

Универзитет у Београду
Физички факултет



Мастер рад

Утицај електричне и магнетне диполне
интеракције на облик Ферми површи
у ултрахладним квантним гасовима

Студент: Ирина Станојевић

Ментор: др Антун Балаж

Београд, 2023.

Садржај

1	Увод	1
1.1	Ултрахладни квантни гасови	1
1.2	Идеалан Ферми гас	2
1.3	Ферми гас у хармонијској замци	4
1.4	Дипол-дипол интеракција у дегенерисаним Ферми гасовима	5
1.5	Досадашњи резултати	7
1.6	Хартри-Фок теорија средњег поља	7
1.7	Хартри-Фок теорија за Вигнерову функцију	9
1.8	Овај рад	11
2	Енергија диполног фермионског система	12
2.1	Анзац и нормализација	12
2.2	Укупна енергија система	13
2.2.1	Кинетички члан	14
2.2.2	Потенцијални члан	14
2.2.3	Директан (Хартри) члан	14
2.2.4	Изменски (Фок) члан	17
2.3	Минимизација тоталне енергије	18
2.3.1	Варијациони параметри у импулсном простору	19
2.3.2	Варијациони параметри у реалном простору	21
3	Деформација гасног облака и Ферми површи диполног система	22
3.1	Линеарно независан систем једначина	22
3.2	Једначине у бездимензионој форми	22
3.3	Деформација гасног облака	24
3.4	Деформација Ферми површи	27
4	Енергија двоструко диполног система	30
4.1	Укупна енергија система	30
4.2	Директан (Хартри) члан за магнетну ДДИ	30
4.3	Изменски (Фоков) члан за магнетну ДДИ	32
4.4	Минимизација енергије	33
4.4.1	Варијациони параметри у импулсном простору	33
4.4.2	Варијациони параметри у реалном простору	34
4.5	Деформације гасног облака и Ферми површи двоструко диполног система	35
4.5.1	Једначине у бездимензионој форми	35
4.5.2	Гранична вредност мале јачине електричне ДДИ	35
4.5.3	Деформација гасног облака и Ферми површи	36
	Закључак	38

А Фурије трансформ ДДИ потенцијала	39
Б Анизотропна и помоћна функција	41
Б.1 Анизотропна функција	41
Б.2 Помоћна функција	43
Литература	45

Поглавље 1

Увод

1.1 Ултрахладни квантни гасови

Слабо интерагујући квантно-дегенерисани гасови на ниским температурама у замкама пружају изузетно разноврсне могућности за квантитативна истраживања квантно-статистичких ефеката. Ултрахладни гасови одликују се неуобичајено великим степеном контроле који се у експерименту може постићи над њима. Проучавајући ове системе под различитим условима, долазимо до открића која далеко превазилазе уску област атомске и молекуларне физике и дубоко сежу у питања физике кондензоване материје и физике многочестичних система. Деценијама дегенерисани фермиони у замци привлаче пажњу као системи за себе, а поготово су занимљиви када постоји могућност за појаву суперпроводности, односно за стварање Куперових парова.

Главну препреку у експерименталној реализацији ових система представљало је хлађење. Није нимало лако у лабораторији постићи Бозе-Ајнштајн кондензацију или квантну дегенерацију Ферми гаса. Комбинованим методама (Земаново успоравање, ласерско хлађење и евапоративно хлађење) гасови алкалних метала и лантаноида се могу охладити до температура реда нанокелвина. Успеси као што су остварење Бозе-Ајнштајн кондензације разређених Бозе гасова 1995. године [1, 2] (Е. Корнел, В.Кетерле и К. Виман су за овај успех добили Нобелову награду 2001. године), а затим и дегенерисаних Ферми гасова 1999. године [3], направили су читав преокрет у физици. Технике за хлађење и хватање атома у замке препознате су као вредне Нобелове награде. Стивен Чу, Клод Коен-Тануђи и Вилијам Д. Филипс су 1997. године награђени за развој метода за хлађење и хватање атома у замке ласерским зрацима. Неколико година касније Џон Л. Хол и Теодор В. Хенш су 2005. године добили награду за допринос у развоју прецизне ласерске спектроскопије.

Нова технолошка достигнућа отворила су даља питања и подстакла даљи развој области, на пример како укључивање интеракције утиче на неке од карактеристика система. За много постојећих система је модел неинтерагујућег Ферми гаса одлична полазна тачка, али добро знамо да су интеракције веома важне за потпуније разумевање физике у реалном систему. Тако су у физици хладних атома најпре уложени напори у проучавање утицаја контактне интеракције међу атомима, тачније једнопараметарске ван дер Валсове интеракције. Параметар ове интеракције је дужина расејања у симетричном s -каналу. Краткодометне интеракције су веома слабо изражене код разређених гасова, док за фермионе расејање у s -каналу ни не постоји (за разлику од класичних и Бозе гасова) због антисиметричности многочестичне таласне функције при пермутацији честица. Такође је и расејање у p -каналу веома мало заступљено на ниским енергијама, што објашњава

успешност модела идеалног Ферми гаса. Када су касније реализовани кондензати са атомима хрома ^{52}Cr , ербијума ^{168}Er и диспрозијума ^{164}Dy , који имају велике магнетне диполне моменте¹, и то редом $6 \mu_B$, $7 \mu_B$, $10 \mu_B$, подстакнуто је питање какве последице на карактеристике расподеле и понашање дегенерисаних гасова имају дипол-дипол интеракције (ДДИ). Испоставља се да дипол-дипол интеракције битно утичу на карактер расејања у гасу, на стабилност система, облик атомског гаса, а код фермиона и на облик Ферми површи и разне друге особине. Ми ћемо разматрати дегенерисани Ферми гас на температури $T = 0$, који поседује магнетни (стални или индуковани) и електрични диполни момент и који је осетљив и на магнетно и на електрично поље. Питаћемо се шта се дешава са Ферми површи, као и шта се дешава са просторном расподелом фермиона када мењамо јачину магнетних диполних момената усмерених дуж осе ортогоналне на оријентацију електричних диполних момената.

Хармонијске замке су веома једноставне за реализацију и обезбеђују просторну локализацију ултрахладних система. Код фермиона, у случају када је замка анизотропна то ће се одразити на изглед расподеле густине у реалном простору, док ће у импулсном простору и даље бити недеформисана Ферми сфера, с обзиром да је кинетички члан хомогена квадратна функција свих компоненти импулса. Међутим, када проучавамо диполне Ферми гасове, у игру улази и интеракциони члан. Тада долази до конкуренције кинетичког и изменског члана, услед чега долази до деформације Ферми сфере, што теоријски проучено у раду [4] и добијено у експерименту [5].

У наставку поглавља 1 подсетићемо се најважнијих карактеристика идеалног Ферми гаса на ниским температурама. Истаћи ћемо најважније карактеристике идеалног дегенерисаног Ферми гаса, затим ћемо разматрати гас у хармонијском потенцијалу и на крају ћемо увести дипол-дипол интеракцију.

1.2 Идеалан Ферми гас

С обзиром да ћемо се у овом раду бавити ултрахладним диполним фермионима у замци, наставак овог поглавља посветићемо основним карактеристикама хладног фермионског гаса. Како у ултрахладним системима јачина међуатомских интеракција може бити подешена са великом тачношћу и у великом опсегу, чак се могу ефективно и искључити, за почетак ћемо описати идеалан Ферми гас.

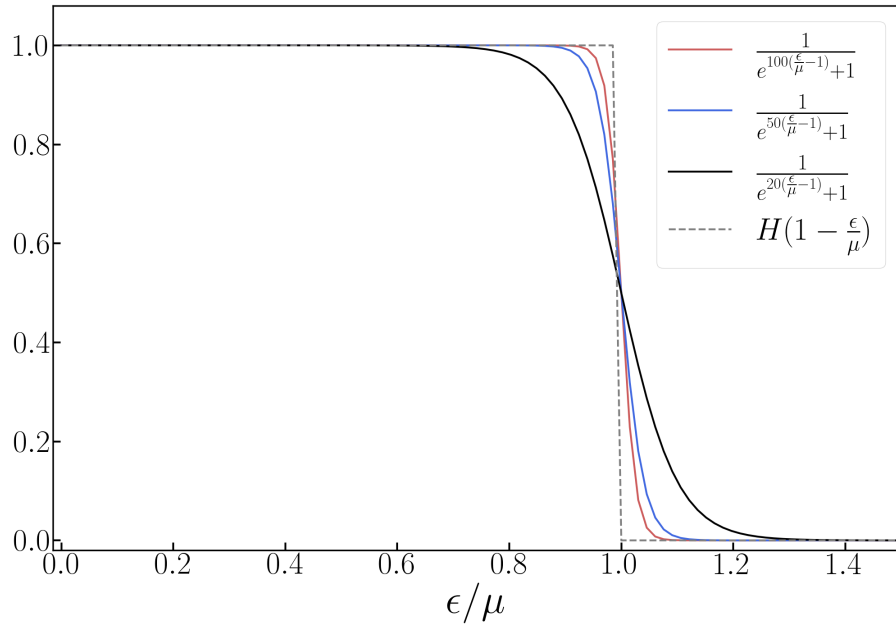
Посматрајмо хомогени систем дегенерисаног Ферми гаса на нултој температури. Нека N идентичних честица масе M заузима запремину $V = L^3$. Једночестична стања су равни таласи са енергијом

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M}, \quad (1.1)$$

где импулс \mathbf{k} јединствено одређује својствена стања и узима дискретне вредности одређене периодичним граничним условима, $\mathbf{k} = 2\pi \mathbf{n}/L$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3$.

Фермионска многочестична таласна функција, која се састоји из орбиталног и спинског дела, је антисиметрична, тј. при замени две идентичне честице знак таласне функције се мења. Када би се два фермиона нашао у истом орбиталном и спинском стању, њихова замена не би довела до промене знака таласне функције, па из антисиметрич-

¹Магнетни диполни моменти се уобичајено изражавају у Боровим магнетонима, чија је вредност $\mu_B = e\hbar/(2M_e) = 9.27401 \times 10^{-24} \text{JT}^{-1}$, где је M_e маса електрона.



Слика 1.1. На слици је приказана Ферми-Диракова расподела за неколико вредности параметра $\mu\beta$. На нултој температури расподела изгледа као Хевисајдова степ функција (испрекидана крива, $\mu\beta \rightarrow \infty$), на вишим температурама одступа од идеалног облика на начин представљен на слици. Црвена крива одговара вредности параметра $\mu\beta = 100$, плава крива одговара вредности параметра $\mu\beta = 50$, црна крива одговара вредности параметра $\mu\beta = 20$.

ности таласне функције закључујемо да би њена вредност била једнака нули, односно видимо да два фермиона не могу бити у истом квантномеханичком стању (вероватноћа за то је једнака нули). Дакле, максималан број попуњености фермионског стања је један. За неинтерагујуће фермионе расподела по енергијама је Ферми-Диракова расподела,

$$\nu(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \quad (1.2)$$

где је $\beta = 1/(k_B T)$. На нултој температури расподела узима идеалан облик Хевисајдове степ функције:

$$\nu(\epsilon) = H(\epsilon - \mu), \quad (1.3)$$

овде μ означава хемијски потенцијал који је једнак Фермијевој енергији E_F . На нултој температури сва енергетска стања нижа од E_F су попуњена, док су виша празна. Приметимо на слици 1.1 да само на нултој температури фермиони оштро попуњавају стања искључиво испод E_F , док на вишим температурама имају и термалну енергију због које онда попуњавају и виша енергетска стања. Укупан број фермиона који се налази у свим дозвољеним стањима је:

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon)\nu(\epsilon) d\epsilon, \quad (1.4)$$

где је $g(\epsilon)$ густина стања, која је за слободни гас корена функција енергије $g(\epsilon) = \frac{VM^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}}\sqrt{\epsilon}$. Након интеграције добијамо:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2M}(6\pi^2 n)^{2/3}, \quad (1.5)$$

где је $n = N/V$. Одатле одмах читавамо и $K_F = (6\pi^2 n)^{1/3}$, Фермијев импулс који одговара стању са енергијом E_F . За слободне неинтерагујуће фермионе на нултој температури важи да су сва стања са импулсом мањим од Фермијевог попуњена, тј. $|\mathbf{k}| \leq K_F$. Ова неједнакост дефинише Ферми море у импулсном простору, а једнакост $|\mathbf{k}| = K_F$ дефинише површ која

дели попуњена од непопуњених стања, коју називамо Ферми површ. У случају идеалног Ферми гаса ова површ је сфера радијуса K_F .

