор густине у импулсном простору:

$$\begin{aligned}
 \rho_{mm'}^L &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \langle m | \tau_{\vec{k}} | m' \rangle \rho_{\vec{k}}^L \\
 &= \sum_n \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^4} \langle n | \tau_{-\vec{k}} | m' \rangle \langle m | \tau_{\vec{k}'} | n \rangle c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}'} \\
 &= \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^4} \langle m | \tau_{\vec{k}'} \tau_{-\vec{k}} | m' \rangle c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}'} \\
 &= \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^4} \langle m | e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{R} + \frac{i}{2}(\vec{k}\wedge\vec{k}')} | m' \rangle c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}'} \\
 &= \int \frac{d^2k d^2q}{(2\pi)^4} \langle m | e^{i\vec{q}\vec{R} + \frac{i}{2}\vec{k}\wedge\vec{q}} | m' \rangle c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}+\vec{q}} \\
 &= \int \frac{d^2k d^2q}{(2\pi)^4} e^{\frac{i}{2}\vec{k}\wedge\vec{q}} \langle m | \tau_{\vec{q}} | m' \rangle c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{q}+\vec{k}}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Леви оператор густине се у импулсном простору може написати на следећи начин:

$$\rho^L(\vec{q}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}\wedge\vec{q})} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}+\vec{q}}. \tag{4.33}$$

Видимо да у лимесу када $q \rightarrow 0$ број композитних фермиона одговара броју физичких бозона [12]. Слично претходном рачуну, из израза за десни оператор густине, преко Фурије трансформа, датог са:

$$\rho_{nn'}^R = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \langle n | \tau_{\vec{k}} | n' \rangle \rho_{\vec{k}}^R, \quad (4.34)$$

добијамо десни оператор густине у импулсном простору:

$$\rho^R(\vec{q}) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\frac{i}{2}(\vec{k} \wedge \vec{q})} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k} + \vec{q}}. \quad (4.35)$$

Испоставља се да оператори густине пројектовани на најнижи Ландауов ниво задовољавају одговарајућу Лијеву алгебру. Желимо да проверимо како изгледа алгебра ових оператора. Прво проверавамо комутациону релацију између левих и десних оператора густине:

$$\begin{aligned} [\rho^R(\vec{q}), \rho^L(\vec{q}')] &= \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^4} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}' \wedge \vec{q}' - \vec{k} \wedge \vec{q})} [c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k} + \vec{q}'} c_{\vec{k}'}^\dagger c_{\vec{k}' + \vec{q}'}] \\ &= \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} \left[e^{\frac{i}{2}[(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q}) \wedge \vec{q}' - \vec{r} \wedge \vec{q} + \vec{q}' \wedge \vec{q}]} - e^{\frac{i}{2}[(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{q}) \wedge \vec{q}' - \vec{r} \wedge \vec{q}]} \right] c_{\vec{r} - \vec{q}' - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

У рачуну смо прво користили везу између комутатора и антакомутатора $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$, где су A, B и C произвољни оператори. Затим смо искористили антакомутациону релацију између аничилационих и креационих оператора у импулсном простору, а потом смо направили смену променљивих $\vec{r} = \vec{k} + \vec{q}$.

Комутациона релација између десних оператора густине је:

$$\begin{aligned} [\rho^R(\vec{q}), \rho^R(\vec{q}')] &= \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^4} e^{-\frac{i}{2}(\vec{k}' \wedge \vec{q}' + \vec{k} \wedge \vec{q})} [c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k} + \vec{q}'} c_{\vec{k}'}^\dagger c_{\vec{k}' + \vec{q}'}] \\ &= \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^2} e^{-\frac{i}{2}(\vec{k}' \wedge \vec{q}' + \vec{k} \wedge \vec{q})} [\delta^{(2)} \left(\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{q} - \vec{k}' + \frac{1}{2}\vec{q}' \right) c_{\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}' + \frac{1}{2}\vec{q}'} - \\ &\quad - \delta^{(2)} \left(\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{q} - \vec{k}' - \frac{1}{2}\vec{q}' \right) c_{\vec{k}' - \frac{1}{2}\vec{q}'}^\dagger c_{\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{q}}] \\ &= \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} \left[e^{-\frac{i}{2}((\vec{r} - \vec{q}') \wedge \vec{q} + (\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q}) \wedge \vec{q}')} c_{\vec{r} - \vec{q}' - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q}} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{i}{2}(\vec{r} \wedge \vec{q} + (\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{q}) \wedge \vec{q}')} c_{\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{q} - \vec{q}'}^\dagger c_{\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\frac{i}{2}\vec{k} \wedge (\vec{q} + \vec{q}')} \left(e^{-\frac{i}{2}\vec{q}' \wedge \vec{q}} - e^{\frac{i}{2}\vec{q}' \wedge \vec{q}} \right) c_{\vec{k} - \vec{q} - \vec{q}'}^\dagger c_{\vec{k}} \\ &= -2i \sin \left(\frac{\vec{q} \wedge \vec{q}'}{2} \right) \rho^R(\vec{q} + \vec{q'}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

У трећем реду рачуна смо направили смену $\vec{r} = \vec{k} + \vec{q}$, као у претходном рачуну 4.36, а затим у следећем реду смо направили смену $\vec{k} = \vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q}$.

Слично претходном рачуну рачунамо комутациону релацију за леве операторе густине $\rho^L(\vec{q})$:

$$\begin{aligned} [\rho^L(\vec{q}), \rho^L(\vec{q}')] &= \int \frac{d^2k d^2k'}{(2\pi)^4} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}' \wedge \vec{q}' + \vec{k} \wedge \vec{q})} [c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}+\vec{q}'}, c_{\vec{k}'}^\dagger c_{\vec{k}'+\vec{q}'}] \\ &= 2i \sin\left(\frac{\vec{q} \wedge \vec{q}'}{2}\right) \rho^L(\vec{q} + \vec{q'}). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Видимо да леви оператори густине задовољавају ГМР алгебру (Гирвин-Платзман-Мекдоналд) [3], док десни оператори густине задовољавају алгебру до на знак ”–”. Обзиром да десни оператори густине комутирају са левим операторима густине за сваки импулс \vec{q} , десни оператори густине ће комутирати и са хамилтонијаном: $[\rho^R(\vec{q}), H] = 0$, који је дефинисан само преко левих оператора густине.

4.2 Хартри-Фокова теорија

Често коришћен лимес за нумеричке прорачуне HLR (Халперин, Ли, Рид) теорије, као и добра апроксимација за опис експеримената, је лимес у коме је Кулонова интеракција мања од растојања између Ландауових нивоа. Због тога можемо да кажемо да је у реду да дефинишемо квантни Холов проблем пројекцијом Кулонове интеракције на највиши окупирани Ландауов ниво и игнорисати све остале. У овом лимесу постоји само интеракциона енергија, јер кинетичку енергију можемо да занемаримо због структуре Ландауових нивоа.

Хамилтонијан за најнижи Ландауов ниво се може написати преко Халдејновог псеудопотенцијала:

$$\mathcal{H} = \sum_m V_m \mathcal{P}_m. \quad (4.40)$$

где је \mathcal{P}_m пројектор на m -то својствено стање оператора релативног ангуларног момената. Видимо да је хамилтонијан потпуно одређен скупом бројева V_m који представљају енергије интеракције између честица са релативним ангуларним моментом m . У другој квантацији бозонски хамилтонијан се може записати на следећи начин:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} V_{m_1, m_2; m_3, m_4} a_{m_1}^\dagger a_{m_1} a_{m_2}^\dagger a_{m_2} a_{m_3} a_{m_4}. \quad (4.41)$$

У проширеном Хилбертовом простору композитних фермиона хамилтонијан можемо да напишемо:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_4 \\ n_1, n_2}} V_{m_1, m_2; m_3, m_4} c_{n_1 m_1}^\dagger c_{n_2 m_2}^\dagger c_{m_4 n_2} c_{m_3 n_1}. \quad (4.42)$$

Да бисмо добили само физичка стања из овог хамилтонијана морамо да уведемо услов 4.24. Услов који уводимо мора да комутира са хамилтонијаном.

Хамилтонијан желимо да изразимо у импулсном простору преко оператора густине. Такође, како бисмо задржали структуру физичког Хилбертовог простора у импулсни простор морамо да пребацимо и услов 4.24 на десне операторе густине:

$$\rho_{\vec{q}}^R |\psi_{phy}\rangle = \bar{\rho}(2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{q}) |\psi_{phy}\rangle. \quad (4.43)$$

У литератури постоје два прилаза почетном хамилтонијану 4.44. Један прилаз дао је Рид у раду [23]. Он предлаже хамилтонијан из проширеног Хилбертовог простора, 4.42 дефинисан преко оператора густине у следећем облику:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) : \rho_{\vec{q}}^L \rho_{-\vec{q}}^L :, \quad (4.44)$$

где је $\tilde{V}(\vec{q}) = V(\vec{q})e^{-\frac{q^2}{2}}$. У овој релацији $V(\vec{q})$ представља потенцијал у импулсном простору добијен Фурије трансформацијом, а експоненцијални члан се јавља због пројекције на најнижи Ландауов ниво.

Желимо да добијемо хамилтонијан у облику:

$$H_{HF} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \varepsilon_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}, \quad (4.45)$$

како бисмо добили дисперзиону релацију за проблем који решавамо. У ту сврху користимо Хартри-Фок прилаз:

$$\begin{aligned} H_{HF} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 k_1 d^2 k_2 d^2 q}{(2\pi)^6} \tilde{V}(q) e^{\frac{i}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \wedge \vec{q}} & [c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} < c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} > \\ & + c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} < c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} > \\ & - c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} < c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} > \\ & - c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} < c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} > \\ & + const] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Прва два члана су директни Хартријеви чланови, док су друга два изменска Фокова члана. Очекивање од $< c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} >$ даје густину стања $n_{\vec{k}}$, која је код фермиона на температури $T = 0$ једнака $\theta(\vec{k} - \vec{k}_F)$. Након сређивања израза добијамо Хартри-Фок хамилтонијан облика:

$$H_{HF} = \int \frac{d^2 k_1 d^2 k_2}{(2\pi)^4} \tilde{V}(0) n_{\vec{k}_1} c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2} - \int \frac{d^2 k_1 d^2 k_2}{(2\pi)^4} \tilde{V}(|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|) n_{\vec{k}_1} c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2} \quad (4.47)$$

Налазимо да је дисперзионна релација у зависности од \vec{k} таласног вектора:

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \tilde{V}(0) n_{\vec{k}_1} - \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{k}_1|) n_{\vec{k}_1}, \quad (4.48)$$

где је први члан у једнакости допринос Хартријевог члана, а други члан је изменски Фоков члан. Из хамилтонијана 4.47 очекујемо да добијемо укупну енергију облика:

$$E = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^2k_1 d^2k_2 f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2}, \quad (4.49)$$

где $f(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ представља Ландауву интеракциону функцију када се \vec{k}_1 и \vec{k}_2 налазе на Ферми површи. Лако налазимо својствену енергију хамилтонијана у физичком стању $|\psi_{phy}\rangle$:

$$\begin{aligned} E &= \langle \psi_{phy} | H | \psi_{phy} \rangle \\ &= \int \frac{d^2k_1 d^2k_2}{(2\pi)^4} (\tilde{V}(0) n_{\vec{k}_1} - \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{k}_1|) n_{\vec{k}_1}) \langle \psi_{phy} | c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2} | \psi_{phy} \rangle \\ &= \int \frac{d^2k_1 d^2k_2}{(2\pi)^2} (\tilde{V}(0) - \tilde{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)) n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Одавде видимо да је $f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \tilde{V}(0) - \tilde{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$.

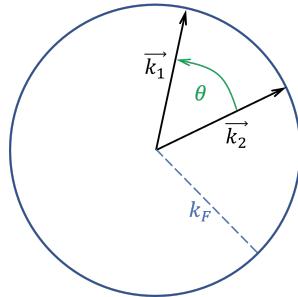
Уколико се честице које посматрамо налазе на Ферми површи, или веома близу ње, онда Ландауова интеракциона функција зависи само од угла између вектора импулса θ . Као што смо видели неретко користимо Фурије трансформ величина како бисмо нешто израчунали. Из тог разлога уводимо Фурије трансформ Ландауове интеракционе функције:

$$f_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta) e^{il\theta}. \quad (4.51)$$

Због симетрије интеракционе функције $f(\theta) = f(2\pi - \theta)$, можемо рећи да важи $f_l = f_{-l}$. Дефинишемо бездимензиону величину $F_l = \frac{m^* f_l}{2\pi}$ [6]. Ова величина представља коефицијенте у развоју функције $F(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ по Лежандровим полиномима. Интеракција две честице је у потпуности дефинисана преко функција F_l , које некад зовемо Ландауовим параметрима [24].

Увођење Ландауових параметара је битно за добијање поправке на горлу масу честица система, тј. добијање ефективне масе. На температури $T = 0$ налазимо да је инверз ефективне масе, коју иначе рачунамо по формулама $\frac{k_F}{m^*} = \frac{\partial \epsilon_k}{\partial |\vec{k}|}$, дат са:

$$\frac{k_F}{m^*} = -\frac{k_F}{(2\pi)^2} \int d\theta_{\vec{k}_1 - \vec{k}_2} \tilde{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cos \theta_{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}. \quad (4.52)$$



Слика 4.1: Симетрија Ландауове интеракционе функције

Прилаз који предлаже Рид добро описује бозоне на пуњењу $\nu = 1$. Прилаз није симетричан на замену десних и левих оператора густине, из тог разлога теорија не губи киралност магнетног поља.