Када имамо густину стања, можемо лако да израчунамо све термодинамичке величине. Тако се може наћи унутрашња енергија система, а затим користећи једначину стања лако налазимо притисак, који се у овом случају назива Паулијев квантни притисак. За разлику од класичних честица и бозона, притисак код дегенерисаних фермиона постоји и на нултој температури. То нам говори да његово порекло није у термалним флуктуацијама, већ потиче из основних квантномеханичких правила која се односе на фермионе.

1.3 Ферми гас у хармонијској замци

Да бисмо експериментално изучавали Ферми гасове, како се честице не би разлетеле, неопходно је да гас заробимо унутар потенцијалне замке. Замке могу бити сачињене од посебно подешеног магнетног поља или од укрштених ласерских зрака, који гас држе на једном месту и омогућавају му да остане термално изолован. На овај начин се квантни гасови у магнетним, оптичким и магнето-оптичким замкама изучавају на температурама реда нанокелвина. У овој секцији навешћемо главне одлике идеалног Ферми гаса у анизотропној триаксијалној хармонијској замци, која је описана следећим потенцијалом:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{M}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (1.6)$$

где ω_i , $i \in \{x, y, z\}$ представљају фреквенције замке у одговарајућим правцима.

Претпостављајући да је број честица гаса веома велики, можемо да користимо семикласични приступ у опису нашег система. Семикласични опис је дозвољено користити за Ферми гас са нехомогеном расподелом $n(\mathbf{r})$ ако можемо да изделимо систем у делиће линеарне димензије ℓ тако да се у сваком делићу налази знатно више од једне честице гаса и да се у оквиру задате ћелије потенцијал не мења пуно имајући у виду да је карактеристична енергија система E_F , тј. $E_F \gg \hbar\bar{\omega}$. Приметимо да на периферији гасног облака не важи ова апроксимација, међутим та област је веома уска, и не утиче значајно на понашање система. У семикласичној апроксимацији свака честица је описана таласним пакетом који је задат координатама \mathbf{r} и \mathbf{k} у фазном простору, а енергија честице је својствена енергија Хамилтонијана $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M} + U(\mathbf{r})$. У овом случају Ферми-Диракова расподела дата је изразом:

$$\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{e^{\beta[\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - \mu]} + 1}, \quad (1.7)$$

где је хемијски потенцијал одређен нормализационим условом (1.4). Скрећемо пажњу да се у случају када је гас конфиниран у хармонијској замци дозвољена стања у фазном простору су сузбијена, самим тим и густина стања има другачију зависност од енергије: $g(\epsilon) = \epsilon^2 / (6\hbar^3 \bar{\omega}^3)$, где је $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ [6].

За даљи рад нам је од великог значаја да дефинишемо карактеристичну енергију система и температурну скалу. На нултој температури хемијски потенцијал дефинише Ферми енергију ($\mu(T=0) = E_F$) и интеграција нормализационог услова (1.4) нас доводи до:

$$E_F = k_B T_F = \hbar\bar{\omega} (6N)^{1/3}. \quad (1.8)$$

Дефинишимо сада и карактеристичне линеарне димензије гасног облака и Ферми сфере, тзв. Томас-Ферми радијусе и Ферми импулсе у случају система у хармонијској замци:

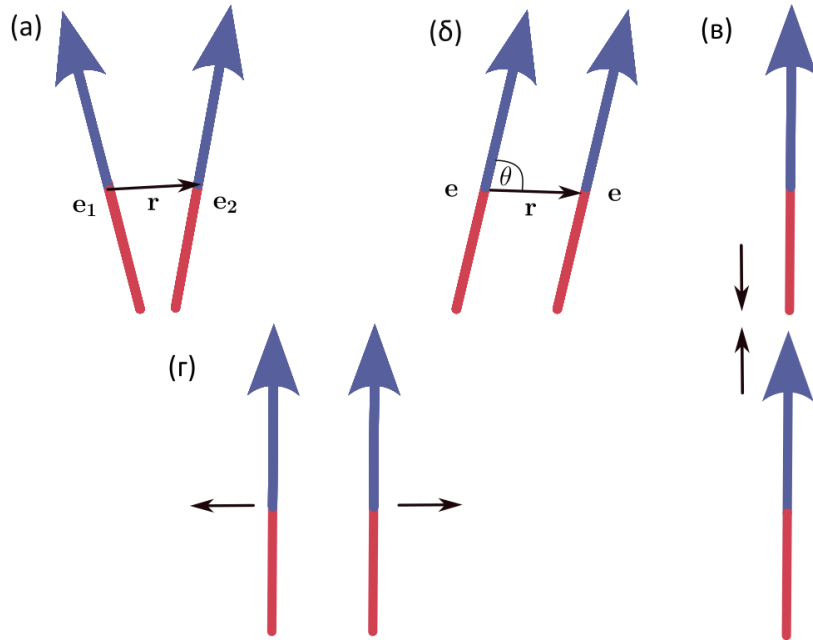
$$R_i^0 = \sqrt{\frac{2E_F}{M\omega_i^2}}, \quad (1.9)$$

$$K_{F,i}^0 \equiv K_F^0 = \sqrt{\frac{2ME_F}{\hbar^2}}. \quad (1.10)$$

Ове величине се добију интегралом расподеле (1.7) по импулсном и реалном простору.

1.4 Дипол-дипол интеракција у дегенерисаним Ферми гасовима

У овом раду изучаваћемо ултрахладне диполне фермионе у хармонијској замци. Стога ћемо ову секцију посветити дипол-дипол интеракцији. Разматраћемо њен облик, особине, могућу контролу у експерименталним поставкама као и утицај ДДИ на основно стање ултрахладних система. Са енергетске тачке гледишта, енергија ДДИ је значајно нижа од термалне енергије честица на собној температури, па у класичној физици ова интеракција не игра значајну улогу код гасова.



Слика 1.2. Природа дипол-дипол интеракције. (а) Диполи усмерени дуж различитих ортова e_1, e_2 . Интеракција опада са растојањем r између два дипола. (б) Поларисани диполи дуж јединичног орта e . Интеракција зависи од угла између вектора r и орта e . (в) Конфигурација када су диполи један изнад другог, у којој се привлаче (случај $\theta = 180^\circ$ или $\theta = 0^\circ$). (г) Конфигурација у којој су диполи један поред другог, у којој се одбијају (случај $\theta = 90^\circ$)

С обзиром да симетрија, домет интеракције и јачина интеракције битно утичу на карактеристике и понашање система, очекујемо да ДДИ другачије доприноси изгледу основног стања и понашању система од контактне интеракције која је уобичајена код бозонских система. Док је контактна интеракција изотропна и краткодметна, дипол-дипол интеракцију одликују анизотропност и дугодметност. У зависности од угла између

оријентације два дипола, дипол-дипол интеракција може бити привлачна, али и одбојна (слика 1.2). Два дипола постављена паралелно један поред другог се одбијају, док се они који стоје један изнад другог привлаче. Лако се налази и угао оријентације за који је интеракција нулта ($\theta = \arccos 1/\sqrt{3} \approx 54.7^\circ$). Све ове особине ДДИ чине диполне системе на многе начине квалитативно другачијим од осталих система.

За два дипола на растојању \mathbf{r} један од другог, који су оријентисани редом дуж праваца $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, ДДИ потенцијал има следећи облик:

$$V_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{r}^2 - 3(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^5}. \quad (1.11)$$

Док за поларисане диполе добија поједностављен облик:

$$V_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3}. \quad (1.12)$$

Врста и јачина интеракције одређене су параметром C_{dd} , који је директно пропорционалан квадрату магнетног односно електричног диполног момента. За магнетне диполне системе јачина интеракције је:

$$C_{\text{dd}}^m = \mu_0 m^2, \quad (1.13)$$

где је m магнетни диполни момент, обично изражен јединицама μ_B , а μ_0 представља магнетну пермеабилност вакуума. Овом типу ДДИ подлежу магнетне атомске врсте као што су алкални метали - хром (^{53}Cr) или лантаноиди - ербијум и диспрозијум (^{167}Er , ^{161}Dy).

Када говоримо о системима са електричним диполним моментима, обично се ради о хетеронуклеарним молекулама, где нехомогеност расподеле наелектрисања у електронским омотачима доводи до појаве перманентног диполног момента. Неки од ултрахладних молекула код којих је утицај ДДИ веома важан су KRb [7], NaK [8], RbCs [9], који могу да буду хемијски стабилни само на ниским температурама. Испоставља се да стални диполни момент постоји и код хомонуклеарних Ридбергових молекула (који се састоје од једног атома рубидијума у основном стању и другог у високо ексцитованом стању), и он је пропорционалан квадрату главног квантног броја n^2 [10]. Постоји и могућност индуковања диполног момента у атомским или молекуларним системима помоћу јаког спољашњег електричног поља. У сваком случају јачина интеракције је одређена са:

$$C_{\text{dd}}^e = \frac{d^2}{\epsilon_0}, \quad (1.14)$$

где је d електрични диполни момент обично изражен у јединицама Дебаја (D), а ϵ_0 је диелектрична пропустљивост вакуума. Типичан однос између јачина ДДИ поларних молекула и магнетних атома је пропорционалан квадрату Зомерфелдове константе fine структуре $C_{\text{dd}}^e/C_{\text{dd}}^m \sim 1/\alpha_s^2 \sim 10^4$ ². У случају Ридбергових атома овај однос је n^4 пута већи. Дакле, типична јачина магнетне ДДИ је неколико редова величине мања од уобичајене електричне ДДИ.

У референци [11] је развијена техника за подешавање јачине, али и знака интеракције у атомским системима са ненултим сталним магнетним моментом. У овој техници користи

²Вредност ове константе је $\alpha_s = 1/137 \approx 7.297 \times 10^{-3}$.

се комбинација статичког магнетног поља дуж z -осе и брзо ротирајућег поља у нормалној xy -равни, тако да је резултујући временски зависан диполни момент:

$$\mathbf{m}(t) = m[\mathbf{e}_z \cos \phi + (\mathbf{e}_x \cos \Omega t + \mathbf{e}_y \sin \Omega t) \sin \phi]. \quad (1.15)$$

У овој једначини Ω је фреквенција ротације поља, а угао ϕ је одређен односом амплитуда статичког и ротирајућег поља. Фреквенција Ω је изабрана тако да се у временском периоду Ω^{-1} атоми не померају значајно, док магнетни моменти адијабатски прате спољашње поље $\mathbf{B}(t)$. Ово одговара услову $\omega_{\text{Larmor}} \gg \Omega \gg \bar{\omega}$. У току периода $2\pi/\Omega$ ефективни магнетни диполни момент је дат изразом:

$$m_{\text{eff}}^2 = m^2 \alpha(\phi), \quad (1.16)$$

где је $\alpha(\phi)$ дато изразом $\alpha(\phi) = (3 \cos^2 \phi - 1)/2$ и може се континуално мењати од 1 до $-1/2$, варирајући угао ϕ . Дакле, овај метод дозвољава да се знак интеракције преокрене или да интеракција ефективно буде једнака нули. Аналогне технике могу бити примењене и за сталне електричне диполне моменте у поларним молекулима. Електрични диполни моменти могу бити контролисани и само мењањем јачине и оријентације спољашњег електричног поља. Електрично поље, које је постављено у истом смеру као и стални електрични диполи гаса, довешће до повећања диполних момената, а супротно оријентисано поље до њиховог смањења.