До сада нас је интересовала физика само у оквиру основног Ландауовог нивоа. Желимо да нађемо дисперзиону релацију за било који Ландауов ниво. Изразићемо ефективни Кулонов потенцијал у две димензије у импулсном простору Ландауовог нивоа:

$$\tilde{V}(|\vec{q}|) = V_c(|\vec{q}|) e^{-\frac{q^2}{2}} L_n^2 \left(\frac{q^2}{2} \right), \quad (4.53)$$

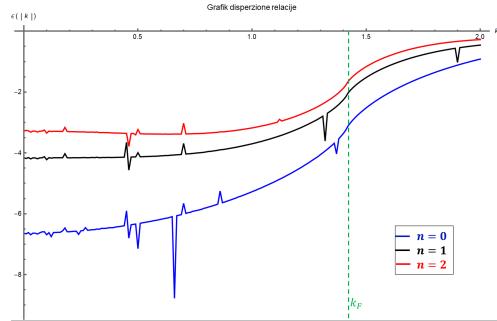
где L_n представља n -ти Лагеров полином, који одговара n -том Ландауовом нивоу, а V_c Кулонов потенцијал у импулсном простору који се рачуна на уобичајен начин. Када заменимо потенцијал у овом ублику, у Хартри-Фок апроксимацију, добићемо дисперзионе релације за различите Ландауове нивое.

4.2.1 Кулонова интеракција

Како смо добили дисперзиону релацију за произвољан потенцијал, сада можемо да је применимо на Кулонову интеракцију. Дисперзиона релација за Кулонов потенцијал у основном Ландауовом нивоу се може написати на следећи начин:

$$\varepsilon_{\vec{k}} \approx - \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{k} - \vec{k}'|} e^{-\frac{|\vec{k} - \vec{k}'|^2}{2}} n_{\vec{k}'} . \quad (4.54)$$

Доминантан члан у дисперзионој релацији Ридовог хамилтонијана 4.44 је Фоков члан, јер се бесконачан Хартријев члан екранира са позадинским пољем у систему. Коришћењем програмског пакета WolframMathematica нацртани су графици зависности једночестичне енергије од таласног вектора \vec{k} за основни, први и други Ландауов ниво, приказани на слици 4.2. Приметимо да постоји сингуларитет на $k_F = \sqrt{2}$.



Слика 4.2: Дисперзиона релација за Кулонову интеракцију у најнижем, првом и другом Ландауовом нивоу на пуњењу $\nu = 1$

4.3 Бардин–Купер–Шифер (BCS) теорија

Већина теорија суперпроводности, односно, опширије гледано теорија суперфлудних фермиона, се заснива на концепту спарених основних стања које су предложили Бардин, Купер и Шифер 1957. године [25]. Како пар честица можемо да посматрамо као бозон, такво стање се може посматрати као Бозе кондензат пара честица. У оригиналном BCS третману, сваки пар честица је у релативном s -таласном стању ($l = 0$), када је минимална енергија фермионске ексцитације различита од нуле. Не долази до фазног прелаза јер је јачина спаривања увећана, те долази до режима Бозе флуида. Не много касније, теорија је генерализована на спаривање са релативним

ангуларним моментом $l \neq 0$. Код He^3 је уочено p -таласно спаривање. Верује се да се d -таласно спаривање дешава код тешких фермиона и код високотемпературних суперпроводника.

Могућност спарених Холових стања први је предложио Халперин, чија слика о јако спареним стањима даје леп начин да се визуализују њихове квалитативне особине [26]. Нумерички прорачуни два научника, Кенрајта и Гирвина [27] доказали су постојање оваквих некомпресибилних стања на пуњењу $\nu = 1$ репулзивних бозона, без укључивања спина. За та стања верујемо да су заправо Холова спарена стања. У контексту Холовог ефекта предложено је фафијанско стање за конструкцију пробне таласне функције са спаривањем. Ово је оправдано, обзиром да је BCS спарено стање у реалном простору фафијан (видети додатак А).

У овом одељку желимо да видимо да ли ћемо доћи до суперпроводности коришћењем хамилтонијана који је предложио Рид.

Ефективни хамилтонијан квазичестица у BCS теорији средњег поља има облик:

$$\Omega_{eff} = \sum_{\vec{k}} \left[\xi_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} + \frac{1}{2} (\Delta_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}} c_{\vec{k}} + \Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger) \right], \quad (4.55)$$

где је $\xi_{\vec{k}} = \varepsilon_{\vec{k}} - \mu$, а $\varepsilon_{\vec{k}}$ једночестична кинетичка енергија и μ би у уобичајеним системима био хемијски потенцијал. Функција $\Delta_{\vec{k}}$ је функција процепа. Претпоставићемо да је за мало \vec{k} кинетички члан једнак $\varepsilon_{\vec{k}} \approx \frac{k^2}{2m^*}$, где је m^* ефективна маса, а $-\mu$ представља лимес $\xi_{\vec{k}}$ за мало \vec{k} [28]. Функција процепа $\Delta_{\vec{k}}$ је својствена таласна функција ангуларног момента $\hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$, па је можемо написати у форми $\Delta_{\vec{k}}^{(l)} = |\Delta_{\vec{k}}| e^{i\varphi_k l}$, $l = \pm 1, \pm 3, \dots$, где $\varphi_{\vec{k}}$ зависи од правца вектора \vec{k} . За p -таласно спаривање стања је $l = \pm 1$.

Хамилтонијан композитних фермиона који је предложио Рид у инверзном простору желимо да представимо преко ефективног хамилтонијана:

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q d^2 k_1 d^2 k_2}{(2\pi)^6} \tilde{V} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \wedge \vec{q}} c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}}, \quad (4.56)$$

Да бисмо добили ефективни BCS хамилтонијан, раздвајамо параметре уређења на њихову главну вредност (средњу вредност) и флуктуацију, тј. удаљеност од средње вредности.

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} &= \left[(c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger - \langle c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger \rangle) + \langle c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger \rangle \right] \\ &\quad \left[(c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} - \langle c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} \rangle) + \langle c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Увешћемо ознаке $\chi^* \left(\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q} \right) = \langle c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger \rangle$ и $\chi \left(\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q} \right) = \langle c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} \rangle$ како бисмо скратили запис. Добијамо израз где смо одбацили ква-

дратне флуктуације сматрајући их много малим:

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} = & [\chi(\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}) \left(c_{\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}}^\dagger - \chi^*(\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}) \right) \\ & + \chi^*(\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q}) \left(c_{\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}} c_{\vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}} - \chi(\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}) \right) \\ & + \chi(\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}) \chi^*(\vec{k}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}, \vec{k}_2 + \frac{1}{2}\vec{q})]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Да бисмо добили BCS спарено стање намећемо да важи $-\vec{k}' = \vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{q}$ и $\vec{k}' = \vec{k}_2 - \frac{1}{2}\vec{q}$. Те Ридов ефективни хамилтонијан има облик:

$$H_{eff}^{int} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} \tilde{V}(\vec{k} + \vec{k}') \left[\chi_{\vec{k}'} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger + \chi_{\vec{k}} c_{\vec{k}'} c_{-\vec{k}'} \right] e^{-i\vec{k} \wedge \vec{k}'}. \quad (4.59)$$

Одавде можемо, посматрајући ефективни хамилтонијан који очекујемо 4.55, да идентификујемо функцију процепа:

$$\Delta_{\vec{k}} = \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{k} + \vec{k}') \langle c_{-\vec{k}'} c_{\vec{k}'} \rangle > e^{-i\vec{k} \wedge \vec{k}'}. \quad (4.60)$$

Видимо да се јавља експоненцијални члан због некомутативности теорије. Ридов ефективни хамилтонијан има облик:

$$H_{eff}^{int} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}} c_{-\vec{k}} \right]. \quad (4.61)$$

У даљем разматрању BCS теорије, у оквиру фракционог квантног Холовог ефекта ћемо увести и први члан из класичне BCS теорије ефективног хамилтонијана 4.55. Па ћемо целокупни ефективни хамилтонијан означити као Ω_{eff} . Желимо да ближе одредимо како изгледа функција процепа. У ту сврху правимо Боголјубову трансформацију:

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} c_{\vec{k}} - v_{\vec{k}} c_{-\vec{k}}^\dagger, \quad (4.62)$$

$$\alpha_{-\vec{k}}^\dagger = u_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}}, \quad (4.63)$$

где $\alpha_{\vec{k}}$ анихилира основно стање ефективног хамилтонијана. На Боголјубоне намећемо да имају исти облик антикомутационих релација као што су имали $c_{\vec{k}}$ и $c_{\vec{k}}^\dagger$, релација 4.31. Одатле добијамо да мора да важи $|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1$, што је случај и код обичног BCS метода. Инсистирамо да важи комутациона релација између нашег ефективног хамилтонијана и боголјубона:

$$[\Omega_{eff}, \alpha_{\vec{k}}] = E_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}, \quad (4.64)$$

где је $E_{\vec{k}} > 0$ енергија боголјубона. Добијамо да је облик хамилтонијана представљен преко боголјубона: $\Omega_{eff} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} E_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + const.$ Када изједначимо оно што добијамо

из комутационе релације 4.64, замењујући богољубоне преко креационих и анихиляционих оператора композитних фермиона, са оним што смо наметнули и искористимо да радимо са p -таласним стањем ($l = \pm 1$), добијамо једначине:

$$E_{\vec{k}} u_{\vec{k}} = \xi_{\vec{k}} u_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^*, \quad (4.65)$$

$$E_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = -\xi_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}}. \quad (4.66)$$

Манипулацијом ове две једначине и условом који смо добили да мора да важи између $u_{\vec{k}}$ и $v_{\vec{k}}$, за енергију богољубона добијамо:

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}. \quad (4.67)$$

Интересује нас да добијемо функцију процепа $\Delta_{\vec{k}}$. Након сређивања израза 4.60 тако што $\langle c_{-\vec{k}'} c_{\vec{k}'} \rangle$ изразимо преко уведеног богољубона, добијамо:

$$\Delta_{\vec{k}} = \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} V(\vec{k} + \vec{k}') u_{\vec{k}' - \vec{k}} v_{\vec{k} - \vec{k}'} . \quad (4.68)$$

Када искористимо услове које смо добили у једначинама 4.65, за функцију процепа добијамо самоусаглашену једначину:

$$\Delta_{\vec{k}} = \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \left(-\frac{\tilde{V}(\vec{k} + \vec{k}')}{2} \right) e^{-i\vec{k} \wedge \vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{E_{\vec{k}'}} . \quad (4.69)$$

Када је интеракција репулзивна (делта функција), потенцијал пројектован на најнижи Ландауов ниво има облик: $\tilde{V}(\vec{k} + \vec{k}') = U_0 e^{-\frac{|\vec{k} + \vec{k}'|^2}{2}}$. Када имамо p -таласно стање, у случају овакве интеракције нема BCS решења за Ридов хамилтонијан. То се може видети ако посматрамо интеграл по угловима из добијене самоусаглашене једначине:

$$I_\varphi = \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-k' k \cos \varphi - ik' k \sin \varphi} e^{il\varphi} . \quad (4.70)$$

Када је $l = -1$, интеграл је мањи од нуле, а код $l = 1$ добијамо $I_\varphi = 0$. Ни једно ни друго решење не одговарају суперпроводном режиму, не добијамо спарено стање композитних фермиона.

5

Електрони у полуопуњеном изолованом Ландауовом нивоу

Електрони у полуопуњеном Ландауовом нивоу не представљају само егзотичан систем, већ релевантан систем за изучавање као јако корелисан и нетривијалан систем са " flat band " структуром ($E_{\vec{k}} = 0$). Данас, може да служи као идеалан почетни опис таквих система.

У уводу смо рекли како је Сон увео феноменолошки двокомпонентну формулацију проблема у случају полуопуњеног Ландауовог нивоа. До овог закључка је дошао из захтева за постојање симетрије између честица и шупљина у опису. Међутим, експериментално знамо да је на пуњењу $\nu = \frac{1}{2}$ сигурно нарушена симетрије честица и шупљина, из тог разлога користимо формулацију са само једним фермионом (квазичестицом) коју ћемо звати композитни фермион.

Халперин, Ли и Рид први уочавају да овакав систем испољава особине фермитечности. Он представља први конкретан пример нетривијалне ферми течности композитних фермиона. Међутим, недостаје како квалитативно, тако и квантитативно разумевање система електрона у полуопуњеном Ландауовом нивоу. Из тог разлога, Шанкар и Мурти покушавају да опишу овај систем ефективно намећући везу:

$$\langle \rho^R(q) \rangle = 0. \quad (5.1)$$

Ми ћемо уместо овакве везе, наметнути везу која ће равноправно узимати и леве и десне степене слободе у опису система. Из тог разлога, сматрамо да је детаљан опис који су дали Донг и Сентил[12] за опис бозона на пуњењу $\nu = 1$, такође одговарајући за систем електрона у изолованом Ландауовом нивоу.

У овом поглављу ћемо покушати, на основу искуства из HLR-теорије и Черн-Сајмонс теорије, да формулишемо ефективну теорију базирану на композитним фермионима. У првом одељку ћемо дати хамилтонијан са одговарајућом везом за опис система електрона у изолованом полуопуњеном Ландауовом нивоу. Затим ћемо поновити, као што смо урадили за систем бозона на пуњењу $\nu = 1$, Хартри-Фок методу за овај систем. Наредни одељак је посвећен Кулоновој интеракцији између композитних фермиона. У последњем одељку овог поглавља ћемо тестирати да ли наш систем

испљава Померанчук нестабилност [29].