1.5 Досадашњи резултати

У овом одељку ћемо укратко резимирати метод и резултате приказане у раду [12], где су детаљно анализирана физичка својства ултрахладног диполног Ферми гаса на нултој температури. За разлику од претходних резултата у овом пољу, овде је дозвољена произвољна оријентација дипола, што значајно отежава рачун и при одређивању основног стања система, а посебно при разматрању динамике система.

Пре свега, у раду [12] је развијена и изведена Хартри-Фок теорија за ултрахладне диполне фермионе, чији диполи су оријентисани под произвољним углом у односу на осе замке. Теорија је развијена полазећи од Вигнерове функције. Затим се спровођењем варијационог рачуна, заснованог на физички мотивисаној пробној функцији и минимизацијом енергетског функционала, одређују варијациони параметри и налази основно стање система.

У поменутој дисертацији приказани су резултати варијационог рачуна. Из њих се може видети како стабилност система зависи од јачине дипол-дипол интеракције. Затим је одређено како се деформишу Ферми површ и облик гасног облака. Детаљно је испитано како физичке особине основног стања система зависе од оријентација дипола, односа фреквенција замке, броја честица у систему и јачине ДДИ. У раду [12] је проучавана и динамика система.

1.6 Хартри-Фок теорија средњег поља

Дипол-дипол интеракција је нарочито занимљива јер се већ на нивоу теорије средњег поља долази до квалитативних, али и до неких квантитативних открића и закључака. Ову секцију посветићемо краткој дискусији о Хартри-Фок теорији средњег поља.

Ако разматрамо једнокомпонентни Ферми гас атома или молекула са диполима оријентисаним дуж аксијалне осе хармонијске замке, Хамилтонијан оваквог система дат је следећим

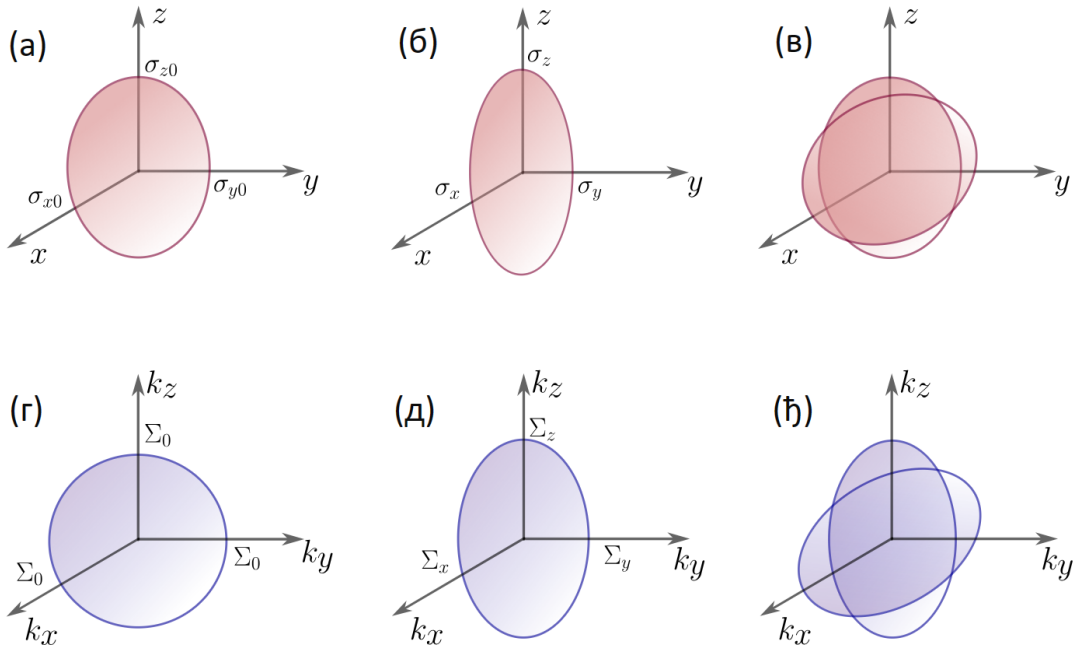
изразом:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\alpha}^2 + \frac{M}{2} (\omega_x^2 x_{\alpha}^2 + \omega_y^2 y_{\alpha}^2 + \omega_z^2 z_{\alpha}^2) \right] + \sum_{\alpha < \beta} V_{dd}(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \quad (1.17)$$

У оквиру Хартри-Фок теорије за многочестичне системе, већ у првом реду апроксимације, поред кинетичког и потенцијалног члана, имамо два члана који потичу од ДДИ. За тренутне експерименталне домете је свакако релевантно посматрати само први ред, с обзиром да ефекти другог реда апроксимације и даље нису видљиви. Чланови у првом реду су директан Хартријев члан и изменски Фоков члан, који је последица антисиметричности тоталне фермионске многочестичне функције. Ова теорија се може формулисати помоћу Вигнерове функције, о којој ћемо детаљније говорити касније.

Даље, користећи се Хартри-Фок теоријом можемо да израчунамо укупну енергију основног стања, посматраног у оквиру великог канонског ансамбла. Минимизацијом великог канонског потенцијала по свим релевантним параметрима добија се систем једначина који описује основно стање, као и аналитички израз за деформацију Ферми површи. Након описаног аналитичког дела, нумерички се могу решавати једначине за разне режиме битних физичких параметара.

Када разматрамо изотропан случај, Хартријев и Фоков члан се поништавају и тиме Ферми површ задржава своју симетрију - остаје сфера. Међутим, када у обзир узмемо ДДИ, оба члана имају нетривијалан допринос. Директан члан је одговоран за деформацију гасног облака, док Фоков члан доводи до деформације Ферми површи. Ферми површ се издужује дуж оријентације дипола, а ова деформација праћена је деформацијом облака у реалном простору. Шематски приказ деформације облака гаса и Ферми површи дат је на слици 1.3.



Слика 1.3. На овој шеми приказани су: (а)-(в) Облик гаса у реалном простору. (г)-(ћ) Облик Ферми површи у импулсном простору. Сlike (а) и (г) одговарају случају неинтерагујућег Ферми гаса. (б) и (д) представљају диполни Ферми гас чији су облак гаса и Ферми сфера издужени дуж осе замке. (в), (ћ) приказују двоструко диполни Ферми гас чији су облак и Ферми сфера деформисани у два правца.

Значајан резултат је да постоји критична вредност јачине интеракције након које систем постаје нестабилан [12]. И деформације у фазном простору и стабилност значајно зависе од оријентације дипола и у овом раду су детаљно испитане ове зависности за оба поларна угла (θ, ϕ) .

1.7 Хартри-Фок теорија за Вигнерову функцију

У раду [12] је диполни Ферми систем посматран из угла формулације квантне механике у фазном простору. У овој секцији објаснићемо како се долази до Вигнерове функције расподеле и навешћемо неке особине ове функције.

Знамо да у квантномеханичким проблемима таласна функција $\psi(\mathbf{r})$ носи све неопходне информације о квантној честици. Знајући таласну функцију, можемо израчунати вероватноћу налажења честице на позицији \mathbf{r} , $|\psi(\mathbf{r})|^2$ или са импулсом \mathbf{k} , $|\psi(\mathbf{k})|^2$. У формулацији у фазном простору нам је уместо таласне функције потребна Вигнерова функција расподеле $W(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. Међутим, с обзиром на важење Хајзенберговог принципа неодређености ова расподела не може бити прост производ расподеле у реалном и импулсном простору. Стриктно говорећи, принцип неодређености уопште не дозвољава постојање функције расподеле у фазном простору за квантномеханичку честицу, јер не можемо са сигурношћу истовремено знати и координату и импулс честице, те не можемо ни дефинисати тачну расподелу вероватноће. Ипак, могуће је дефинисати одређене функције које су налик класичним расподелама вероватноће, такозване квазидистрибуције. Осим што су добра средства у аналитичком рачуну, оне пружају и увид у везе између квантне и класичне физике.

Прву квазидистрибуцију дефинисао је Вигнер 1932. године како би проучавао квантне корекције класичне статистичке физике [13]. Ова расподела зове се Вигнерова функција и ми ћемо је користити надаље, али скрећемо пажњу да постоје и друге расподеле које су касније настале у другим областима физике. Основно питање на које је требало наћи одговор је како да направимо квантномеханички аналогон расподеле у фазном простору.

Даћемо сада једноставну мотивацију за трансформацију која повезује операторе у Хилбертовом простору са функцијама расподеле у фазном простору. Посматраћемо једну честицу у једној димензији (што се може генерализовати на више димензија) и дефинисаћемо квантномеханички аналогон трајекторије. У класичној физици, трајекторија је скуп тачака у фазном простору. Погледајмо следећи израз у Дираковој нотацији:

$$\left\langle \Psi \left| x + \frac{s}{2} \right\rangle \left\langle x + \frac{s}{2} \left| k \right\rangle \left\langle k \left| x - \frac{s}{2} \right\rangle \left\langle x - \frac{s}{2} \left| \Psi \right\rangle \right. \quad (1.18)$$

и прочитајмо га здесна на лево. Први фактор је амплитуда вероватноће да се честица у стању $|\Psi\rangle$ налази на месту $x - \frac{s}{2}$, други је амплитуда вероватноће да честица на истом том месту има импулс k , затим имамо амплитуду вероватноће да се честица са истим импулсом налази на месту $x + \frac{s}{2}$, и најзад да се честица на истом том месту и даље налази у стању $|\Psi\rangle$. Интеграција по s , што је суперпозиција свих могућих квантних трајекторија, нам даје Вигнерову функцију,

$$W(x, k) = \int \Psi^* \left(x + \frac{s}{2} \right) e^{iks} \Psi \left(x - \frac{s}{2} \right) ds. \quad (1.19)$$

Генерализација у три димензије изгледа овако:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int \Psi^* \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}'}{2} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \Psi \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}'}{2} \right) d^3r', \quad (1.20)$$

што се често зове Вигнер-Вајлов³ трансформ једночестичне матрице густине:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle, \quad (1.21)$$

где се усредњавање $\langle \dots \rangle$ врши по ансамблу.

Вигнерова функција, дефинисана трансформом (1.20), није јединствена расподела коју можемо да користимо. Међутим, испоставља се да се одликује разним лепим особинама. Прво, расподела је дефинисана као аналогон хермитског оператора тако да су њене вредности реалне, за разлику од таласне функције која може узимати и комплексне вредности. Друго, налик расподелама $|\psi(\mathbf{r})|^2$ и $|\psi(\mathbf{k})|^2$ она задовољава услов нормализације у фазном простору:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iint W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3r d^3k = 1, \quad (1.22)$$

док интеграљењем $W(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ по реалном простору добијамо вероватноћу налажења у импулсном простору и обратно:

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3k, \quad (1.23a)$$

$$n(\mathbf{k}) = \int W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3r. \quad (1.23b)$$

Међутим, Вигнерова функција је различита од онога што обично називамо расподелом вероватноће јер може узимати и негативне вредности, због чега се често назива квазирасподелом. Те негативне вредности су одраз неklasичног понашања квантне честице. Многе друге карактеристике ове расподеле могуће је наћи у прегледном раду [14].

У првој квантизацији јасно је дефинисан постулат о мерењу физичке величине - опсервабле дефинисане хермитским оператором. Јасно је да у класичним терминима не постоји такав постулат који се односи на мерење величине описане класичном функцијом у фазном простору. Међутим, Вајл је установио веома добру кореспонденцију између сваког оператора и функције у фазном простору и дефинисао мерење које је налик мерењу уз помоћ квантномеханичких оператора. Очекивана вредност резултата мерења оператора $\hat{O}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, коју Вајл повезује са класичном функцијом $O(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, ако се мерење врши на систему у стању $|\Psi\rangle$, једнака је очекиваној вредности функције $O(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ претпостављајући да је систем описан расподелом $W(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ која одговара матрици густине $\hat{\rho}$:

$$\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle = \frac{\iint d^3r d^3k O(\mathbf{r}, \mathbf{k}) W(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\iint d^3r d^3k W(\mathbf{r}, \mathbf{k})}. \quad (1.24)$$

При моделирању основног стања диполног Ферми гаса у раду [12] коришћена је Вигнер-трансформисана Ферми-Диракова расподела за неинтерагујући гас на нултој температури. Њен облик је:

$$W_z^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = H \left(1 - \sum_i \frac{r_i^2}{R_i^2} - \sum_i \frac{k_i^2}{K_i^2} \right), \quad (1.25)$$

³Вигнер-Вајлов трансформ је инвертибилно пресликавање функција у формулацији у фазном простору и оператора у Хилбертовом простору у Шредингеровој слици.

где H представља Хевисајдову степ функцију. Индекс z означава да су диполи оријентисани дуж z осе замке ⁴, а индекс 0 означава да је ова функција одговарајућа за диполне фермионе на нултој температури. Приметимо да је ова функција једнака нули изван Ферми површи одређене радијусима и импулсима R_i и K_i , као што и Паулијев принцип налаже. Такође, овај анзац је довољно флексибилан да дозвољава одговарајућу деформацију и у реалном и у импулсном делу, што су ефекти које желимо да испитамо.

1.8 Овај рад

У овом раду ћемо проучавати двоструко диполне фермионске системе. Разматраћемо како се мења основно стање система ако су електрични диполи усмерени дуж једне осе, а магнетни дуж друге осе система (у овом раду електрични диполи биће оријентисани дуж z -осе, а магнетни дуж x -осе). Такође ћемо испитивати како геометрија замке утиче на деформацију гасног облака и Ферми површи. За овај задатак користимо једноставнију почетну функцију у варијационом рачуну и видећемо које закључке можемо да извучемо у том случају.

⁴У раду [12] коришћена је генерализација $W^0(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, која се односи на произвољну оријентацију дипола.

Поглавље 2

Енергија диполног фермионског система

У овом поглављу ћемо увести једноставан анзац заснован на Гаусовој функцији који ћемо користити у овом раду за апроксимирање Вигнерове функције, семикласичне расподеле о којој је било речи у претходном поглављу. За њу је више пута показано да добро моделира глобално равнотежно стање диполних Ферми гасова на ниским температурама [4, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. За хладне фермионе у хармонијској замци је веома битно да равнотежна функција расподеле у фазном простору брзо пада на нулу ван релевантног региона и у импулсном (због Паулијевог принципа) и у реалном простору (због замке), што ова функција задовољава.

Варијациони параметри у овој расподели ће бити радијуси дуж све три осе у реалном и дуж све три осе у импулсном простору. Они представљају аналогоне Томас-Ферми радијуса и Ферми импулса који су раније уведени. Показаћемо да чак и са овако грубом апроксимацијом можемо да добијемо квалитативно добро понашање односа радијуса и у реалном и у импулсном простору у зависности од јачине интеракције. Главна предност оваквог приступа је могућност за добијање експлицитних аналитичких израза, посебно за деформацију Ферми сфере, што је много теже када се користи анзац са Хевисајдвом функцијом.

2.1 Анзац и нормализација

Гаусијан који у овом поглављу уводимо као апроксимацију Вигнерове функције у фазном простору има следећи облик:

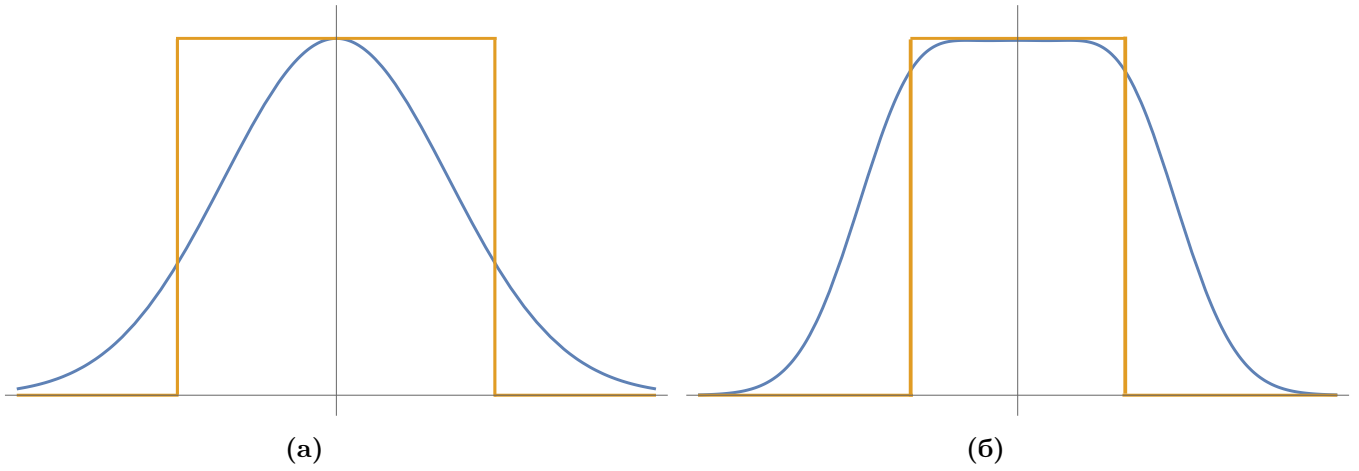
$$W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = e^{-\left(\frac{k_x^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z^2}{\Sigma_z^2} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)}. \quad (2.1)$$

У анзацу (2.1) радијуси у реалном σ_i и импулсном Σ_i простору представљају варијационе параметре и циљ нам је да их одредимо минимизацијом енергетског функционала. На слици (2.1) поредимо Гаусову расподелу са Хевисајдвом функцијом у једној димензији.

Нађимо интеграл ове расподеле по целом простору:

$$N = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3r d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{-\left(\frac{k_x^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z^2}{\Sigma_z^2} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)} d^3k d^3r. \quad (2.2)$$

Након раздвајања променљивих и извршене интеграције, користећи Гаусов интеграл,



Слика 2.1. На овој слици је приказ Гаусове расподеле и Вигнерове функције на нултој температури за идеалан Ферми гас (Хевисајдове функције) у једној димензији. (а) На левој страни је приказано одступање анзаца коришћеног у овом раду од уобичајеног анзаца. (б) На десној страни приказано је шематски како се прављењем линеарне комбинације више Гаусијана може прићи ближе жељеном облику анзаца.

добијамо:

$$N = \frac{1}{8} \sigma_x \Sigma_x \sigma_y \Sigma_y \sigma_z \Sigma_z = \frac{1}{8} \bar{\sigma}^3 \bar{\Sigma}^3, \quad (2.3)$$

где су надвучене величине геометријске средине дефинисане као $\bar{O} = (O_x O_y O_x)^{1/3}$.

2.2 Укупна енергија система

Након што смо одабрали релевантан анзац треба одредити оптималне вредности варијационих параметара. До њих ћемо доћи након минимизације укупне енергије многочестичног система. У Хартри-Фок теорији средњег поља са Хамилтонијаном (1.17) укупна енергија се састоји од четири члана, од којих је први кинетичка енергија E_k :

$$E_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M} W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3 k d^3 r, \quad (2.4)$$

док је други члан енергија хармонијског потенцијала E_U :

$$E_U = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint U(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) d^3 k d^3 r. \quad (2.5)$$

Директном Хартријевом члану у Хамилтонијану одговара енергија E_h :

$$E_h = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \iiint V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) W(\mathbf{r}', \mathbf{k}') d^3 k d^3 k' d^3 r d^3 r', \quad (2.6)$$

док изменском Фоковом члану одговара E_f :

$$E_f = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \iiint V_{dd}(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}'} W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) W(\mathbf{r}, \mathbf{k}') d^3 k d^3 k' d^3 r d^3 r'. \quad (2.7)$$

Обратимо пажњу да када бисмо на место потенцијала ДДИ ставили потенцијал за контактну интеракцију облика $V_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, добили бисмо да су директан и изменски члан једнаки до на знак $E_h = -E_f$. Дакле, као што смо раније рекли, директан и изменски допринос би се поништили, тј. гасни облак и Ферми површ остали би недеформисани, да је контактна интеракција овог облика могућа за фермионе.

2.2.1 Кинетички члан

Ако уврстимо анзац (2.1) у израз за кинетичку енергију система, добијамо:

$$E_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M} e^{-\left(\sum_i \frac{k_i^2}{\Sigma_i^2} + \sum_i \frac{r_i^2}{\sigma_i^2}\right)} d^3k d^3r, \quad (2.8)$$

односно у форми погодној за решавање:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2M} \iint (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{-\left(\frac{k_x^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z^2}{\Sigma_z^2} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)} d^3k d^3r. \quad (2.9)$$

Овај интеграл се може факторисати на више табличних интеграла Гаусовог типа. Ако искористимо резултат (3.326.10.) из збирке [23] за кинетичку енергију добијамо:

$$E_k = \frac{\bar{\sigma}^3 \bar{\Sigma}^3}{8} \frac{\hbar^2 (\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2)}{4M} = \frac{N\hbar^2}{4M} \sum_i \Sigma_i^2, \quad (2.10)$$

где смо искористили израз за нормализацију (2.3).

2.2.2 Потенцијални члан

Потенцијални члан у енергији је одговоран за просторну локализацију фермиона на једном месту, самим тим и за формирање и облик облака датог фермионског гаса. Ако је замка изотропна, облак идеалног гаса ће имати сферни облик. Међутим, ако имамо анизотропију у замци можемо очекивати различите деформације у зависности од односа фреквенција замке. С обзиром да хармонијски потенцијал не утиче на импулсни део наше расподеле, у k -простору неће доћи до деформације услед анизотропије замке. Израчунајмо допринос енергији који потиче од потенцијалне замке:

$$E_U = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint U(\mathbf{r}) e^{-\left(\sum_i \frac{k_i^2}{\Sigma_i^2} + \sum_i \frac{r_i^2}{\sigma_i^2}\right)} d^3k d^3r. \quad (2.11)$$

Ако напишимо овај интеграл у истој форми као и израз (2.9):

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M}{2} \iint (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2 + z^2 \omega_z^2) e^{-\left(\frac{k_x^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z^2}{\Sigma_z^2} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)} d^3k d^3r, \quad (2.12)$$

и искористимо више пута табличне интеграле као и у преходном одељку, за други члан у енергији добијмо:

$$E_U = \frac{\bar{\sigma}^3 \bar{\Sigma}^3}{8} \frac{M}{4} (\sigma_x^2 \omega_x^2 + \sigma_y^2 \omega_y^2 + \sigma_z^2 \omega_z^2) = \frac{NM}{4} \sum_i \sigma_i^2 \omega_i^2, \quad (2.13)$$

где смо опет при сређивању искористили нормализацију (2.3).