5.1 Хамилтонијан и везе

У овом одељку поглавља ћемо конструисати хамилтонијан полуупуњеног Ландауовог нивоа и наметнути везе које сматрамо да би морале да важе. Користићемо се елементима конструкције физичког простора који су увели PHR, коју смо описали у четвртом поглављу овог рада. Оправданост коришћења композитних фермиона у опису електрона у полуупуњеном Ландауовом нивоу лежи у томе да можемо очекивати да долази до спонтаног нарушења симетрије између шупљина и честица.

Ако посматрамо неки електрон, у близини њега постоји корелациони шупљина, коју остали електрони праве том посматраном електрону. Композитни фермион ће бити сачињен од електрона и његове корелационе шупљине, слика 5.1.



Слика 5.1: Композитни фермион

Ово можемо да замислимо као обичан електрон у присуству неке потенцијалне јаме, која настаје услед замене електрона као идентичних честица са антисиметричним таласним функцијама, као и услед репулзивних интеракција које отварају место где може тежити неки други електрон.

Уместо везе коју смо користили у трећем поглављу (једначина 4.24) у проширеном Хилбертовом простору, претпоставићемо да важи веза:

$$\rho_{nn}^L + \rho_{nn}^R = 1, \quad (5.2)$$

тј. у импулсном простору $\rho^L(\vec{q}) + \rho^R(\vec{q}) = 0$. Видимо да овако уведена веза представља операторску једначину која је сагласна са полуупуњеношћу Ландауовог нивоа. Она ставља корелационе шупљине на место правих шупљина, дакле вештачке степене слободе на место правих. Десне степене слободе стављамо тамо где нема левих степена слободе. На неки начин леви и десни степени слободе равноправно улазе у опис система. То је посебна рестрикција у опису система. Надамо се да ће ова врста апроксимације ефективног простора дати најважнију физику.

Како бисмо могли да описујемо овакав квантни систем, треба да конструишимо хамилтонијан система. Њега одређује веза коју смо наметнули, тј. он мора да комутира са везом коју смо наметнули 5.2:

$$[H, \rho^L(\vec{k}) + \rho^R(\vec{k})] \Big|_{\rho^L(\vec{k}) + \rho^R(\vec{k})=0} = 0. \quad (5.3)$$

У односу на Ридов хамилтонијан, уводимо смену у хамилтонијану како бисмо га адаптирали на везу коју смо наметнули:

$$\rho_{nn}^L \longrightarrow \frac{\rho_{nn}^L - \rho_{nn}^R}{2}. \quad (5.4)$$

Оваквом сменом лако долазимо до диполне интерпретације композитних фермиона. Сада можемо да напишемо хамилтонијан који описује наш систем, до на члан који је пропорционалан вези, на следећи начин:

$$H = \frac{1}{8} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) (\rho_{\vec{q}}^L - \rho_{\vec{q}}^R) (\rho_{-\vec{q}}^L - \rho_{-\vec{q}}^R). \quad (5.5)$$

Лако се проверава да овај хамилтонијан комутира са везом. Приметимо да је хамилтонијан без нормалног уређења. Ово можемо да правдамо на сличан начин као Донг и Сентил, који су дали други прилаз у опису система бозона у изолованом Ландауовом нивоу у раду [12]. Хамилтонијан који су они предложили се слаже са везом коју смо увели (једначина 5.2). Нормално уређење је важно када користимо леве операторе густине. Лако се проверава да важи:

$$\begin{aligned} : \rho_{\vec{q}}^L \rho_{-\vec{q}}^L : - \rho_{\vec{q}}^L \rho_{-\vec{q}}^L &= \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}-\vec{k}') \wedge \vec{q}} : c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}'+\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}} c_{\vec{k}'} : \\ &\quad - \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}-\vec{k}') \wedge \vec{q}} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}'}^\dagger c_{\vec{k}'+\vec{q}} c_{\vec{k}} c_{\vec{k}'} \\ &= - \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}-\vec{k}') \wedge \vec{q}} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger \{c_{\vec{k}'+\vec{q}}, c_{\vec{k}}\} c_{\vec{k}'} \\ &= \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} e^{\frac{i}{2}(\vec{k}-\vec{k}') \wedge \vec{q}} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}'} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{k}' + \vec{q} - \vec{k}) \\ &= - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} \\ &= -\bar{\rho}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Обзиром да смо добили константу, можемо да уклонимо нормално уређење. Ово је оправдано јер очекујемо да квазичестице имају неку сопствену енергију, као и да се уведени хамилтонијан слаже математички са проширеним Хилбертовим простором. Овакав хамилтонијан се може написати преко нормалног уређења на следећи начин:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) : (\rho_{\vec{q}}^L - \rho_{\vec{q}}^R) (\rho_{-\vec{q}}^L - \rho_{-\vec{q}}^R) : + \\ &\quad + \frac{1}{8} \int \frac{d^2 q d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^6} \tilde{V}(\vec{q}) \left[e^{\frac{i}{2}(\vec{k}-\vec{k}') \wedge \vec{q}} - e^{\frac{i}{2}(\vec{k}+\vec{k}') \wedge \vec{q}} - e^{-\frac{i}{2}(\vec{k}+\vec{k}') \wedge \vec{q}} + e^{-\frac{i}{2}(\vec{k}-\vec{k}') \wedge \vec{q}} \right] \times \\ &\quad \times c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger \{c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'+\vec{q}}^\dagger\} c_{\vec{k}'}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Израчунајмо прво први члан хамилтонијана са нормалним уређењем:

$$: (\rho_{\vec{q}}^L - \rho_{\vec{q}}^R) (\rho_{-\vec{q}}^L - \rho_{-\vec{q}}^R) := 4 \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2}\right) \sin\left(\frac{\vec{k}' \wedge \vec{q}}{2}\right) c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}'+\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}'} c_{\vec{k}}. \quad (5.8)$$

Други део хамилтонијана се лакше срећује:

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= \frac{1}{8} \int \frac{d^2 q d^2 k}{(2\pi)^4} \tilde{V}(\vec{q}) \left[2 - e^{i\vec{k} \wedge \vec{q}} - e^{-i\vec{k} \wedge \vec{q}} \right] c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}-\vec{q}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q d^2 k}{(2\pi)^4} \tilde{V}(\vec{q}) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Хамилтонијан са којим ћемо радити има облик:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q d^2 k_1 d^2 k_2}{(2\pi)^6} \tilde{V}(q) \sin \left(\frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{q}}{2} \right) \sin \left(\frac{\vec{k}_2 \wedge \vec{q}}{2} \right) c_{\vec{k}_1-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2+\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q d^2 k}{(2\pi)^4} \tilde{V}(q) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Оваква поставка са везама оставља систем није инваријантан на бустове. Што није добро, јер зnamо да, за разлику од таласне функције обичне Ферми течности, таласна функција Ферми композитних фермиона је експлицитно инваријантна на бустове.

5.2 Хартри-Фокова теорија

Као код Ридовог хамилтонијана 4.44, желимо и овде да добијемо хамилтонијан облика као у једначини 4.45, како бисмо добили дисперзиону релацију. Поново користимо прилаз Хартри-Фока. Нећемо разматрати други део хамилтонијана $H^{(2)}$ 5.9 јер видимо да је он већ у одговарајућем облику. Први део хамилтонијана $H^{(1)}$, у теорији средњег поља, добијамо на аналоган начин као код усредњавања Ридовог хамилтонијана, и он има следећи облик:

$$H_{HF}^{(1)} = - \int \frac{d^2 k d^2 q}{(2\pi)^4} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{q}|) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) n_{\vec{k}} c_{\vec{q}}^\dagger c_{\vec{q}}. \quad (5.11)$$

Хартријев директни члан не даје допринос у овом случају, већ цео допринос долази од Фоковог члана.

Добили смо хамилтонијан композитних фермиона у полуупуњеном изолованом Ландауовом нивоу у Хартри-Фоковој апроксимацији:

$$\begin{aligned} H &= - \int \frac{d^2 k d^2 q}{(2\pi)^4} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{q}|) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) n_{\vec{k}} c_{\vec{q}}^\dagger c_{\vec{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q d^2 k}{(2\pi)^4} \tilde{V}(q) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Сада лако идентификујемо дисперзиону релацију за произвољан потенцијал:

$$\varepsilon_{\vec{k}} = - \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) \theta(k_F - q) + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right). \quad (5.13)$$

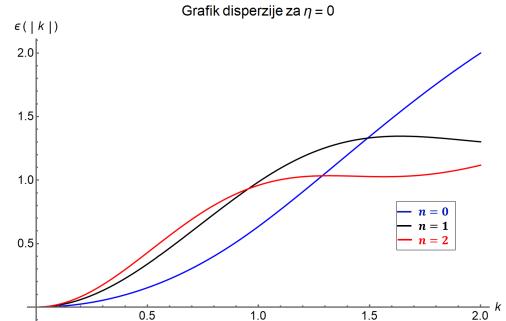
Одавде видимо да хамилтонијан 5.5 природно садржи једночестични део (својствену енергију дипола).

5.3 Хартри-Фокова теорија за дугодометну Кулонову интеракцију

У овом одељку ћемо видети како се понаша једночестична енергија у односу на импулс \vec{k} , када је интеракција између композитних фермиона Кулонова интеракција. Видели смо, у једначини 4.53, да када изађемо из оквира најнижег Ландауовог нивоа се јавља квадратни Лагеров полином. Добили смо облик Харти-Фокове дисперзионе релације за произвољан потенцијал хамилтонијана који су предложили Донг и Сентил. Сада можемо да напишемо дисперзиону релацију композитних фермиона при Кулоновој интеракцији на следећи начин:

$$\begin{aligned} \varepsilon(|\vec{k}|) = & \int \frac{d^2q}{2(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{q}|} e^{-\frac{|\vec{q}|^2}{2}} L_n^2 \left(\frac{q^2}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) - \\ & - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\vec{k} - \vec{q}|} e^{-\frac{|\vec{k} - \vec{q}|^2}{2}} L_n^2 \left(\frac{|\vec{k} - \vec{q}|^2}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) \theta(k_F - q). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Овај интеграл је могуће нумерички решити, па смо у ту сврху користили програм WolframMathematica. Слика 5.2 приказује дисперзиону релацију за три Лагерова полинома, односно три Ландауова нивоа. Плава линија представља дисперзију за основни Ландауов ниво $n = 0$, прма линија представља дисперзију за $n = 1$, а црвена линија представља дисперзију за $n = 2$.



Слика 5.2: График дисперзије за дугодометну Кулонову интеракцију

Са графика видимо да је, код сва три нивоа, зависност енергије од импулса \vec{k} монотоно растућа око $k = k_F$, што је и очекивано. Добијено је да најнижу енергију има најнижи Ландауов ниво и нема мешања Ландауових нивоа до $k = k_F = 1$.

5.4 Генералисана Кулонова интеракција и Померанчук нестабилност

У уводу у ово поглавље смо рекли да систем електрона у полу попуњеном Ландауовом нивоу представља пример нетривијалне Ферми течности композитних фермиона. Из тог разлога можемо да наметнемо опис преко Ландауових параметара. Ако узмемо

да је $F_1 = -1$, добићемо остале вредности параметара F_l Ферми течности за Ферми течност композитних фермиона[29].

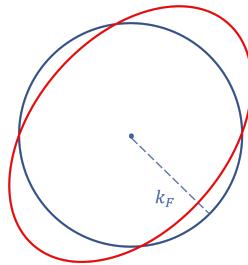
Желимо да видимо да ли наш систем са Кулоновом интеракцијом испољава Померанчук нестабилност. Она се користи за разумевање нематичности система, где нематичност представља стање материје које спонтано нарушава ротациону симетрију, али чува транслациону симетрију. У квантним Холовим стањима је експериментално потврђена на побуђеним Ландауовим нивоима. Конкретно, на вишим полуупуњеним Ландауовим нивоима. Померанчуков аргумент каже да када је неки Ландауов параметар $F_l < -1$, код система са поларизованим спином, Ландауова Ферми течност је нестабилна у односу на деформацију Ферми површине. Када би микроскопски параметар задовољавао $F_2 < -1$, изотропна Ферми течност би прешла у нематично стање са елиптичном деформацијом Ферми површи.

Због Паулијевог принципа искључења, тј. репулзије између фермиона, изотропна и краткодометна интеракција су потиснуте. Очекујемо да Ферми површ има сферни облик. Међутим, теоријска предвиђања код дипол-дипол интеракције кажу да ће доћи до деформације Ферми површи, тј. она ће имати облик елипсоида, слика 5.3.

Како хамилтонијан зависи од квадрата Лагерових полинома, када нумерички желим да добијемо дисперзионе релације за више Ландауове нивое јавља се проблем регуларизације. Овај проблем се може, на физички начин, решити, тако што додамо зависност од параметра дебљине η узорка у наш потенцијал. Овај параметар је у димензијама магнетне дужине везан за средњу ширину $\bar{\omega}$ система у трећој димензији као $\eta = \frac{\bar{\omega}}{2}$. Уводимо га као cut-off на Кулонов потенцијал, тако што уместо обрнуто пропорционалне зависности потенцијала од растојања $\frac{1}{r}$, можемо да напишемо $\frac{1}{\sqrt{r^2 + \eta^2}}$. Сада Кулонов потенцијал у импулсном простору има облик:

$$V_\eta(q) = \frac{e^{-q\eta}}{q}. \quad (5.15)$$

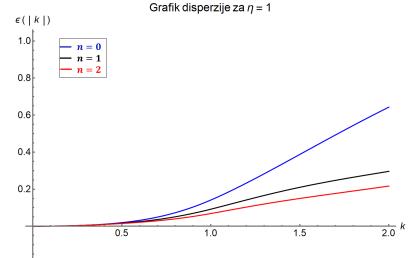
Након увођења овог параметра, добијени потенцијал у даљем тексту називамо генерализан Кулонов потенцијал. Видимо да када $\eta \rightarrow 0$, модификован Кулонов потенцијал тежи чистој Кулоновој интеракцији[29].