2.2.3 Директан (Хартри) члан

Остаје да израчунамо доприносе енергији који у себи садрже дипол-дипол интеракцију. Хартри члан је, поред члана који потиче од замке, одговоран за облик расподеле

честица у реалном простору. Да бисмо решили велики број интеграла извршићемо неколико трансформација. За почетак ћемо преписати интеграл (2.6) на начин погоднији за решавање:

$$E_h = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \iiint W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \left(\int V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') W(\mathbf{r}', \mathbf{k}') d^3 r' \right) d^3 k d^3 k' d^3 r. \quad (2.14)$$

Уочимо да израз у загради представља конволуцију две функције, за чије рачунање можемо да искористимо такозвану конволуциону теорему (SN 24 из збирке [23]) која гласи:

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f} \tilde{g}]. \quad (2.15)$$

Овде је $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$, $\tilde{f} = \mathcal{F}[f]$ и $\tilde{g} = \mathcal{F}[g]$ су Фурије трансформи функција f и g , а \mathcal{F}^{-1} је инверзна Фуријеова трансформација.

Дакле, видимо да за интеграл издвојен заградама у изразу (2.14) важи:

$$\int V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') W(\mathbf{r}', \mathbf{k}') d^3 r' = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{V}_{dd}(\mathbf{k}'') \tilde{W}(-\mathbf{k}'', \mathbf{k}')] (\mathbf{r}, \mathbf{k}'). \quad (2.16)$$

Јасно је да треба наћи Фурије трансформе потенцијала и функције расподеле. Трансформ дипол-дипол потенцијала између два фермиона са поларисаним диполима је детаљније израчунат у додатку А, такође је израчунат у додатку рада [12], за случај када су диполи оријентисани дуж произвољног орта \mathbf{e} . Када су диполи оријентисани дуж z -осе добија се:

$$\tilde{V}_{dd}(\mathbf{k}'') = \frac{C_{dd}}{3} \left(\frac{3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}'')^2}{k''^2} - 1 \right) = \frac{C_{dd}}{3} \left(\frac{3k_z''^2}{k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2} - 1 \right). \quad (2.17)$$

Израчунаћемо сада и директан Фурије трансформ анзаца, користећи следећу конвенцију:

$$\tilde{W}(-\mathbf{k}'', \mathbf{k}') = \int W(\mathbf{r}', \mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}'} d^3 r'. \quad (2.18)$$

Након интеграљења добијамо:

$$\tilde{W}(-\mathbf{k}'', \mathbf{k}') = \pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z e^{-\frac{1}{4}(k_x''^2 \sigma_x^2 + k_y''^2 \sigma_y^2 + k_z''^2 \sigma_z^2)} e^{-\left(\frac{k_x''^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y''^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z''^2}{\Sigma_z^2}\right)}. \quad (2.19)$$

Користећи новодобијене резултате израз (2.14) постаје:

$$\iiint d^3 k d^3 k' d^3 r d^3 k'' W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} \left(e^{-\frac{1}{4}(k_x''^2 \sigma_x^2 + k_y''^2 \sigma_y^2 + k_z''^2 \sigma_z^2)} e^{-\left(\frac{k_x''^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y''^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z''^2}{\Sigma_z^2}\right)} \left(\frac{3k_z''^2}{k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2} - 1 \right) \right)$$

Приметимо да је леви део овог интеграла Фурије трансформ анзаца за $\mathbf{k}'' \rightarrow -\mathbf{k}''$. Приметимо још да је Фурије трансформ (2.19) симетричан у односу на промену знака првог аргумента, односно да важи $W(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) = W(-\mathbf{k}'', \mathbf{k})$. Сада можемо да решимо интеграл по \mathbf{r} користећи претходни резултат (2.19) и добити $W(\mathbf{k}'', \mathbf{k})$. На овај начин нам остају само интегрални у импулсном простору и добијамо:

$$\iiint d^3 k d^3 k' d^3 k'' e^{-\frac{1}{2}(k_x''^2 \sigma_x^2 + k_y''^2 \sigma_y^2 + k_z''^2 \sigma_z^2)} e^{-\left(\frac{k_x''^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y''^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z''^2}{\Sigma_z^2}\right)} e^{-\left(\frac{k_x''^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y''^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z''^2}{\Sigma_z^2}\right)} \left(\frac{3k_z''^2}{k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2} - 1 \right).$$

Ако извршимо интеграцију редом по \mathbf{k} и \mathbf{k}' , за Хартријеву енергију добијамо:

$$E_h = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{C_{dd}}{3} \frac{\bar{\sigma}^6 \bar{\Sigma}^6}{64} \int d^3 k'' e^{-\frac{1}{2}(k_x'' \sigma_x^2 + k_y'' \sigma_y^2 + k_z'' \sigma_z^2)} \left(\frac{3 k_z''^2}{k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2} - 1 \right),$$

Овај интеграл се не може решити аналитички без упрошћавања којим се губи општост решења. Међутим, можемо да уведемо специјалну функцију, која се често појављује при рачуну у системима са дипол-дипол интеракцијом. Пошто је ДДИ анизотропна, ова функција се обично назива анизотропном функцијом и у њој је на математички начин уграђена ова најбитнија карактеристика диполне интеракције.

Да бисмо елегантно препознали анизотропну функцију уведемо прво смену $k_i'' \sigma_i = q_i$. Уз дату смену Хартријева енергија постаје:

$$E_h = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{C_{dd}}{3} \frac{\bar{\sigma}^3 \bar{\Sigma}^6}{64} \iiint dq_x dq_y dq_z e^{-\frac{q^2}{2}} \left(\frac{3 \left(\frac{q_z}{\sigma_z}\right)^2}{\left(\frac{q_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{q_y}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{q_z}{\sigma_z}\right)^2} - 1 \right). \quad (2.20)$$

Како бисмо издвојили анизотропну функцију у овом изразу. Прећи ћемо у сферне координате: $q_x = k \sin \theta \cos \phi$, $q_y = k \sin \theta \sin \phi$, $q_z = k \cos \theta$, при чему је Јакобијан трансформације $J = k^2 \sin \theta$. Претходни интеграл постаје:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dk k^2 e^{-\frac{k^2}{2}} \left(\frac{3 \frac{k^2 \cos^2 \theta}{\sigma_z^2}}{\frac{k^2 \cos^2 \theta}{\sigma_z^2} + \left(\frac{k^2 \cos^2 \phi}{\sigma_x^2} + \frac{k^2 \sin^2 \phi}{\sigma_y^2} \right) \sin^2 \theta} - 1 \right). \quad (2.21)$$

Интеграл по k се може издвојити и његова вредност је $\sqrt{\pi/2}$. Остаје нам још угаони део интеграла,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{3 \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_z^4} \cos^2 \theta}{\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_z^4} \cos^2 \theta + \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \cos^2 \phi + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \sin^2 \phi \right) \sin^2 \theta}. \quad (2.22)$$

С обзиром да је анизотропна функција дефинисана као у раду [12]:

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \left(\sin \theta \frac{3x^2 y^2 \cos^2 \theta}{x^2 y^2 \cos^2 \theta + (y^2 \cos^2 \phi + x^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta} - 1 \right), \quad (2.23)$$

Коначан облик Хартри члана у енергији овог многочестичног система се може написати као:

$$E_h = -\frac{N^2 C_{dd}}{96 \sqrt{2} \pi^{3/2} \bar{\sigma}} f \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right). \quad (2.24)$$

Овај резултат нам већ омогућава да наслутимо да услед анизотропије дипол-дипол интеракције, осим деформације у импулсном простору, имамо и деформацију гасног облака, чак и у случају изотропне замке. Може се рећи да деформација гасног облака у реалном простору прати деформацију Ферми површи у импулсном простору. Сличан израз за Фокову енергију изражен преко анизотропне функције добићемо у следећој секцији.

2.2.4 Изменски (Фок) члан

Следећи члан у изразу за енергију диполног Ферми система, који у себи садржи ДДИ и који битно утиче на облик расподеле честица у импулсном простору, је Фокова изменска енергија. Крајњи облик Ферми површи је дефинисан компетицијом квантне статистике фермиона, симетричног Паулијевог притиска који подржава сферни облик Ферми површи и анизотропног Фоковог члана, због кога се Ферми сфера деформише у елипсоид. Приликом израчунавања изменског члана, да бисмо елиминисали велики број интеграла, слично као и раније извршићемо неколико неопходних трансформација. Прво ћемо увести Фурије трансформ потенцијала и преуредићемо неке од чланова из израза (2.7) како би следећи корак био уочљивији:

$$E_f = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \left(\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{V}_{dd}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') W(\mathbf{r}, \mathbf{k}') \right), \quad (2.25)$$

На интеграл у загради применићемо опет конволуциону теорему (2.15):

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{V}_{dd}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') W(\mathbf{r}, \mathbf{k}') = \mathcal{F}^{-1} \left[V_{dd}(\mathbf{r}') \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right](\mathbf{r}, \mathbf{k}), \quad (2.26)$$

а десну страну једначине (2.25) ћемо написати у облику:

$$\int d^3 r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \left(\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \tilde{V}_{dd}(\mathbf{k}') \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right), \quad (2.27)$$

па је сада

$$E_f = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \left(\int d^3 r' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \left(\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \tilde{V}_{dd}(\mathbf{k}') \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \right). \quad (2.28)$$

Уколико израчунамо интеграл по \mathbf{k} , затим применимо један Фурије трансформ над $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') W(\mathbf{r}, -\mathbf{r}')$, приметимо да интеграл по \mathbf{r} даје јединицу и искористимо симетричност расподеле по оба аргумента, добијамо:

$$\begin{aligned} E_f &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 r \int d^3 r' \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \tilde{V}_{dd}(\mathbf{k}') \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{W}(\mathbf{r}, -\mathbf{r}') \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 r \int d^3 r' \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \tilde{V}_{dd}(\mathbf{k}') \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \tilde{\tilde{W}}(\mathbf{k}'', \mathbf{r}') \tilde{\tilde{W}}(-\mathbf{k}'', -\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}''\mathbf{r}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3 r' \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \tilde{V}_{dd}(\mathbf{k}') \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \tilde{\tilde{W}}(\mathbf{k}'', \mathbf{r}')^2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ако пажљиво погледамо последњи ред, видимо да смо Фурије трансформ потенцијала већ раније нашли, а треба нам трансформ расподеле по оба аргумента.

$$\tilde{\tilde{W}}(\mathbf{k}'', \mathbf{r}') = \frac{\bar{\sigma}^6 \bar{\Sigma}^6}{4096\pi^6} e^{-\frac{1}{2}(k_x''^2 \sigma_x^2 + k_y''^2 \sigma_y^2 + k_z''^2 \sigma_z^2) - \frac{1}{2}(\Sigma_x^2 x'^2 + \Sigma_y^2 y'^2 + \Sigma_z^2 z'^2)}. \quad (2.30)$$

Последњи интеграл из једначине(2.28) можемо да израчунамо:

$$\int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \tilde{\tilde{W}}(\mathbf{k}'', \mathbf{r}')^2 = \frac{N^2}{16\sqrt{2}\pi^{3/2}\bar{\sigma}^3} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma_x^2 x'^2 + \Sigma_y^2 y'^2 + \Sigma_z^2 z'^2)}, \quad (2.31)$$