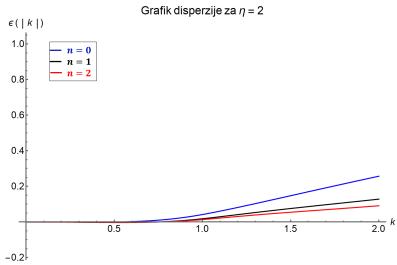
Слика 5.3: Деформација Ферми површи

5.4. Генерализана Кулонова интеракција и Померанчук нестабилност 41

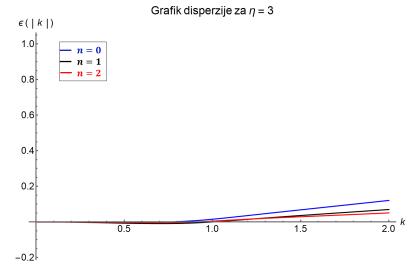
Када уместо чистог Кулоновог потенцијала, убацимо модификован Кулонов потенцијал у дисперзиону релацију 5.14 добијену из хамилтонијана 5.5, за различите вредности $\eta \in \{1, 2, 3, 4\}$ добијамо графике 5.4, 5.5, 5.6 и 5.7 редом.



Слика 5.4: Зависност енергије од импулса \vec{k} за cut – off параметар $\eta = 1$

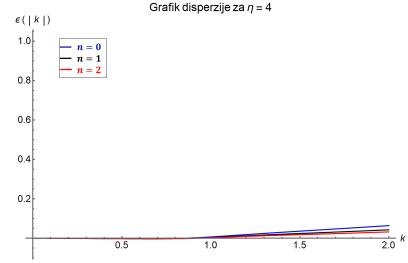


Слика 5.5: Зависност енергије од импулса \vec{k} за cut – off параметар $\eta = 2$



Слика 5.6: Зависност енергије од импулса \vec{k} за cut – off параметар $\eta = 3$

Са графика видимо да што је већи cut – off параметар η , то је мања енергетска разлика између различитих Ландауових нивоа, као и енергија на којој се ти Ландауови нивои налазе.



Слика 5.7: Зависност енергије од импулса \vec{k} за cut – off параметар $\eta = 4$

Да бисмо сада тестирали Померанчук нестабилност, треба да израчунамо Ландауов параметар F_2 у зависности од η параметра:

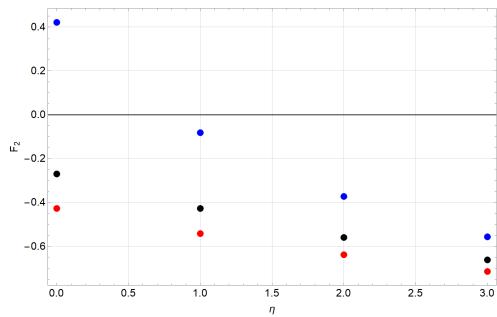
$$F_2 = -\frac{\int d\theta V_{Fock}^\eta(\theta) \cos 2\theta}{\int d\theta V_{Fock}^\eta(\theta) \cos \theta}, \quad (5.16)$$

где је $V_{Fock}(\theta)$ Фоков члан у дисперзионој релацији 5.14, када импулси леже на Ферми површи:

$$V_{Fock}^\eta(\theta) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2|\sin \frac{\theta}{2}|} e^{-2|\sin \frac{\theta}{2}|^2} e^{-2\eta|\sin \frac{\theta}{2}|} \sin^2\left(\frac{\sin \theta}{2}\right), \quad (5.17)$$

уз претпоставку да је импулс \vec{k} усмерен дуж x -осе: $\vec{k} = k_F \vec{e}_x = \vec{e}_x$.

Поново смо искористили исти програмски пакет за цртање графика како бисмо тестирали наш систем. Резултати се налазе на слици 5.8, где је као и раније, плавом бојом представљен најнижи Ландауов ниво $n = 0$, црном бојом представљен први Ландауов ниво $n = 1$, а црвеном бојом означен други Ландауов ниво $n = 2$.



Слика 5.8: $l = 2$ параметар Ферми течности за три Ландауова нивоа ($n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$)

Очекивали смо да се Померанчук нестабилност јави за вредности $\eta \sim 0$. Уочавамо да, у ефективној слици, иако је за $\eta \sim 3$ параметар F_2 доста негативан, Померанчук нестабилност се не јавља, тј. F_2 не достиже вредности мање од -1 . Ово значи да је систем стабилан. Вредности Ландауовог параметра за $\eta \sim 3$ су доста близке резултата које су добили Ли, Шао, Ким, Халдејн и Резаји у раду [29].

6

Квантна Болцманова једначина за полуопуњен Ландауов ниво

На великим растојањима и временским интервалима, можемо да користимо семикласичан приступ да бисмо изучавали разне особине система. Овај приступ се заснива на квантној Болцмановој једначини [30]. У овом поглављу рада ћемо увести појам Вигнерове функције, а затим ћемо извести квантну Болцманову једначину за систем електрона у полуопуњеном изолованом Ландауовом нивоу.

6.1 Вигнерова функција

У класичној хамилтоновој механици можемо да опишемо стање као тачку у $6N$ -димензијоналном фазном простору уз помоћ импулса p и координата q . Међутим, то не можемо да поновимо у квантној механици због принципа неодређености. Не можемо истовремено да знамо где се налази честица коју посматрамо и колики је њен импулс. Због тога, у квантној механици користимо густине вероватноће за опис система. Можемо да напишемо густине вероватноће и у простору координата, тј. у координатном базису, као и у импулсном простору. Они су међусобно повезани преко Фуријеовог трансформа, што смо више пута искористили у овом раду. Међутим пожељно је да имамо функцију која ће дати вероватноћу и кроз координате x и кроз импулсе p . Због тога је конструисана Вигнерова функција [31]. Као таква, потребно је да је свуда позитивна и да даје добре очекиване вредности оператора. Међутим, због Хајзенберговог принципа неодређености оваква функција мало вероватно постоји. Вигнерова функција даје добар опис система, иако може бити негативна у неким деловима фазног простора, што нема физичког смисла, ако је посматрамо као функцију вероватноће[32].

Када конструишишемо Вигнерову функцију, желимо да дамо нови формализам квантне механике базиран на формализму фазног простора. Да бисмо то урадили, потребно је да имамо неко пресликање између квантног фазног простора и Хилбертовог простора у Шредингеровој слици. Ова трансформација назива се Вејлова транс-

формација. Вејлов трансформ оператора \hat{f} се дефинише на следећи начин:

$$f(\vec{r}, \vec{k}) = \int d^2 r' e^{i\vec{r}' \cdot \vec{k}} \langle \vec{r} + \frac{\vec{r}'}{2} | \hat{f}(\hat{r}, \hat{k}) | \vec{r} - \frac{\vec{r}'}{2} \rangle. \quad (6.1)$$

Дакле, ова трансформација узима оператор и даје функцију. Користићемо Вејлову трансформацију за дефиницију Вигнерове функције.

Овде ћемо Вигнерову функцију увести преко оператора густине ρ . Вејлову трансформацију оператора густине можемо да дефинишемо преко оператора поља на следећи начин:

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}', t) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}') \rangle_t = \text{Tr} \left\{ \rho(t) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}') \right\}. \quad (6.2)$$

Очекивану вредност оператора \hat{f} можемо да нађемо преко оператора густине:

$$\langle \hat{f} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{f} \} = \int d^2 r \int d^2 k \rho(\vec{r}, \vec{k}) f(\vec{r}, \vec{k}) \quad (6.3)$$

Вигнерову функцију дефинишемо на следећи начин:

$$W(\vec{r}, \vec{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^2 s e^{i\vec{k} \cdot \vec{s}} \rho \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}, \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right). \quad (6.4)$$

Очекиване вредности оператора које су нам потребне да одредимо особине квантног нерелативистичког система се сада могу представити преко Вигнерове функције:

$$\langle \hat{f} \rangle = \frac{\int d^2 r \int d^2 k f(\vec{r}, \vec{k}) W(\vec{r}, \vec{k})}{\int d^2 r \int d^2 k W(\vec{r}, \vec{k})}. \quad (6.5)$$

6.2 Извођење квантне Болцманове једначине

Интересује нас како ће се мењати диполни систем композитних фермиона у полуопуњеном изолованом Ландауовом нивоу током времена. Из тог разлога изводимо квантну Болцманову једначину, која ће нам дати модел динамике система.

Претпоставимо да оператор густине садржи сву информацију о временској еволуцији система. У Шредингеровој слици она мора да задовољава фон Нојманову једначину:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]. \quad (6.6)$$

Еволуција Вигнерове функције кроз време се онда може израчунати уз помоћ фон Нојманове једначине 6.6 на следећи начин:

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = i\hbar \int d^2 s e^{i\vec{k} \cdot \vec{s}} \text{Tr} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\} \quad (6.7)$$

$$= \int d^2 s e^{i\vec{k} \cdot \vec{s}} \text{Tr} \left\{ [H, \rho(t)] \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\} \quad (6.8)$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = \int d^2 s e^{i\vec{k} \cdot \vec{s}} \text{Tr} \left\{ \rho(t) \left[\psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right), H \right] \right\}}. \quad (6.9)$$

У претходном извођењу смо користили инваријантност трага на цикличне пермутације. У даљем рачуну, као у остатку рада, користићемо мерне јединице у којима је $\hbar = 1$.

Обзиром да ћемо користити диполни хамилтонијан 5.5 за опис интеракције, неизгодно је да користимо операторе поља у таквом облику. Можемо да их представимо преко креационих, односно анихилационих оператора као:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k e^{i\vec{k}\vec{x}} c_{\vec{k}}, \quad (6.10)$$

$$\psi^\dagger(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k e^{-i\vec{k}\vec{x}} c_{\vec{k}}^\dagger. \quad (6.11)$$

Радићемо само са нормално уређеним делом хамилтонијана 5.5 у дуготаласном лимесу, када $q \rightarrow 0$:

$$H = \frac{1}{2(2\pi)^6} \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 \frac{\tilde{V}(q)}{4} (\vec{p}_1 \wedge \vec{q})(\vec{p}_2 \wedge \vec{q}) c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1}. \quad (6.12)$$

Представићемо веома детаљно извођење фактора са десне стране једнакости 6.7, који ћемо обележити са I за нормално уређен део хамилтонијана. Први корак у извођењу је да средимо комутациону релацију унутар трага на следећи начин:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \rho \left[c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2}, c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1} \right] \right\} &= \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{k}_1}^\dagger \{c_{\vec{k}_2}, c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger\} c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1} \right\} \\ &\quad + \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger \{c_{\vec{k}_2}, c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger\} c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1} \right\} \\ &\quad - \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger \{c_{\vec{k}_2}, c_{\vec{p}_1}\} c_{\vec{k}_2} \right\} \\ &\quad - \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger \{c_{\vec{k}_1}^\dagger, c_{\vec{p}_2}\} c_{\vec{k}_2} c_{\vec{p}_1} \right\} \\ &= (2\pi)^2 \left[\delta^{(2)}(\vec{k}_2 - \vec{p}_1 + \vec{q}) \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1} \right\} \right. \\ &\quad + \delta^{(2)}(\vec{k}_2 - \vec{p}_2 - \vec{q}) \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1} \right\} \\ &\quad - \delta^{(2)}(\vec{k}_1 - \vec{p}_1) \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2} c_{\vec{k}_2} \right\} \\ &\quad \left. - \delta^{(2)}(\vec{k}_1 - \vec{p}_2) \text{Tr} \left\{ \rho c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{p}_1} \right\} \right]. \quad (6.13) \end{aligned}$$

Како претпостављамо да радимо са чистим стањима, можемо траг од четири креациона и анихилациони оператора, уз помоћ Викове теореме, да запишемо преко производа два трага. Само изменски доприноси ће бити различити од нуле, док је

директни допринос код дипол-дипол интеракције једнак нули.

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left\{\rho\left[c_{k_1}^\dagger c_{k_2}, c_{p_1-q}^\dagger c_{p_2+q} c_{p_2} c_{p_1}\right]\right\} = & (2\pi)^2[-\delta^{(2)}(\vec{k}_2 - \vec{p}_1 + \vec{q}) \text{Tr}\left\{\rho c_{k_1}^\dagger c_{p_2+q}^\dagger\right\} \text{Tr}\left\{\rho c_{p_2+q}^\dagger c_{p_1}\right\} \\ & - \delta^{(2)}(\vec{k}_2 - \vec{p}_2 - \vec{q}) \text{Tr}\left\{\rho c_{k_1}^\dagger c_{p_1}\right\} \text{Tr}\left\{c_{p_1-q}^\dagger c_{p_2}\right\} \\ & + \delta^{(2)}(\vec{k}_1 - \vec{p}_1) \text{Tr}\left\{\rho c_{p_1-q}^\dagger c_{p_2}\right\} \text{Tr}\left\{c_{p_2+q}^\dagger c_{k_2}\right\} \\ & + \delta^{(2)}(\vec{k}_1 - \vec{p}_2) \text{Tr}\left\{\rho c_{p_1-q}^\dagger c_{k_2}\right\} \text{Tr}\left\{c_{p_2+q}^\dagger c_{p_1}\right\}]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Видимо да ако заменимо $\vec{p}_1 \longleftrightarrow \vec{p}_2$ и $\vec{q} \longleftrightarrow -\vec{q}$, чланови који долазе са знаком "−" су међусобно једнаки, исто тако, и чланови који долазе са знаком " + ". Из тог разлога ћемо развојити проблем који решавамо (I) на два доприноса:

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{4(2\pi)^8} \int d^2 s d^2 k_1 d^2 q d^2 p_1 d^2 p_2 \tilde{V}(q)(\vec{p}_1 \wedge \vec{q})(\vec{p}_2 \wedge \vec{q}) e^{i\vec{k}\vec{s}} e^{-i\vec{k}_1(\vec{r}+\frac{\vec{s}}{2})} e^{i(\vec{p}_1-\vec{q})(\vec{r}-\frac{\vec{s}}{2})} \times \\ & \times \text{Tr}\left\{\rho c_{k_1}^\dagger c_{p_2+q}^\dagger\right\} \text{Tr}\left\{\rho c_{p_2+q}^\dagger c_{p_1}\right\}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{4(2\pi)^8} \int \int d^2 s d^2 k_2 d^2 q d^2 p_1 d^2 p_2 \tilde{V}(q)(\vec{p}_1 \wedge \vec{q})(\vec{p}_2 \wedge \vec{q}) e^{i\vec{k}\vec{s}} e^{-ip_1(\vec{r}+\frac{\vec{s}}{2})} e^{ik_2(\vec{r}-\frac{\vec{s}}{2})} \times \\ & \times \text{Tr}\left\{\rho c_{p_1-q}^\dagger c_{p_2}\right\} \text{Tr}\left\{c_{p_2+q}^\dagger c_{k_2}\right\}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Како бисмо поново из креационих и анихилационих оператора добили операторе поља користимо инверзни Фуријеов трансформ:

$$c_{\vec{k}} = \int d^2 x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \psi(\vec{x}), \quad (6.17)$$

$$c_{\vec{k}}^\dagger = \int d^2 x e^{i\vec{k}\vec{x}} \psi^\dagger(\vec{x}). \quad (6.18)$$

Током сређивања израза 6.15, поред уобичајеног коришћења израза за делта функцију, било је потребно паметно склонити чланове $(\vec{p}_1 \wedge \vec{q})(\vec{p}_2 \wedge \vec{q})$, да бисмо на kraју свели изразе на неки облик Вигнерове функције. То је урађено преко градијента онога што стоји у експоненту. Затим, користимо и то да је интеграл инваријантан на смену $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$. Након парцијалних интеграција и смена, добијамо:

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 s d^2 q d^2 s' \tilde{V}(q) e^{i\vec{k}(\vec{s}-\vec{s}')} e^{i\vec{q}\vec{s}'} \times \\ & \times \text{Tr}\left\{\rho \psi^\dagger\left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} - \frac{\vec{s}'}{2}\right) (\vec{q} \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi\left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} - \frac{\vec{s}'}{2}\right)\right\} \times \\ & \times \text{Tr}\left\{\rho \psi^\dagger\left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} - \frac{\vec{s}'}{2}\right) (\vec{q} \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi\left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} + \frac{\vec{s}'}{2}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 s d^2 q d^2 s' \tilde{V}(q) e^{i\vec{k}(\vec{s}+\vec{s}')} e^{i\vec{q}\vec{s}'} \times \\
\times \text{Tr} \left\{ \rho \left[(\vec{q} \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} + \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right] \psi \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right\} \times \\
\times \text{Tr} \left\{ \rho \left[(\vec{q} \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right] \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right\}. \quad (6.20)
\end{aligned}$$

Како бисмо добили промену Вигнерове функције током времена, од чега смо кренули, потребно је да саберемо ова два израза $I = I_1 + I_2$. Сматрамо да су поља слабо променљива, па можемо да развијемо поља до првог члана по $\frac{\vec{s}}{2}$, односно $\frac{\vec{s}'}{2}$. Циљ нам је да добијемо производ два поља, где један зависи од збира $\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}$, а други од разлике $\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}$. Након развијања поново добијамо два доприноса, допринос од нултог члана у развоју J_0 , и допринос од првог члана J_1 . Допринос нултог члана је:

$$\begin{aligned}
J_0 = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 s d^2 q d^2 s' \tilde{V}(q) e^{i\vec{k}(\vec{s}+\vec{s}')} e^{i\vec{q}\vec{s}'} \left[\text{Tr} \left\{ \rho (\vec{q} \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}'}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right\} \times \right. \\
\times \text{Tr} \left\{ \rho (\vec{q}' \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}'}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right\} \\
- \text{Tr} \left\{ \rho \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}'}{2} \right) (\vec{q} \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right\} \times \\
\left. \times \text{Tr} \left\{ \rho \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}'}{2} \right) (\vec{q}' \wedge i\nabla_{\vec{r}}) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right\} \right]. \quad (6.21)
\end{aligned}$$

Након сређивања парцијалном интеграцијом, следећи корак у рачуну је да представимо градијенте по \vec{r} као градијенте по \vec{s} , односно \vec{s}' . Ради лакшег записа користићемо ознаке $\nabla_{\vec{s}} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla$ и $\nabla_{\vec{s}'} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla'$. За допринос нултог члана добијамо следећи израз:

$$\begin{aligned}
J_0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 q d^2 s' \tilde{V}(q) e^{i\vec{s}'(\vec{k}+\vec{q})} (\vec{q} \wedge \vec{k}) W(\vec{r}, \vec{k}, t) \text{Tr} \left\{ \rho (\vec{q} \wedge i\nabla') \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}'}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}'}{2} \right) \right\} \\
- \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 s d^2 q \tilde{V}(q) e^{i\vec{k}\vec{s}} (\vec{q} \wedge \vec{k}) W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \text{Tr} \left\{ \rho \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) (\vec{q} \wedge i\nabla) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\}. \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Уводимо ознаке за функције које немају неко физичко значење:

$$f(\vec{r}, \vec{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} \left\{ \rho \left[(2i\vec{q} \wedge \nabla) \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \right] \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\} + \text{Tr} \left\{ \rho \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) (2i\vec{q} \wedge \nabla) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\}, \quad (6.23)$$

$$g(\vec{r}, \vec{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} \left\{ \rho \left[(2i\vec{q} \wedge \nabla) \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \right] \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\} - \text{Tr} \left\{ \rho \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) (2i\vec{q} \wedge \nabla) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\}. \quad (6.24)$$

Овако уведене ознаке се могу на краји начин представити у облику:

$$f(\vec{r}, \vec{s}) = (2i\vec{q} \wedge \nabla) \text{Tr} \left\{ \rho \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\}, \quad (6.25)$$

$$g(\vec{r}, \vec{s}) = (i\vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) \text{Tr} \left\{ \rho \psi^\dagger \left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right) \psi \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right) \right\}. \quad (6.26)$$

Срећен израз за допринос нултог члана изразу I је:

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 q \tilde{V}(q) (\vec{q} \wedge \vec{k}) (i\vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) (W(\vec{r}, \vec{k}, t) W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t)).} \quad (6.27)$$

Израз за масу која се добија због присуства потенцијалне енергије:

$$\frac{1}{M} = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{V}(q)}{4} q^2 \sin^2 \theta. \quad (6.28)$$

Када претпоставимо да је $W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \approx W(\vec{r}, \vec{k}, t)$, сматрајући да је \vec{q} мало у дуготаласном лимесу, за допринос нултог члана у развоју добијамо:

$$\boxed{J_0 \approx \frac{2i}{M} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \vec{k} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t).} \quad (6.29)$$

Сада посматрамо линеарни члан у развоју по малим променама поља. Одмах ћемо увести смену преко ознака $f(\vec{r}, \vec{s})$ и $g(\vec{r}, \vec{s})$. Израз за линеарни члан:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 s d^2 q d^2 s' \tilde{V}(q) e^{i\vec{k}(\vec{s} + \vec{s}')} e^{i\vec{q}\vec{s}'} \left[\frac{\vec{s}}{2} \left(f(\vec{r}, \vec{s}) \nabla_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{s}') + g(\vec{r}, \vec{s}) \nabla_{\vec{r}} g(\vec{r}, \vec{s}') \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{s}'}{2} \left(f(\vec{r}, \vec{s}') \nabla_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{s}) + g(\vec{r}, \vec{s}') \nabla_{\vec{r}} g(\vec{r}, \vec{s}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Поделићемо израз за линеарни члан на допринос само са функцијом $f(\vec{r}, \vec{s})$, који ћемо назвати J_1^f и на допринос са функцијом $g(\vec{r}, \vec{s})$, J_1^g . Након сређивања израза за допринос J_1^g добијамо:

$$\begin{aligned} J_1^g &= -\frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 q \tilde{V}(q) \frac{1}{4} \left[i \nabla_{\vec{k}} (i\vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k}, t) \right] \nabla_{\vec{r}} (i\vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \\ &\quad + \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 q \tilde{V}(q) \frac{1}{4} \left[i \nabla_{\vec{k}} (i\vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \right] \nabla_{\vec{r}} (i\vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k}, t). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Међутим у апроксимацији $W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \approx W(\vec{r}, \vec{k}, t)$, када сматрамо да је у дуготаласном лимесу q мало, не добијамо допринос овог члана:

$$\boxed{J_1^g \approx 0.} \quad (6.32)$$

Допринос линеарног члана који зависи од функције $f(\vec{r}, \vec{s})$ је:

$$\begin{aligned} J_1^f = & -i \left(\nabla_{\vec{k}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}} - \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{k}} \right) V_{Fock} \\ & - \frac{i}{2(2\pi)^2} \int d^2 q \tilde{V}(q) q^2 \sin^2 \theta W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \vec{k} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \\ & - \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 q \tilde{V}(q) (\vec{q} \wedge \vec{k}) (i \vec{q} \wedge \vec{e}_z) \times \\ & \times \left[W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) - W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \right]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Где смо препознали у рачуну допринос Фоковог члана преко Вигнерове функције:

$$V_{Fock} \approx -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 q \tilde{V}(q) \frac{(\vec{k} \wedge \vec{q})^2}{4} W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t). \quad (6.34)$$

Желимо да апроксимирајмо и израз 6.33 у дуготаласном лимесу када је q мало. Интеграл $\int d^2 q \tilde{V}(q) (\vec{q} \wedge \vec{k}) (i \vec{q} \wedge \vec{e}_z) \left[W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) - W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \right]$ је пропорционалан са $\tilde{V}(q) q^3$, па због тога, за сада, можемо да занемаримо тај члан. Такође, препознајемо и масени члан који се појављује због постојања интеракције. Сада, допринос линеарног члана J_1^f има облик:

$$J_1^f \approx -i \left(\nabla_{\vec{k}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}} - \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{k}} \right) V_{Fock} - \frac{2i}{M} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \vec{k} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t). \quad (6.35)$$

Добијамо квантну Болцманову једначину без додатних апроксимација у следећем облику:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = & \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d^2 q \tilde{V}(q) \left\{ (\vec{q} \wedge \vec{k}) (i \vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) \left[W(\vec{r}, \vec{k}, t) W(\vec{r}, \vec{k}, t) \right] \right. \\ & - \frac{1}{4} \left[i \nabla_{\vec{k}} (i \vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k}, t) \right] \nabla_{\vec{r}} (i \vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \\ & + \frac{1}{4} \left[i \nabla_{\vec{k}} (i \vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \right] \nabla_{\vec{r}} (i \vec{q} \wedge \nabla_{\vec{r}}) W(\vec{r}, \vec{k}, t) \\ & + i (\vec{q} \wedge \vec{k})^2 \left[\nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{k}} W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) - \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \nabla_{\vec{k}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \right] \\ & - (\vec{q} \wedge \vec{k}) (i \vec{q} \wedge \vec{e}_z) \left[W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \nabla_{\vec{r}} - W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \right] \} \\ & - \frac{i \vec{k}}{M} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Последњи члан је кинетички члан чије извођење се може наћи у додатку Б.

Интересује нас да видимо да ли ћемо добити неку поправку на масу у ефективној макроскопској теорији коју нам даје квантна Болцманова једначина. Из тог разлога

пишемо облик квантне Болцманове једначине са додатним апроксимацијама:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{2i}{M} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \vec{k} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) + i \left[\nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{k}} - \nabla_{\vec{k}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}} \right] V_{Fock} \\ - \frac{2i}{M} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \vec{k} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) - \frac{i\vec{k}}{M} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t).} \quad (6.37)$$

Природно је очекивати од система само са интеракцијом да постоји инваријантност на буст (трансляције у импулсном простору) хамилтонијана. У изолованом Ландауовом нивоу је то запажено од стране Халдејна кроз интерпретацију нумеричких прорачуна. Наш хамилтонијан микроскопски нема кинетички члан, маса долази из потенцијала. За то мора да постоји буст инваријантност.

6.3 Дискусија

Пођимо од обичног система са голом, обичном масом m_b (из атомске, молекулске физике) и интеракцијом између атома, односно молекула. Квантна Болцманова једначина таквог система има облик:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\vec{k}}{m_b} \nabla_{\vec{r}} W + \nabla_{\vec{k}} V \nabla_{\vec{r}} W - \nabla_{\vec{r}} V \nabla_{\vec{k}} W = \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\text{coll}}. \quad (6.38)$$

где је други члан са леве стране допринос кинетичког члана, трећи и четврти члан потичу од интеракције система, док је са десне стране једнакости колизиони члан. Претпоставимо могућност описа нашег система помоћу Ферми течности и занемаримо колизиони допринос. Теорија Ферми течности подразумева постојање *ефективне масе квазичестица* m^* . Из овакве претпоставке добијамо исти облик квантне Болцманове једначине. Међутим, ако уместо голе масе m_b пишемо m^* , онда то морамо да надокнадимо постојањем додатног интеракционог члана, поред $V(q)$.