па нам после сређивања и коришћења нормализационог услова преостаје израз облика:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{N^2}{128\sqrt{2}\pi^{9/2}\bar{\sigma}} \int d^3k' \tilde{V}_{\text{dd}}(\mathbf{k}') \int d^3r' e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} e^{-\frac{1}{2}(\Sigma_x^2 x'^2 + \Sigma_y^2 y'^2 + \Sigma_z^2 z'^2)} \\
 & = -\frac{1}{2} \frac{N^2}{128\sqrt{2}\pi^{9/2}\bar{\sigma}} \int d^3k' \tilde{V}_{\text{dd}}(\mathbf{k}') \frac{N^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_i \frac{k_i'^2}{\Sigma_i^2}}}{384\pi^3\bar{\sigma}\bar{\Sigma}} \\
 & \propto \int d^3k' \frac{C_{\text{dd}}}{3} \left(\frac{3k_z'^2}{k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k_x'^2}{\Sigma_x^2} + \frac{k_y'^2}{\Sigma_y^2} + \frac{k_z'^2}{\Sigma_z^2}\right)}. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Овај нетривијални и аналитички нерешив интеграл садржи информацију о анизотропности интеракције између два поларизована дипола. С обзиром на то, очекујемо поново појављивање анизотропне функције. Слично као раније, увешћемо две смене. Прва смена је: $k_i'/\Sigma_i = q_i$, а након тога прелазимо на сферне координате: $q_x = q \sin \theta \cos \phi$, $q_y = q \sin \theta \sin \phi$, $q_z = q \cos \theta$. Као резултат ових смена добијамо једноставан интеграл који се може изразити преко анизотропне функције, а она овог пута зависи од односа радијуса у импулсном простору:

$$E_f = \frac{N^2 C_{\text{dd}}}{96\sqrt{2}\pi^{3/2}\bar{\sigma}} f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right). \tag{2.33}$$

2.3 Минимизација тоталне енергије

Сада смо израчунали укупну енергију нашег многочестичног система,

$$E = E_k + E_U + E_h + E_f, \tag{2.34}$$

која се, користећи резултате из претходних одељака, може написати у облику:

$$E = \frac{N}{2} \sum_i \frac{\hbar^2 \Sigma_i^2}{2M} + \frac{NM}{4} \sum_i \sigma_i^2 \omega_i^2 + N^2 \frac{c_d}{\bar{\sigma}} \left[f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right) - f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right) \right], \tag{2.35}$$

где је $c_d = C_{\text{dd}}/(96\sqrt{2}\pi^{3/2})$. Имајући коначан израз за укупну енергију, можемо да одредимо варијационе параметре који минимизују енергију за задати број честица у систему, а да притом добијена функција расподеле има физички смисао основног стања.

Приметимо да израз (2.35) није ограничен одоздо, услед тога што ДДИ може бити и привлачна и одбојна. Стога укупна енергија нема глобални минимум за било коју позитивну вредност јачине ДДИ. Међутим, за јачину интеракције која је мања од критичне могуће је наћи локални минимум овог функционала. Овде скрећемо пажњу и на додатне услове који морају бити испуњени да буду задовољени да би добијено стање могло физички да представља основно стање: $\Sigma_x > \Sigma_y, \Sigma_z$.

Најзгодније је решавати овај проблем у формализму великог канонског ансамбла. Конструирамо велики канонски потенцијал $\Omega = E - \mu N$, где је μ хемијски потенцијал, за број честица N ћемо наметнути нормализациони услов (2.3) кроз хемијски потенцијал. У варијационом рачуну он има улогу Лагранжевог множитеља и број честица је фиксиран условом: $N = -\partial\Omega/\partial\mu$. У великом канонском ансамблу је хемијски потенцијал додатни варијациони параметар поред радијуса из варијационог анзаца, скуп параметара можемо записати као $(\Sigma_i, \sigma_i, \mu)$. Дакле, седам варијационих једначина ћемо добити тако што ћемо први извод великог канонског потенцијала по првих шест параметара изједначити са нулом, а седму једначину добијамо из $N = -\partial\Omega/\partial\mu$, где је вредност N одређена изразом (2.3). Касније ћемо прокоментарисати евентуалну међусобну линеарну зависност варијационих једначина.

2.3.1 Варијациони параметри у импулсном простору

Минимизација великог канонског потенцијала по параметрима Σ_i у импулсном простору, даје следеће једначине:

$$0 = -\frac{1}{8}\mu\sigma_x\sigma_y\sigma_z\Sigma_y\Sigma_z + N\frac{\Sigma_x\hbar^2}{2M} + \frac{c_d N^2}{\bar{\sigma}^3} f_1\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right) \left(-\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}\right), \quad (2.36a)$$

$$0 = -\frac{1}{8}\mu\sigma_x\sigma_y\sigma_z\Sigma_x\Sigma_z + N\frac{\Sigma_y\hbar^2}{2M} + \frac{c_d N^2}{\bar{\sigma}^3} f_1\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right) \left(-\frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right), \quad (2.36b)$$

$$0 = -\frac{1}{8}\mu\sigma_x\sigma_y\sigma_z\Sigma_x\Sigma_y + N\frac{\Sigma_z\hbar^2}{2M} + \frac{c_d N^2}{\bar{\sigma}^3} f_1\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right) \frac{1}{\Sigma_x} + \frac{c_d N^2}{\bar{\sigma}^3} f_2\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right) \frac{1}{\Sigma_y}, \quad (2.36v)$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ означавају изводе анизотропне функције по првом, односно другом аргументу. У све три једначине се експлицитно појављује Лагранжев множитељ μ . Приметимо да ако једначине помножимо редом са Σ_x , Σ_y , Σ_z и саберемо их, можемо изразити хемијски потенцијал преко осталих параметара:

$$\mu = \frac{\hbar^2}{6M} \sum_i \Sigma_i^2. \quad (2.37)$$

Овај израз можемо да уврстимо у једначине (2.36a), (2.36b), (2.36v). Након преуређивања добијамо:

$$\frac{\Sigma_x^2\hbar^2}{2M} = \frac{\hbar^2}{6M} \sum_i \Sigma_i^2 + N\frac{c_d\Sigma_z}{\bar{\sigma}^3\Sigma_x} f_1\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right), \quad (2.38a)$$

$$\frac{\Sigma_y^2\hbar^2}{2M} = \frac{\hbar^2}{6M} \sum_i \Sigma_i^2 + N\frac{c_d\Sigma_z}{\bar{\sigma}^3\Sigma_y} f_2\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right), \quad (2.38b)$$

$$\frac{\Sigma_z^2\hbar^2}{2M} = \frac{\hbar^2}{6M} \sum_i \Sigma_i^2 - N\frac{c_d\Sigma_z}{\bar{\sigma}^3\Sigma_x\Sigma_y} \left[\Sigma_y f_1\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right) + \Sigma_x f_2\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right) \right]. \quad (2.38v)$$

На основу претходног разматрања знамо да су једначине (2.38a) - (2.38v) линеарно зависне, али из њих можемо извести аналитички израз за деформацију Ферми сфере. Прво ћемо искористити особину анизотропне функције да је симетрична у односу на замену аргумената. Одатле следи и симетрија укупне енергије система у односу на замену x - и y - компоненти импулса. Дакле, у импулсном делу функција расподеле задржава цилиндричну симетрију, тј. радијуси расподеле задовољавају $\Sigma_x = \Sigma_y$.

У лимесу $\Sigma_x \rightarrow \Sigma_y$, анизотропна функција постаје ефективно функција једне променљиве и добија следећи облик:

$$f(x, x) = f_s(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 1} \left(1 - \frac{\arctan \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \right) + 1. \quad (2.39)$$

Такође, за изводе анизотропне функције се може показати да важи:

$$\lim_{y \rightarrow x} x f_1(x, y) = \lim_{x \rightarrow y} y f_2(x, y) = -1 + \frac{(2 + x^2) f_s(x)}{2(1 - x^2)}. \quad (2.40)$$

Ако одузмемо једначину (2.38a) од једначине (2.38v), имајући у виду наведене лимесе, добијамо:

$$\frac{\Sigma_x^2 \hbar^2}{2M} \left(1 - \frac{\Sigma_z^2}{\Sigma_x^2} \right) = \frac{3Nc_d}{\bar{\sigma}^3} \frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} f_1 \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right),$$

$$\frac{\Sigma_x^2 \hbar^2}{2M} \left(1 - \frac{\Sigma_z^2}{\Sigma_x^2} \right) = \frac{3Nc_d}{\bar{\sigma}^3} \left[-1 + \frac{\left(2 + \frac{\Sigma_z^2}{\Sigma_x^2} \right) f_s \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} \right)}{2 \left(1 - \frac{\Sigma_z^2}{\Sigma_x^2} \right)} \right]. \quad (2.41)$$

Као што смо на почетку одељка поменули, добили смо једначину која директно осликава деформацију Ферми сфере услед присуства дипол-дипол интеракције. Уочимо још да када искористимо цилиндричну симетрију, услове (2.39) и (2.40) и поново размотримо једначине за параметре у импулсном простору, видимо да су једначине (2.38a) и (2.38б) постале идентичне. Дакле, остају нам једна од ове две једначине и једначина (2.38в) као линеарно независне једначине при минимизацији енергије по параметрима у импулсном простору.

2.3.2 Варијациони параметри у реалном простору

Минимизација великог канонског потенцијала по параметрима у реалном простору σ_i даје следеће једначине:

$$0 = -\frac{1}{8}\mu\sigma_y\sigma_z\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z + \frac{1}{2}NM\sigma_x\omega_x^2 - \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f_1\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_x} - \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_x}, \quad (2.42a)$$

$$0 = -\frac{1}{8}\mu\sigma_x\sigma_z\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z + \frac{1}{2}NM\sigma_y\omega_y^2 - \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f_2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_y} - \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_y}, \quad (2.42b)$$

$$0 = -\frac{1}{8}\mu\sigma_x\sigma_y\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z + \frac{1}{2}NM\sigma_z\omega_z^2 + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f_1\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_x}{\sigma_z^2} + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f_2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_z^2} - \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_z}. \quad (2.42в)$$

Слично као и при минимизацији по импулсним параметрима може се направити линеарна комбинација једначина како бисмо хемијски потенцијал изразили преко осталих параметара. Међутим, еквивалентно је (и значајно једноставније) користити резултат (2.37) добијен у претходном поглављу. Дакле, ако уврстимо тај облик хемијског потенцијала у једначине (2.42a)-(2.42в) и узмемо у обзир симетрију у импулсном простору добићемо:

$$\frac{1}{2}M\sigma_x^2\omega_x^2 = \frac{\hbar^2}{6M}\sum_i\Sigma_i^2 + \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f_1\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_x}{\sigma_z} - \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right) + \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f_s\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}\right), \quad (2.43a)$$

$$\frac{1}{2}M\sigma_y^2\omega_y^2 = \frac{\hbar^2}{6M}\sum_i\Sigma_i^2 + \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f_2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_z} - \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right) + \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f_s\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}\right), \quad (2.43b)$$

$$\frac{1}{2}M\sigma_z^2\omega_z^2 = \frac{\hbar^2}{6M}\sum_i\Sigma_i^2 - \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f_1\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_x}{\sigma_z} - \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right) - \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f_2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_z} + \frac{Nc_d}{\bar{\sigma}^3}f_s\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}\right). \quad (2.43в)$$

Можемо приметити да су варијационе једначине по параметрима у реалном простору међусобно линеарно независне. Линеарним комбиновањем ових једначина, налик ономе што смо урадили у претходном одељку, можемо да добијемо аналитички израз који осликава деформацију гасног облака услед анизотропности ДДИ.