Ако из хамилтонијана 5.5 добијамо масени члан, који даје само голу масу, то не може бити крајњи облик хамилтонијана, јер ефективна теорија мора да поседује буст инваријантност. Па ћемо тај хамилтонијан сматрати само једним доприносом укупном хамилтонијану као $\mathcal{H}^{(1)}$. Како изгледа онда укупни хамилтонијан? Он мора да одговара вези коју смо наметнули, тј. да комутира са њом:

$$[H, \rho^L(\vec{k}) + \rho^R(\vec{k})] \Big|_{\rho^L(\vec{k}) + \rho^R(\vec{k}) = 0} = 0. \quad (6.39)$$

Треба да додамо неки допунски члан, како бисмо добили укупни хамилтонијан који даје чисту интеракцију типа $c^\dagger c^\dagger c c$, зато ћемо претпоставити додатни члан облика:

$$\mathcal{H}^{(2)} = C \int d^2 q e^{-\frac{q^2}{2}} (\rho^L(\vec{q}) + \rho^R(\vec{q})) (\rho^L(-\vec{q}) + \rho^R(-\vec{q})), \quad (6.40)$$

јер је $\rho^R(\vec{q}) + \rho^L(\vec{q}) = 0$ веза коју смо наметнули систему, па практично "додајемо нулу" хамилтонијану. Очекујемо да је $C > 0$, јер би једноставна минимизација доприноса

тог члана енергији захтевала да важи $\rho^L(\vec{k}) + \rho^R(\vec{k}) = 0$. Додали смо члан који није нормално уређен, али можемо да га напишемо преко нормално уређеног члана и додатног дела:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} = & C \int d^2 q e^{-\frac{q^2}{2}} : (\rho^L(\vec{q}) + \rho^R(\vec{q}))(\rho^L(-\vec{q}) + \rho^R(-\vec{q})) : \\ & + 4C \int \frac{d^2 k d^2 q}{(2\pi)^2} e^{-\frac{q^2}{2}} \cos^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Слично сређивању код хамилтонијана 5.5, добијамо:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} = & 4C \int \frac{d^2 k_1 d^2 k_2 d^2 q}{(2\pi)^4} e^{-\frac{q^2}{2}} \cos \left(\frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{q}}{2} \right) \cos \left(\frac{\vec{k}_2 \wedge \vec{q}}{2} \right) c_{\vec{k}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} \\ & + 4C \int \frac{d^2 k d^2 q}{(2\pi)^2} e^{-\frac{q^2}{2}} \cos^2 \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{q}}{2} \right) c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Како би наш укупни хамилтонијан заиста давао само чисту интеракцију типа $c^\dagger c^\dagger cc$, треба да изразимо како изгледа константа C која задовољава тај услов. Дакле, она би требало да поништи члан 5.9, који даје интеракциону масу у дуготаласном лимесу:

$$H^{(2)} \approx \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{2M} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}. \quad (6.43)$$

Обзиром да све радимо у дуготаласном лимесу, морамо да нађемо и члан који даје масу код хамилтонијана $\mathcal{H}^{(2)}$ 6.42 у дуготаласном лимесу. Након тога, за константу C добијамо:

$$C = \frac{1}{8(2\pi)^2} \frac{\int dq \tilde{V}(q) q^3}{\int dq e^{-\frac{q^2}{2}} q^3} \quad (6.44)$$

Комплетан израз за хамилтонијан има облик:

$$H = \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)}. \quad (6.45)$$

На Ферми нивоу овакав хамилтонијан нема квадратни члан по импулсу, што обезбеђује овако изабрана константа C . За њега можемо рећи да $m_b \rightarrow \infty$, што карактерише буст инваријантност. Како за масу M из хамилтонијана H знамо да је продукт интеракција, онда можемо да кажемо да је она заправо ефективна маса Ферми течности у првој апроксимацији: $M = m^*$.

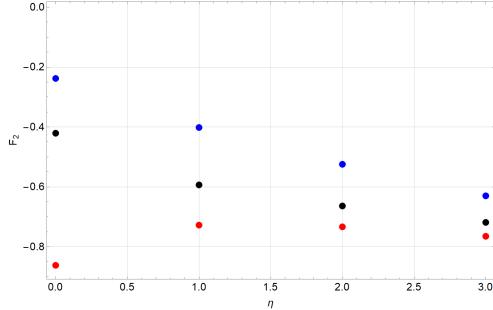
6.4 Померанчук нестабилност

У претходном поглављу смо покушали да нађемо Померанчук нестабилност полазећи од хамилтонијана 5.5. У овом одељку желимо да видимо да ли бисмо је добили са новим хамилтонијаном 6.45 који смо задали у овом поглављу.

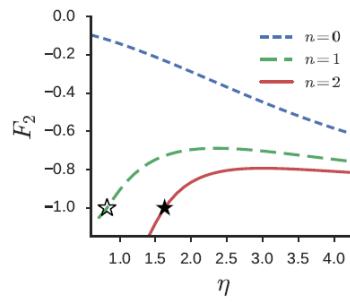
Поново уводимо cut – off параметар η у Кулонову интеракцију. Фоков члан $V_{Fock}^\eta(\theta)$, када се сви импулси налазе на Ферми површи, је у овом случају једнак:

$$V_{Fock}^\eta = -e^{-2|\sin \frac{\theta}{2}|(\eta + |\sin \frac{\theta}{2}|)} \left[\frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|} \sin^2 \left(\frac{\sin \theta}{2} \right) + 8C(\eta) \cos^2 \left(\frac{\sin \theta}{2} \right) \right], \quad (6.46)$$

где C више није константа већ зависи од параметра η .



Слика 6.1: $l = 2$ параметар Ферми течности за три Ландауова нивоа ($n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$)



Слика 6.2: $l = 2$ параметар Ферми течности за три Ландауова нивоа ($n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$) која је добијена у раду [29]

Нумеричким решавањем израза за Ландауов параметар F_2 (једначина 5.16) у односу на cut – off параметар η , добијамо слику 6.1. Плавом бојом приказан је најнижи Ландауов ниво $n = 0$, црном бојом представљен је први Ландауов ниво $n = 1$, а првеном други Ландауов ниво $n = 2$.

Добијени резултати 6.1 су ближи ономе што су Ли, Резаји, Халдејн, Ким и Шао добили у свом раду, слика 6.2. Увођење додатног члана у хамилтонијану да би се добила буст инваријантност се и овим резултатом може правдати. Разлика која ипак постоји у односу на рад [29], је да ми у првом и другом Ландауовом нивоу ($n = 1$ и $n = 2$) за $\eta \sim 0$ ипак не добијамо параметар $F_2 < -1$ у нашој ефективној слици, тј. не добијамо Померанчук нестабилност. Наше разматрање у оквиру теорије усредњеног поља ипак није доволно добро за откривање критичног понашања.

7

Закључак

У овом раду смо се бавили описом система електрона у изолованом Ландауовом нивоу. Прво поглавље овог рада било је посвећено основним појмовима везаним за квантни Холов ефекат. Почели смо класичним Холовим ефектом, а затим смо посматрали квантну теорију. Ту смо већ видели да огромна дегенерација Ландауових нивоа онемогућава да решимо проблем оваквог многочестичног система са интеракцијом помоћу неког строгог формализма. Проблем се знатно компликује када попуњеност Ландауових нивоа није целобројна.

Друго поглавље се бавило разумевањем фракционог квантног Холовог ефекта. Како међучестична интеракција овде игра велику улогу, неопходно је било да нађемо начин како да је третирамо. Велики део нашег разумевања фракционог квантног Холовог ефекта се заснива на разумевању пробних таласних функција. Први велики корак у објашњењу, помоћу пробне таласне функције, дао је Лафлин. Иако предлозхена интуицијом, таласна функција у себи садржи доста информација и особина које из експеримента зnamо да систем поседује. Као што је на пример компресибилност.

Систем са фракционом попуњеношћу стања носи фракционо наелектрисање, што ефективно изгледа као да су се неки електрони поделили. Међутим зnamо да је електрон недељиви конституент материје. Из тог разлога, уводимо нове степене слободе - композитне фермионе.

У наредном поглављу смо се бавили описом система у изолованом Ландауовом нивоу на пуњењу $\nu = 1$ система бозона. Нумерички прорачуни показују да је право стање које описује овај систем заправо бозонски фафијан. Међутим, можемо да сматрамо композитне фермионе као тзв. родитељско стање за разумевање бозонског фафијана. Овакво становиште нам је дало оправдање да уместо фафијанског користимо опис композитних фермиона. Конструисали смо проширенi Хилбертов простор, из ког смо, помоћу наметнуте везе, извукли физички Хилбертов простор стања. Ако направимо паралелу између спарених Холових стања са Куперовим паровима који су предуслов за настанак BCS суперпроводности, као и то што се фафијанско стање природно појављује као BCS спарено стање, то нам даје наду да можда систем испољава суперпроводне особине. Очекивали смо да нађемо енергетски процеп који би гарантовао да се електрони близу Ферми површи не могу експитовати и тако дегра-

дирати суперпроводни ток. Међутим, нисмо добили решење које би томе одговарало са поставком Ридовог хамилтонијана композитних фермиона.

Следеће поглавље било је посвећено електронима у полупопуњеном изолованом Ландауовом нивоу. На основу искуства добијеног из HLR-теорије и Черн-Сајмонс теорије, дали смо хамилтонијан композитних фермиона са везама које би одговарале таквом систему. Затим смо поновили анализу као код система бозона на пуњењу $\nu = 1$, и третирали систем Хартри-Фоковом методом. Затим смо желели да тестирамо да ли систем испољава Померанчук нестабилност на вишем Ландауовим нивоима. Због зависности хамилтонијана од квадрата Лагерових полинома, на вишем Ландауовим нивоима, увели смо cut – off параметар η . Очекивали смо да ћемо добити нестабилност за мале параметре $\eta \sim 0$. Међутим, из такве поставке хамилтонијана са везама нисмо добили нестабилност.

Из квантне Болцманове једначине, коју смо добили у петом поглављу рада, видели смо да оваквом поставком система не добијамо поправку на голу масу. Због тога смо додали нови члан у хамилтонијан, који обезбеђује да на Ферми новоу хамилтонијан нема квадратних чланова по импулсу. Потом смо желели да испитамо појаву Померанчук нестабилности са новим хамилтонијаном. Добили смо резултат који је ближи ономе што су добили Ли, Резаји, Халдејн, Ким и Шао у свом раду [29]. Ипак нисмо добили Померанчук нестабилност за мале вредности $\eta \sim 0$, те сматрамо да анализа теорије у оквиру усредњеног поља није довољно добро за откривање критичног понашања система.

Остале су нека отворена питања. Следећи корак у истраживању система електрона у полупопуњеном Ландауовом нивоу, као система композитних фермиона (који смо поставили у овом раду), би било трагање за спареним стањима и добијање функције процепа за BCS суперпроводност. Друго питање би било решавање квантне Болцманове једначине коју смо добили.

Захвалница: Овом приликом желела бих да се захвалим својој менторки проф. др Милици Миловановић, на смерницама и доброј сарадњи током обраде ове теме и израде мастер рада. Надам се да ћемо наставити да сарађујемо и убудуће. Затим, желела бих да се захвалим др Соњи Предин која се заједно са нама бавила обрадом ове теме и која ми је помогла око нумеричких прорачуна у овом раду. На крају, желела бих да се захвалим Стефану Ђорђевићу, студенту докторских студија на Физичком факултету, Универзитета у Београду, на сугестијама за сам изглед мастер рада, као и на неизмерној подршци током његове изrade.

Додатак А

Фафијан у суперпроводној теорији

У одељку 4.3 смо, након увођења фафијанског стања, образложили да можемо да повежемо нашу теорију са суперпроводном теоријом. У овом додатку ћемо показати, уз помоћ теорије поља, да се фафијани природно појављују у многочестичној таласној функцији за BCS суперпроводно стање [14].

Претпоставимо да можемо да креиримо N -честично стање из Фоковог вакуума $|\Omega\rangle$ на следећи начин:

$$|N\rangle = \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N \phi(x_1, \dots, x_N) \Psi^\dagger(x_N) \dots \Psi^\dagger(x_1) |\Omega\rangle, \quad (\text{A.1})$$

где је $|\Omega\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$ вакуум интеракционе теорије, а x просторна координата у било ком броју димензија. Претпоставићемо још да су сви спинови оријентисани на горе, што значи да у спинском делу простора таласна функција је симетрична. Под овом претпоставком, орбитални део таласне функције мора бити антисиметричан.

Таласну функцију из N -честичног стања можемо добити као:

$$\phi(x_1, \dots, x_N) = \langle \Omega | \Psi(x_1) \dots \Psi(x_N) | N \rangle. \quad (\text{A.2})$$

Све време подразумевамо да је норма вакуума $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$, као и да важе канонске антисиметричне релације између оператора поља: $\{\Psi_i, \Psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}$. Показаћемо да је таласна функција, дефинисана на овај начин, добро дефинисана:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= \langle \Omega | \Psi(x_1) \Psi(x_2) | 2 \rangle = \frac{1}{2} \int d^2 y_1 d^2 y_2 \phi(y_1, y_2) \langle \Omega | \Psi(x_1) \Psi(x_2) \Psi^\dagger(y_2) \Psi^\dagger(y_1) | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d^2 y_1 d^2 y_2 \phi(y_1, y_2) (\langle \Omega | \overbrace{\Psi(x_1)}^{} \overbrace{\Psi(x_2)}^{} \Psi^\dagger(y_2) \Psi^\dagger(y_1) | \Omega \rangle \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad + \langle \Omega | \overbrace{\Psi(x_1)}^{} \overbrace{\Psi(x_2)}^{} \Psi^\dagger(y_2) \Psi^\dagger(y_1) | \Omega \rangle) \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (\phi(x_1, x_2) - \phi(x_2, x_1)). \quad (\text{A.5})$$

Стање Куперовог паре, такозваног $p + ip$ суперпроводника, су дали Грин и Рид у раду [28] као:

$$|BCS\rangle = e^{\frac{1}{2} \int \psi^\dagger g(x-y) \psi(x) dx dy} |\Omega\rangle, \quad (\text{A.6})$$

где је $g(x - y)$ таласна функција Куперовог паре (непарна функција). Ако развијемо експонент у ред, добијамо сва стања са парним бројем честица. Природно је да уведемо генераторску функцију таласних функција за било који број честица:

$$Z[J] = \langle \Omega | e^{\int dx J(x) \psi(x)} |BCS\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Из генераторске функције се добијају таласне функције диференцирањем по Грасмановом извору $J(x)$:

$$\phi(x_1, \dots, x_N) = \left. \frac{\partial^N Z}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_N)} \right|_{J=0}. \quad (\text{A.8})$$

Преко дефиниције кохерентних стања, која су својствена стања оператора поља ψ и ψ^\dagger , можемо, партициону функцију, написати на следећи начин:

$$Z(J) = \int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-\bar{\psi}\psi} e^{j\psi} e^{\frac{1}{2} \bar{\psi} g \psi}. \quad (\text{A.9})$$

Након интеграљења по пољима добијамо: $Z(J) = e^{\frac{1}{2} J g J}$. Функција спареног стања је:

$$\phi(x_1, x_2) = \left. \frac{\partial^2 Z}{\partial J(x_1) \partial J(x_2)} \right|_{J=0} = -g(x_1 - x_2). \quad (\text{A.10})$$

За таласну функцију четири честице можемо да користимо Викову теорему, па добијамо:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_1 - x_2)g(x_3 - x_4) - g(x_1 - x_3)g(x_2 - x_4) + g(x_1 - x_4)g(x_2 - x_3). \quad (\text{A.11})$$

Добили смо исти облик таласне функције као у одељку 3.3.

Додатак Б

Квантна Болцманова једначина

У овом делу додатка ћемо израчунати квантну Болцмануву једначину за хамилтонијан облика:

$$H = T + V(|\vec{r}|) \quad (\text{Б.1})$$

где је T кинетичка енергија система, а $V(|\vec{r}|)$ потенцијална енергија. Прво ћемо израчунати допринос кинетичког члана квантној Болцмановој једначини. Вигнерову функцију чију временску еволуцију посматрамо ћемо само у случају кинетичког члана означити са W_0 . Кинетички члан хамилтонијана има облик $T = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \varepsilon_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}$.

$$i\hbar \frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^2s d^2k_1 d^2k_2 d^2q e^{i\vec{k}\vec{s}} e^{-i\vec{k}_1(\vec{r}+\frac{\vec{s}}{2})} e^{i\vec{k}_2(\vec{r}-\frac{\vec{s}}{2})} \varepsilon_{\vec{q}} \text{Tr} \left\{ \left[c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2}, c_{\vec{q}}^\dagger c_{\vec{q}} \right] \rho(t) \right\} \quad (\text{Б.2})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2s d^2k_1 d^2k_2 d^2q e^{i\vec{k}\vec{s}} e^{-i\vec{k}_1(\vec{r}+\frac{\vec{s}}{2})} e^{i\vec{k}_2(\vec{r}-\frac{\vec{s}}{2})} \varepsilon_{\vec{q}} \times \\ \times \text{Tr} \left\{ \left(\delta^{(2)}(\vec{k}_2 - \vec{q}) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{q}} - \delta^{(2)}(\vec{k}_1 - \vec{q}) c_{\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} \right) \rho(t) \right\} \quad (\text{Б.3})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2s d^2k_1 d^2k_2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{2m} e^{i\vec{k}\vec{s}} e^{-i\vec{k}_1(\vec{r}+\frac{\vec{s}}{2})} e^{i\vec{k}_2(\vec{r}-\frac{\vec{s}}{2})} \text{Tr} \left\{ \rho(t) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} \right\} \quad (\text{Б.4})$$

Ако претпоставимо вектор \vec{k} у облику $\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}$, добијамо:

$$i\hbar \frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2s d^2k_1 d^2k_2 \frac{\vec{k}}{2m} \frac{1}{i} \nabla_{\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{s}} e^{-i\vec{k}_1(\vec{r}+\frac{\vec{s}}{2})} e^{i\vec{k}_2(\vec{r}-\frac{\vec{s}}{2})} \text{Tr} \left\{ \rho(t) c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} \right\} \quad (\text{Б.5})$$

$$= \frac{\vec{k}}{im} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \quad (\text{Б.6})$$

За допринос кинетичког члана квантној Болцмановој једначини добијамо:

$$i\hbar \frac{\partial W_0}{\partial t} = - \frac{i\vec{k}}{m} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \quad (\text{Б.7})$$

Желимо да добијемо само изменски допринос потенцијала интеракције квантној Болцмановој једначини, јер диполни потенцијал не даје допринос у директном члану, тј.

директни члан је једнак нули. Потенцијал интеракције за који рачунамо допринос има следећи облик: $V = \int \frac{d^2q d^2p_1 d^2p_2}{(2\pi)^6} \tilde{V}(q) c_{\vec{p}_1 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1}$. Након што применимо све технике и математичке трикове, као што смо урадили при раду са хамилтонијаном 5.5, добијамо изменски допринос потенцијала интеракције квантној Болцмановој једначини:

$$i\hbar \frac{\partial W_I}{\partial t} = (i\nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{k}} - i\nabla_{\vec{k}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}}) \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q) W(\vec{r}, \vec{k} + \vec{q}, t) \quad (\text{Б.8})$$

Када саберемо допринос кинетичког члана и допринос интеракционог члана, добијамо квантну Болцманову једначину облика:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\vec{k}}{M} \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) + \nabla_{\vec{r}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{k}} V(\vec{r}, \vec{k}, t) - \nabla_{\vec{k}} W(\vec{r}, \vec{k}, t) \nabla_{\vec{r}} V(\vec{r}, \vec{k}, t) = 0$$

(Б.9)

где смо користили јединице у којима је Планкова константа $\hbar = 1$.

Додатак Џ

Некомутативна геометрија

Да бисмо знали да рачунамо у једночестичном Хилбертовом простору најнижег Ландауовог нивоа, потребно је да познајемо бар најосновније идеје формализма некомутативне геометрије. Узећемо најједноставнији пример за случај бесконачне равни са хомогеним магнетним пољем коју ћемо еквивалентирати са некомутативном равни у некомутативној геометрији.

У овом раду највише смо користили некомутативни Фурије трансформ, те ћемо овде објаснити како се он рачуна за нормализовано базисно стање у координатној репрезентацији при симетричном калибрационом услову:

$$u_m(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2^m m!}} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4}}. \quad (\text{II.1})$$

Сви оператори се могу записати као кернели интеграла, тако оператор \hat{a} можемо репрезентовати његовим кернелом на следећи начин:

$$\hat{a}\psi(z) = \langle z | \hat{a} | \psi \rangle \quad (\text{II.2})$$

$$\begin{aligned} &= \langle z | \hat{a} \int d^2 z' | z' \rangle \langle z' | \psi \rangle \\ &= \int d^2 z' \langle z | \hat{a} | z' \rangle \langle z' | \psi \rangle \\ &= \int d^2 z' a(z, \bar{z}') \psi(\bar{z}'), \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

где је $\psi(z)$ неко стање коначне норме. Кернел оператора се може развити у ред на следећи начин

$$a(z, \bar{z}') = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} u_m(z) \overline{u_n(z')}. \quad (\text{II.4})$$

где су a_{mn} елементи бесконачне матрице. Произвольни оператор у проширеном Хилбертовом простору, у свим Ландауовим нивоима, тј. све квадратно интеграбилне функције на равни, се могу пројектовати на најнижи Ландауов ниво. Пре увођења

Диракове делта функције, у овом простору, дефинишемо star производ два оператора:

$$\hat{a} \star \hat{b}(z, \bar{z}') = \int d^2 z_1 a(z, \bar{z}_1) b(z_1, \bar{z}'). \quad (\text{Џ.5})$$

Диракова делта функција $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ има матричне елементе δ_{mn} у ортонормираном базису и свој одговарајући оператор репрезентован као кернел интеграла:

$$\begin{aligned} \delta(z, \bar{z}') &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \delta_{mn} u_m(z) \overline{u_n(z')} = \sum_m u_m(z) \overline{u_m(z')} \\ &= \sum_m \frac{1}{2\pi 2^m m!} z^m \bar{z}'^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2} e^{-\frac{1}{4}|z'|^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}|z|^2 - \frac{1}{4}|z'|^2} \sum_m \frac{\left(\frac{z\bar{z}'}{2}\right)^m}{m!} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}|z|^2 - \frac{1}{4}|z'|^2 + \frac{1}{2}z\bar{z}'}. \end{aligned} \quad (\text{Џ.6})$$

Овај оператор имплементира пројекцију на најнижи Ландауов ниво за било који оператор из проширеног Хилбертовог простора. Диракова делта функција има следеће особине:

$$\hat{\delta}\psi = \psi, \quad (\text{Џ.7})$$

$$\hat{\delta} \star \hat{a} = \hat{a} \star \hat{\delta} = \hat{a}. \quad (\text{Џ.8})$$

Ако желимо да пређемо у импулсни простор преко Фурије трансформа, потребан нам је оператор $e^{i\vec{k}\vec{r}}$. Његова пројекција на најнижи Ландауов ниво се постиже на следећи начин:

$$\int d^2 z_1 \delta(z, \bar{z}_1) e^{i\vec{k}\vec{r}_1} \delta(z_1, \bar{z}') = \tau_{\vec{k}}(z, \bar{z}'). \quad (\text{Џ.9})$$

На овај начин смо дефинисали оператор равног таласа $\hat{\tau}_{\vec{k}}$:

$$\hat{\tau}_{\vec{k}} = e^{i\vec{k}\hat{R}}. \quad (\text{Џ.10})$$

Оператор равног таласа задовољава једначину магнетне транслације:

$$\hat{\tau}_{\vec{k}} \star \hat{\tau}_{\vec{k}'} = \hat{\tau}_{\vec{k}+\vec{k}'} e^{\frac{1}{4}(\bar{k}k' - k\bar{k}')} = \hat{\tau}_{\vec{k}+\vec{k}'} e^{\frac{i}{2}\text{Im}(\bar{k}k')} = \hat{\tau}_{\vec{k}+\vec{k}'} e^{\frac{i}{2}\vec{k}\wedge\vec{k'}}. \quad (\text{Џ.11})$$

Овако смо дефинисали оператор преко кога радимо некомутативни Фурије трансформ. За функцију $a(z, \bar{z}')$, некомутативни Фурије трансформ можемо написати као:

$$a(z, \bar{z}') = \int \frac{d^2 k}{2\pi} a_{\vec{k}} \tau_{\vec{k}}(z, \bar{z}'). \quad (\text{Џ.12})$$

Важе релације ортонормиранистичкости и релација комплетности за оператор равног таласа:

$$\int \tau_{\vec{k}} \star \tau_{\vec{k}'} = 2\pi \delta(\vec{k} + \vec{k}'), \quad (\text{Џ.13})$$

$$\int \frac{d^2 k}{2\pi} \tau_{\vec{k}}(z, \bar{z}') \tau_{-\vec{k}}(w, \bar{w}') = \delta(z, \bar{w}') \delta(w, \bar{z}'). \quad (\text{Џ.14})$$

Како је star производ асоцијативан, али није комутативан, можемо увести комутатор са овим производом који се назива *заграда Вејл-Мојала*:

$$[\hat{a}, \star \hat{b}] = \hat{a} \star \hat{b} - \hat{b} \star \hat{a}. \quad (\text{III.15})$$

III.1 Некомутативна теорија поља

У овом делу додатка желимо да прикажемо најосновније идеје формализма некомутативне теорије поља. Како у раду ова теорија није коришћена озбиљно при извођењу закључака, дефинисаћемо само најосновније појмове који су коришћени у међукорацима, и рачунању Фуријевог трансформа

Претпоставимо да просторне координате X и Y у $(2+1)$ димензија задовољавају следећу комутациону релацију:

$$[X, Y] = i\theta, \quad (\text{III.16})$$

где је θ параметар некомутативности, и претпоставићемо да је у питању константа. Координате X и Y можемо да посматрамо као операторе у простору стања система. Дакле, желимо да просторне координате не комутирају. Интересују нас поља која живе у некомутативном простору. Зато, дефинишемо скаларну функцију $f(\vec{R})$, где је $\vec{R} = (X \ Y)^T$. Стандардни начин за дефинисање оваквих функција је преко Вејловог уређења које дефинише функције у терминима њиховог Фуријевог трансформа:

$$f(\vec{R}) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\vec{R}} \widetilde{f}(\vec{k}). \quad (\text{III.17})$$