Поглавље 3

Деформација гасног облака и Ферми површи диполног система

3.1 Линеарно независан систем једначина

Имајући у виду да је укупна енергија цилиндрично симетрична функција у импулсном простору дуж x - и y -правца, варијационе једначине имају следећу форму:

$$0 = -\frac{\Sigma_x^2 \hbar^2}{2M} + 2\frac{\Sigma_x^2 \hbar^2}{6M} + \frac{\Sigma_z^2 \hbar^2}{6M} + \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f'_s \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} \right) \frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \quad (3.1a)$$

$$0 = -\frac{\Sigma_z^2 \hbar^2}{2M} + 2\frac{\Sigma_x^2 \hbar^2}{6M} + \frac{\Sigma_z^2 \hbar^2}{6M} - \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f'_s \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} \right) \frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} - \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f'_s \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} \right) \frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \quad (3.1б)$$

$$0 = -\frac{1}{2} M \sigma_x^2 \omega_x^2 + 2\frac{\Sigma_y^2 \hbar^2}{6M} + \frac{\Sigma_z^2 \hbar^2}{6M} + \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f_1 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) \frac{\sigma_x}{\sigma_z} - \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) + \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f_s \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} \right), \quad (3.1в)$$

$$0 = -\frac{1}{2} M \sigma_y^2 \omega_y^2 + 2\frac{\Sigma_y^2 \hbar^2}{6M} + \frac{\Sigma_z^2 \hbar^2}{6M} + \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f_2 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) \frac{\sigma_y}{\sigma_z} - \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) + \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f_s \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} \right), \quad (3.1г)$$

$$0 = -\frac{1}{2} M \sigma_z^2 \omega_z^2 + 2\frac{\Sigma_y^2 \hbar^2}{6M} + \frac{\Sigma_z^2 \hbar^2}{6M} - \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f_1 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) \frac{\sigma_x}{\sigma_z} - \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) - \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f_2 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) \frac{\sigma_y}{\sigma_z} + \frac{c_d N}{\bar{\sigma}^3} f_s \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} \right). \quad (3.1д)$$

Након алгебарске провере примећујемо да су ове једначине линеарно зависне. Ако елиминишемо прву једначину и додамо нормализациони услов (2.3), добијамо систем од пет једначина са пет непознатих. У следећем одељку ћемо овај систем једначина написати у бездимензионој форми и онда га нумерички решити.

3.2 Једначине у бездимензионој форми

Да бисмо систем једначина са пет варијационих параметара лакше решавали прво ћемо га написати у бездимензионој форми. То ћемо постићи тако што ћемо сваки радијус изразити преко радијуса расподеле за неинтерагујући гас. Бездимензиони радијуси су: $\Sigma'_i = \Sigma_i / \Sigma_0$, $\sigma'_i = \sigma_i / \sigma_{i0}$, где је σ_{i0} карактеристична величина гасног облака у правцу i

дефинисана по узору на класични аналогон честице у замци фреквенције ω_i са укупном енергијом $E_F = \hbar\bar{\omega} (6N)^{1/3}$:

$$\sigma_{i0} = \sqrt{\frac{2E_F}{M\omega_i^2}}. \quad (3.2)$$

Слично, за карактеристичну скалу у импулсном простотру узели смо импулс слободне честице са укупном енергијом E_F :

$$\Sigma_0 = \sqrt{\frac{2ME_F}{\hbar^2}}. \quad (3.3)$$

Бездименциони систем једначина ћемо формирати од нормализационог услова, заједно са четири независне варијационе једначине:

$$0 = 6 \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \Sigma_y'^2 \Sigma_z' - 1, \quad (3.4a)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (\Sigma_z'^2 - \Sigma_y'^2) + \varepsilon_{dd} b \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} f_{s2} \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right), \quad (3.4b)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (3\sigma_x'^2 - \Sigma_z'^2 - 2\Sigma_y'^2) - \varepsilon_{dd} b \left[f_s \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x} f_1 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right], \quad (3.4b)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (-3\sigma_y'^2 + \Sigma_z'^2 + 2\Sigma_y'^2) - \varepsilon_{dd} b \left[f_s \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} f_1 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right], \quad (3.4g)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (-3\sigma_z'^2 + 2\Sigma_z'^2 + \Sigma_y'^2) - \varepsilon_{dd} b \left[f_s \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x} f_1 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} f_2 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right], \quad (3.4d)$$

где је број $b = 6^{1/6}/(192\sqrt{\pi})$. Приметимо да су ове једначине не само бездименционе, него њихова форма не зависи од врсте атома или молекула који се изучавају. Овај скуп једначина представља значајан резултат, који нам открива универзалност особина основног стања дипола квантно дегенерисаног Ферми гаса. Три физичка параметра од којих зависе једначине су: два односа фреквенција ω_z/ω_x , ω_z/ω_y и релативна јачина ДДИ ε_{dd} . Она је одређена односом енергије ДДИ и карактеристичне енергије система, што је код нас Ферми енергија:

$$\varepsilon_{dd} = \frac{\bar{V}_{dd}}{E_F} = \frac{NC_{dd}/(4\pi a^3)}{6^{1/3}N^{1/3}\hbar\bar{\omega}} = \frac{d^2}{4\pi\varepsilon_0} \sqrt{\frac{M^3}{\hbar^5}} (\omega_x \omega_y \omega_z N)^{1/6} \quad (3.5)$$

Овде је узето да је карактеристична дужина система a пропорционална дужини хармонијског осцилатора фреквенције $\bar{\omega}$: $a = N^{1/6}a_{ho} = N^{1/6}\sqrt{\hbar/M\bar{\omega}}$. Ово је уобичајена дефиниција релативне јачине ДДИ [12, 20]. Приметимо да је зависност од средње фреквенције и од броја честица иста, односно $\varepsilon_{dd} \sim (\omega_x \omega_y \omega_z N)^{1/6}$. Како је у експерименту много једноставније контролисано мењати фреквенцију хармонијске замке него број честица у систему, у свим разматрањима ћемо се бавити утицајем геометрије на повећање, односно смањење ефеката дипол-дипол интеракције на наш систем. Напомињемо да ћемо у даљем раду подразумевати да су радијуси σ_i и импулси Σ_i изражени у јединицама σ_{i0} и Σ_0 и нећемо писати промове.

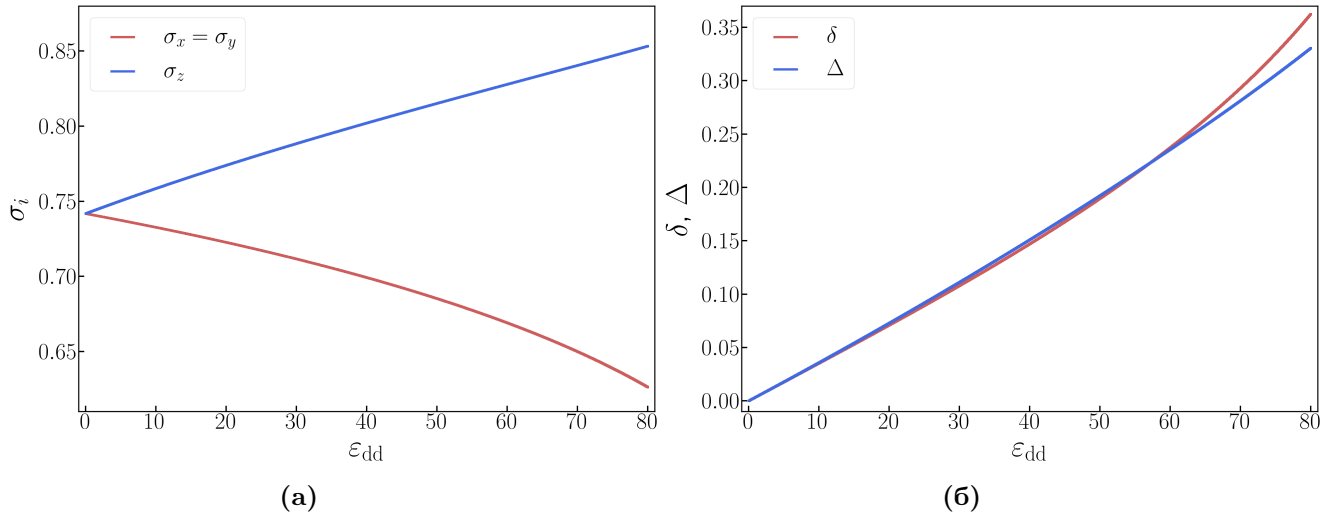
3.3 Деформација гасног облака

У овом поглављу ћемо размотрити понашање диполног Ферми гаса у коме су диполи оријентисани дуж z -осе у различитим конфигурацијама замке. Ове конфигурације су побројане у табели 3.1. Први случај представља Ферми гас у сферној замци, други и трећи случај одговарају геометрији диска, а случајеви 4 и 5 одговарају замкама издуженим у једном правцу.

Табела 3.1. Различите конфигурације замке за које ћемо испитати деформације гасног облака и Ферми површи у зависности од релативне јачине дипол-дипол интеракције.

Случај	Облик замке	Фреквенције замке
1	сфера	$\omega_x = \omega_y = \omega_z$
2	диск у x - y равни	$10 \omega_x = 10 \omega_y = \omega_z$
3	диск у x - z равни	$10 \omega_x = \omega_y = 10 \omega_z$
4	цилиндар дуж z осе	$\omega_x = \omega_y = 10 \omega_z$
5	цилиндар дуж y осе	$\omega_x = 10 \omega_y = \omega_z$

На слици 3.1(а) су приказани резултати које смо добили за зависност радијуса гасног облака од релативне јачине интеракције за случај 1 из табеле 3.1. Може се уочити да у граничном случају, када јачина интеракција тежи нули, сви радијуси теже истој вредности, што одговара неинтерагујућем случају ($\epsilon_{dd} = 0$). Повећавајући јачину интеракције, σ_z се монотонно повећава (плава крива), док се σ_x и σ_y монотно смањују (црвена крива), и једнаке су јер је цилиндрична симетрија одржана у x - y равни. Дакле, дипол-дипол интеракција, као што је и очекивано, изазива издужење гасног облака дуж осе оријентације дипола.



Слика 3.1. Случај 1 - (а) Зависност радијуса (у бездимензионим јединицама) у реалном простору од релативне јачине интеракције; (б) Деформација гасног облака δ и Ферми сфере Δ у зависности од релативне јачине интеракције.

Дефинишимо деформацију гасног облака као разлику у односу радијуса дуж различитих праваца у интерагујућем и неинтерагујућем случају:

$$\delta = \frac{\sigma_z}{\sigma_x} - 1. \quad (3.6)$$

Овде скрећемо пажњу да су радијуси σ_i изражени у јединицама неинтерагујућег система, па је због тога и њихов однос једнак јединици за $\epsilon_{dd} = 0$. У физичким јединицама би овај

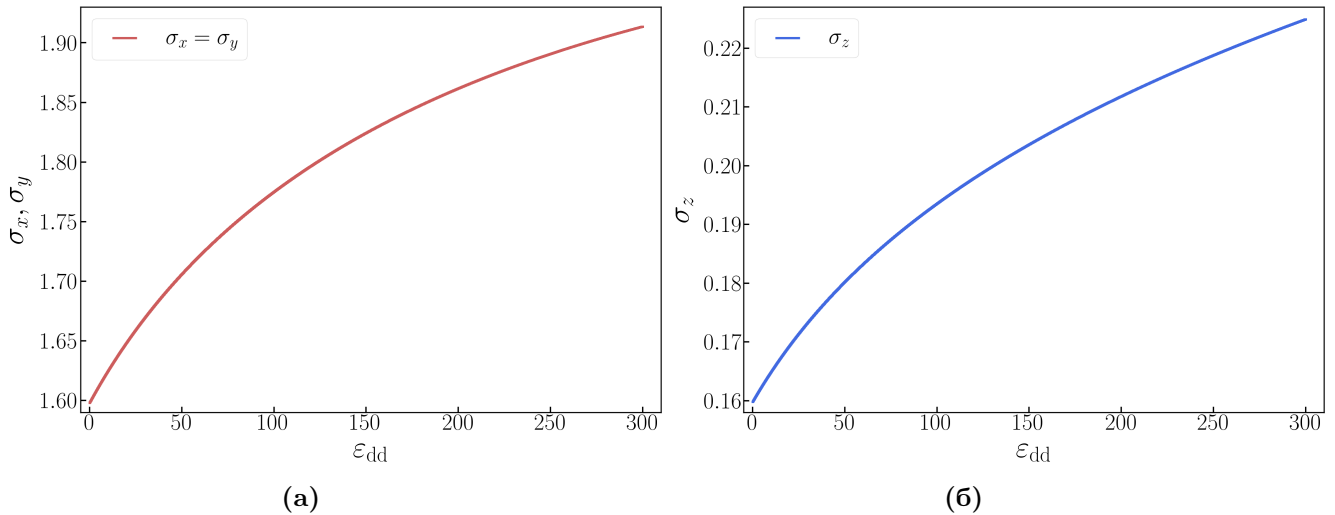
однос био $\sigma_{z0}/\sigma_{x0} = \omega_x/\omega_z$.