У горњем изразу је $\widetilde{f}(\vec{k})$ обична функција импулса \vec{k} , чије компоненте међусобно комутирају. Као у случају некомутативне геометрије, и овде се јавља оператор равног таласа III.10, преко ког можемо да изразимо инверзни Фуријев трансформ на следећи начин:

$$\widetilde{f}(\vec{k}) = \int d^2 R \text{Tr} \left\{ f(\vec{R}) \tau_{\vec{k}} \right\}. \quad (\text{III.18})$$

Треба напоменути да је \vec{R} оператор, па је самим тим и $f(\vec{R})$, као функција оператора, такође оператор. Можемо да дефинишемо производ две функције оператора. Посматрамо две функције оператора положаја, $g(\vec{R})$ и $f(\vec{R})$. Производ ове две функције

је:

$$\begin{aligned}
 f(\vec{R})g(\vec{R}) &= \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}\hat{R}} \widetilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}'\hat{R}} \widetilde{g}(\vec{k}') \\
 &= \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} \widetilde{f}(\vec{k}) \widetilde{g}(\vec{k}') e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{R} - \frac{1}{2}[\vec{k}\hat{R}, \vec{k}'\hat{R}]} + \dots \\
 &= \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} \widetilde{f}(\vec{k}) \widetilde{g}(\vec{k}') e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{R} - \frac{1}{2}[k_x X + k_y Y, k'_x X + k'_y Y]} + \dots \\
 &= \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} \widetilde{f}(\vec{k}) \widetilde{g}(\vec{k}') e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{R} - \frac{1}{2}k_x k'_y i\theta + \frac{1}{2}k_y k'_x i\theta} \\
 &= \int \frac{d^2 k d^2 k'}{(2\pi)^4} \left(e^{-i\frac{\theta\vec{k}\times\vec{k}'}{2}} \widetilde{f}(\vec{k}) \widetilde{g}(\vec{k}') \right) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{R}}. \tag{Џ.19}
 \end{aligned}$$

Ако урадимо обичан Фурије трансформ овог производа, видимо да он одговара star производу $f(x) \star g(x)$ обичних функција $f(x)$ и $g(x)$ комутирајућих координата x . Такође, можемо да дефинишемо и извод функције, који ће одговарати изводу "обичне" функције у комутативном простору стања [12].

Додатак Д

Извођења релација за таласне функције при симетричној калибрацији

Комплексне координате које смо увели у првом поглављу могу да се напишу преко креационих и анихилационих оператора на следећи начин:

$$z = i\sqrt{2}l_B(b - a^\dagger), \quad (\text{Д.1})$$

$$\bar{z} = -i\sqrt{2}l_B(b^\dagger - a). \quad (\text{Д.2})$$

Матрични елемент равног таласа може да се израчуна тако што се $-i\vec{k}\vec{r}$ изрази преко комплексног импулса и комплексне координате, на следећи начин: $-i\vec{k}\vec{r} = -\frac{1}{2}(\vec{k}z + k\bar{z})$. Овај израз се лако проверава. Комплексне координате смо изразили преко парова оператора креације и анихилације у изразима Д.1 и Д.2. Матрични елемент равног таласа је:

$$\begin{aligned} \langle n', m' | e^{-i\vec{k}\vec{r}} | n, m \rangle &= \langle n', m' | e^{\frac{-i}{2}(\bar{k}z + k\bar{z})} | n, m \rangle \\ &= \langle n' | e^{-\frac{l_B}{\sqrt{2}}(ka^\dagger - \bar{k}a)} | n \rangle \langle m' | e^{-\frac{l_B}{\sqrt{2}}(\bar{k}b^\dagger - kb)} | m \rangle \\ &= \langle n' | e^{-\frac{l_B}{\sqrt{2}}(ka^\dagger)} e^{\frac{l_B}{\sqrt{2}}\bar{k}a} e^{-\frac{l_B^2}{4}[ka^\dagger, -\bar{k}a]} | n \rangle \langle m' | e^{-\frac{l_B}{\sqrt{2}}(\bar{k}b^\dagger)} e^{\frac{l_B}{\sqrt{2}}kb} e^{-\frac{l_B^2}{4}[\bar{k}b^\dagger, -kb]} | m \rangle \\ &= e^{-\frac{l_B^2|k|^2}{2}} \langle n' | e^{-\frac{l}{\sqrt{2}}ka^\dagger} e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\bar{k}a} | n \rangle \langle m' | e^{-\frac{l}{\sqrt{2}}\bar{k}b^\dagger} e^{\frac{l}{\sqrt{2}}kb} | m \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Д.3})$$

У трећем реду овог рачуна смо користили ВСН-формулу (Baker–Campbell–Hausdorff). Израчунаћемо матрични елемент који живи у простору везаном за један Ландауов

64 Додатак Д. Извођења релација за таласне функције при симетричној калибрацији

ниво, јер се аналогно може применити и одредити и преостали матрични елемент.

$$\begin{aligned}
\langle m' | e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}kb^\dagger} e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{k}b} | m \rangle &= \sum_{p,q=0}^{+\infty} \langle m' | \left(-\frac{l_B}{\sqrt{2}}\bar{k} \right)^p \left(\frac{l_B}{\sqrt{2}}k \right)^q \frac{1}{p!q!} (b^\dagger)^p b^q | m \rangle \\
&= \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^m \left(-\frac{l_B}{\sqrt{2}}\bar{k} \right)^p \left(\frac{l_B}{\sqrt{2}}k \right)^q \frac{1}{p!q!} \langle m' | (b^\dagger)^p b^q | m \rangle \\
&= \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^m \left(-\frac{l_B}{\sqrt{2}}\bar{k} \right)^p \left(\frac{l_B}{\sqrt{2}}k \right)^q \frac{1}{p!q!} \sqrt{m}\sqrt{m-1}\dots \\
&\quad \cdot \sqrt{m-q+1}\sqrt{m'}\sqrt{m'-1}\dots\sqrt{m'-p+1} \langle m' - p | m - q \rangle \\
&= \sum_{p=0}^{m'} \sum_{q=0}^m \left(-\frac{l_B}{\sqrt{2}}\bar{k} \right)^p \left(\frac{l_B}{\sqrt{2}}k \right)^q \frac{1}{p!q!} \sqrt{\frac{m!}{(m-q)!} \frac{m'!}{(m'-p)!}} \delta_{m'-m,p-q} \\
&= \sum_{q=0}^m \left(-\frac{l_B}{\sqrt{2}}\bar{k} \right)^{m'-m+q} \left(\frac{l_B}{\sqrt{2}}k \right)^q \frac{1}{(m'-m+q)!q!} \frac{\sqrt{m!m'!}}{(m-q)!} \\
&= \sqrt{\frac{m!}{m'!}} \left(-\frac{l_B}{\sqrt{2}}\bar{k} \right)^{m'-m} \sum_{q=0}^m \left(\frac{-l_B^2\bar{k}k}{2} \right)^q \frac{m'!}{q!(m-q)!(m'-m+q)!} \\
&= \left(\frac{m!}{m'!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-l_B\bar{k}}{\sqrt{2}} \right)^{m'-m} L_m^{m'-m} \left(\frac{|k|^2}{2} \right). \tag{Д.4}
\end{aligned}$$

У првом реду рачуна смо развили по Тејлоровом развоју експоненцијалну функцију. Затим смо уочили да бројач q може да иде само до m да се не би потпуно анихиларало стање, тј. да би израз био различит од нуле. Слично смо урадили и за p , јер $\langle m' | (b^\dagger)^p = (b^p | m')^\dagger$. Потом смо деловали на стања овим операторима. У претпоследњем реду смо препознали да сума представља генерализани Лагеров полином $L_m^{m'-m} \left(\frac{|k|^2}{2} \right)$.

Добијамо да је матрични елемент равног таласа једнак:

$$\begin{aligned}
\langle n', m' | e^{-i\vec{k}\vec{r}} | n, m \rangle &= e^{-\frac{l_B^2|k|^2}{2}} \left(\frac{m!}{m'!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-l_B\bar{k}}{\sqrt{2}} \right)^{m'-m} \left(\frac{n!}{n'!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-l_B\bar{k}}{\sqrt{2}} \right)^{n'-n} \\
&\quad \cdot L_m^{m'-m} \left(\frac{|k|^2}{2} \right) L_n^{n'-n} \left(\frac{|k|^2}{2} \right). \tag{Д.5}
\end{aligned}$$

Ако желимо да нађемо међуелектронске интеракционе чланове за електроне који се налазе на n -том Ландауовом нивоу, потребан нам је Фуријеов трансформ потенцијала. Из тог разлога је потребно израчунати матрични елемент равног таласа:

$$\langle n, m'_1; n, m'_2 | e^{i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} | n, m_1; n, m_2 \rangle = \left[L_n \left(\frac{q^2}{2} \right) \right]^2 \langle m'_1, m'_2 | e^{i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} | m_1, m_2 \rangle. \tag{Д.6}$$

Одавде видимо да је интеракциони потенцијал $V(\vec{q})$ у n -том Ландауовом нивоу еквивалентан ономе из најнижег Ландауовог нивоа до на фактор $\left[L_n \left(\frac{q^2}{2} \right) \right]^2$.

Библиографија

- [1] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, “New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, pp. 494–497, Aug 1980.
- [2] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, “Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 48, pp. 1559–1562, May 1982.
- [3] S. M. Girvin, A. H. MacDonald, and P. M. Platzman, “Magneto-roton theory of collective excitations in the fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. B*, vol. 33, pp. 2481–2494, Feb 1986.
- [4] A. H. MacDonald, “Introduction to the physics of the quantum hall regime,” 1994.
- [5] D. Tong, “Lectures on the quantum hall effect,” 2016.
- [6] S. H. Simon, “THE CHERN-SIMONS FERMI LIQUID DESCRIPTION OF FRACTIONAL QUANTUM HALL STATES,” in *Composite Fermions*, pp. 91–194, WORLD SCIENTIFIC, oct 1998.
- [7] N. Read, “Order parameter and ginzburg-landau theory for the fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, pp. 86–89, Jan 1989.
- [8] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, “Theory of the half-filled landau level,” *Phys. Rev. B*, vol. 47, pp. 7312–7343, Mar 1993.
- [9] S. Chengzhang, “The chern–simons–landau–ginzburg theory of the fractional quantum hall effect,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 06, 04 2012.
- [10] G. Murthy and R. Shankar, “Hamiltonian theories of the fractional quantum hall effect,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 75, pp. 1101–1158, Oct 2003.
- [11] D. Bohm and D. Pines, “A collective description of electron interactions: Iii. coulomb interactions in a degenerate electron gas,” *Phys. Rev.*, vol. 92, pp. 609–625, Nov 1953.
- [12] Z. Dong and T. Senthil, “Noncommutative field theory and composite fermi liquids in some quantum hall systems,” *Physical Review B*, vol. 102, nov 2020.

- [13] D. Gočanin, S. Predin, M. D. Ćirić, V. Radovanović, and M. Milovanović, “Microscopic derivation of dirac composite fermion theory: Aspects of noncommutativity and pairing instabilities,” *Physical Review B*, vol. 104, sep 2021.
- [14] R. Shankar, *Quantum Field Theory and Condensed Matter: An Introduction*. Cambridge University Press, 2017.
- [15] R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, and J. H. English, “Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, pp. 1776–1779, Oct 1987.
- [16] N. Read, “Theory of the half-filled landau level,” *Semiconductor Science and Technology*, vol. 9, pp. 1859–1864, nov 1994.
- [17] R. B. Laughlin, “Anomalous quantum hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, pp. 1395–1398, May 1983.
- [18] F. D. M. Haldane, “Fractional quantization of the hall effect: A hierarchy of incompressible quantum fluid states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, pp. 605–608, Aug 1983.
- [19] B. I. Halperin, “Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized hall states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, pp. 1583–1586, Apr 1984.
- [20] J. K. Jain, “Composite-fermion approach for the fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 63, pp. 199–202, Jul 1989.
- [21] G. Moore and N. Read, “Nonabelions in the fractional quantum hall effect,” *Nuclear Physics B*, vol. 360, no. 2, pp. 362–396, 1991.
- [22] V. Pasquier and F. Haldane, “A dipole interpretation of the $v = 12$ state,” *Nuclear Physics B*, vol. 516, no. 3, pp. 719–726, 1998.
- [23] N. Read, “Lowest-landau-level theory of the quantum hall effect: The fermi-liquid-like state of bosons at filling factor one,” *Physical Review B*, vol. 58, pp. 16262–16290, dec 1998.
- [24] F. Deman, D. Platonov, and M. Shakeri, “Landau’s theory of fermi liquids,” 2019.
- [25] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Theory of superconductivity,” *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 1175–1204, Dec 1957.
- [26] M. Greiter, X. Wen, and F. Wilczek, “Paired hall states,” *Nuclear Physics B*, vol. 374, no. 3, pp. 567–614, 1992.
- [27] G. Canright and S. Girvin, “Anyons, the quantum hall effect, and two-dimensional superconductivity,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 03, no. 12, pp. 1943–1963, 1989.

- [28] N. Read and D. Green, “Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. B*, vol. 61, pp. 10267–10297, Apr 2000.
- [29] K. Lee, J. Shao, E.-A. Kim, F. Haldane, and E. H. Rezayi, “Pomeranchuk instability of composite fermi liquids,” *Physical Review Letters*, vol. 121, oct 2018.
- [30] H. Bruus, K. Flensberg, and Ø. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction*. Oxford Graduate Texts, OUP Oxford, 2004.
- [31] E. Wigner, “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium,” *Phys. Rev.*, vol. 40, pp. 749–759, Jun 1932.
- [32] W. B. Case, “Wigner functions and weyl transforms for pedestrians,” *American Journal of Physics*, vol. 76, no. 10, pp. 937–946, 2008.