Иако смо деформацију Ферми сфере већ и аналитички изразили, овде ћемо овај ефекат мало детаљније проучити. Аналогно изразу (3.6) за δ , деформацију Ферми сфере дефинисаћемо као:

$$\Delta = \frac{\Sigma_z}{\Sigma_x} - 1. \quad (3.7)$$

На слици 3.1(б) графички смо представили зависност деформације гасног облака и Ферми површи у односу на релативну јачину интеракције. Видимо да се и деформација гасног облака δ репрезентована црвеном кривом и деформација Ферми површи Δ репрезентована плавом кривом при малим јачинама интеракције повећавају линеарно са ε_{dd} и једнаке су, док за веће вредности релативне јачине интеракције ($\varepsilon_{dd} \sim 60$) деформација облака постаје израженија од деформације Ферми површи и њен раст постаје нелинеаран. Нагло сужавање гасног облака око ове вредности јачине интеракције могли смо приметити и на графику 3.1(а), посматрајући црвену криву, која одговара опадању дужине радијуса у x - y равни.

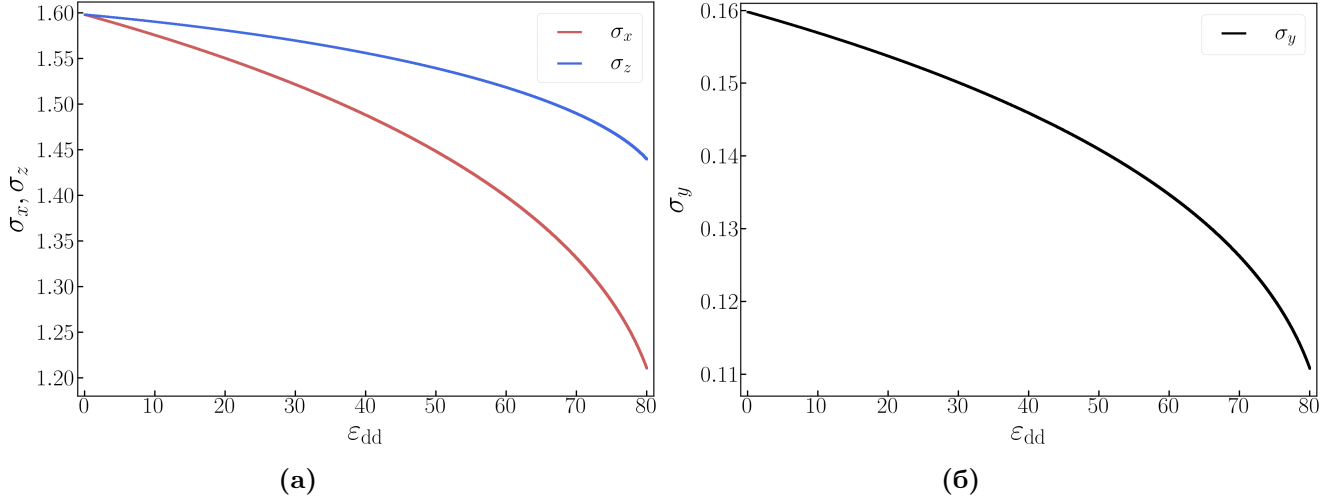
На сликама 3.2(а) и 3.2(б) су представљени резултати добијени у случају 2 из табеле 3.1 за радијусе у реалном простору. Можемо да приметимо да се, за разлику од случаја 1, са повећањем јачине интеракције сви радијуси монотонно повећавају. Овај резултат смо могли да претпоставимо водећи се физичком интуицијом. Наиме, у овој конфигурацији диполи се највећим делом налазе један поред другог и сви су усмерени дуж z -осе, што нам говори да се због природе ДДИ углавном одбијају, а то доводи до ширења облака. Као што је и очекивано, ширење је израженије дуж x - и y -осе, слика 3.2(а), него дуж z -осе, слика 3.2(б). Радијуси σ_x и σ_y остају међусобно једнаки са повећањем ε_{dd} , јер је и у овој конфигурацији одржана цилиндрична симетрија замке.



Слика 3.2. Случај 2 - Зависност радијуса (а) $\sigma_x = \sigma_y$ и (б) σ_z у реалном простору од релативне јачине интеракције.

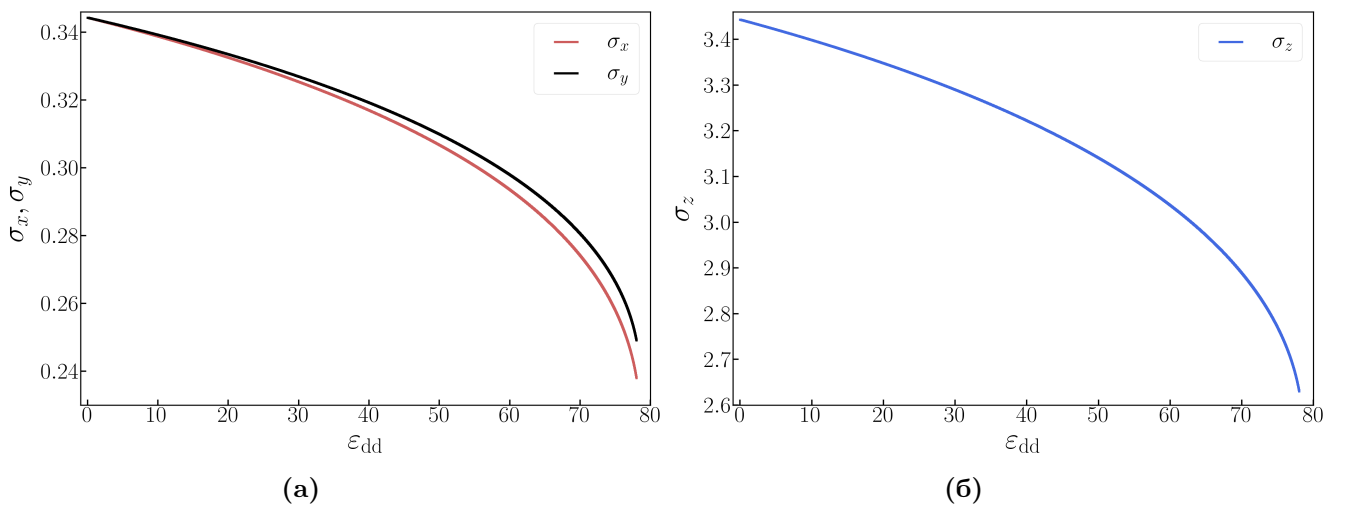
За случај 3 из табеле 3.1, када је замка облика диска сабијеног дуж y -осе, добијамо криве приказане на сликама 3.3(а) и 3.3(б). У оваквој замци диполи су распоређени углавном један изнад другог, тако да се повећањем интеракције повећава и привлачење међу диполима и облак гаса се сабија. Сабијање је најизраженије дуж z -осе (плава крива), а најслабије дуж y -осе (црна крива). Може се уочити да је због нарушавања симетрије замке понашање

радијуса σ_x и σ_y различито. Додатно, можемо да проценимо критичну вредност релативне јачине интеракције (ε_{dd}^c), након које ($\varepsilon_{dd} > \varepsilon_{dd}^c$) систем једначина (3.4а)-(3.4д) престаје да има стабилно стационарно решење. У овом случају нестабилност система се појављује на вредностима јачине интеракције $\varepsilon_{dd}^c \gtrsim 80$. Користећи релацију (3.5), за одређену врсту атома или молекула и за задати број честица у систему може се наћи и критични диполни момент d^c .



Слика 3.3. Случај 3 - Зависност радијуса (а) σ_x , σ_z и (б) σ_y у реалном простору од релативне јачине интеракције.

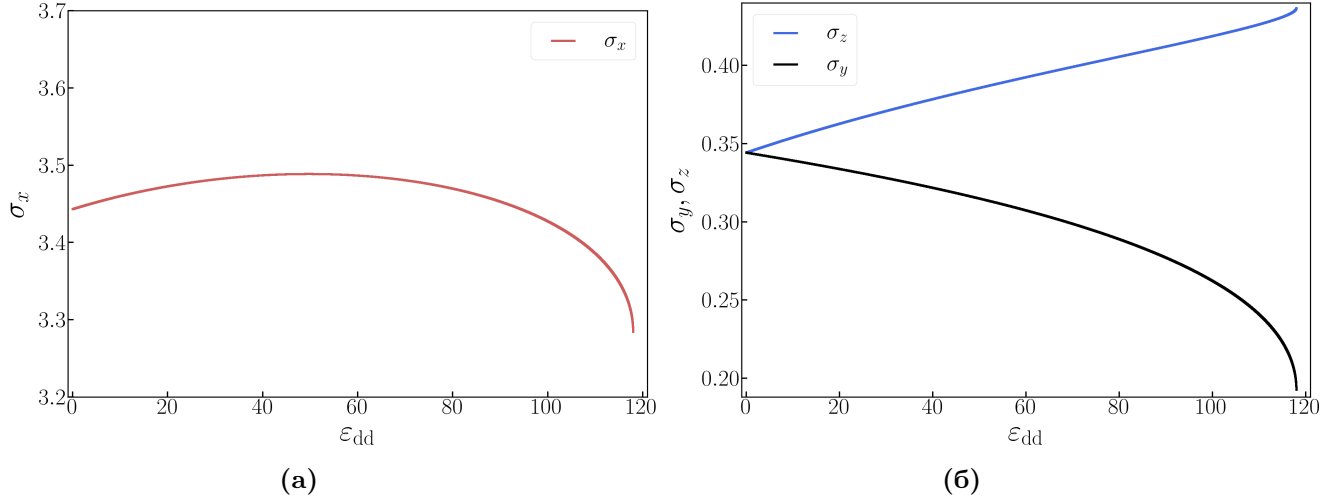
Испоставља се да и у случају 4, када је реч о замци издуженој у z -правцу, добијамо слично понашање радијуса са повећањем ε_{dd} . На сликама 3.4(а) и 3.4(б) приказане су зависности на којима је сужавање облака још израженије, јер се анизотропија која потиче од интеракције и анизотропија замке поклапају. Дакле, геометрија замке може да доведе до појачања ефеката који потичу од ДДИ. Налик претходном примеру и овде можемо очитати вредност критичне јачине интеракције ($\varepsilon_{dd}^c \approx 78$).



Слика 3.4. Случај 4 - Зависност радијуса (а) σ_x , σ_y и (б) σ_z у реалном простору од релативне јачине интеракције.

На крају ћемо размотрити случај 5, у коме је замка издужена у y -правцу. На слици 3.5(а) видимо да се радијус σ_x немонотонно мења, међутим апсолутна промена вредности је врло

мала. На слици 3.5(б) приказане су зависности друга два радијуса, при чему плава крива описује монотони раст радијуса σ_z , док црна крива представља монотонно опадање радијуса σ_y . Можемо и у овом случају наћи вредност критичне јачине интеракције ($\varepsilon_{\text{dd}}^c \approx 118$). Дакле, у овој геометрији је систем на већим релативним јачинама интеракције стабилан.



Слика 3.5. Случај 5 - Зависности радијуса (а) σ_x и (б) σ_y, σ_z у реалном простору од релативне јачине интеракције.

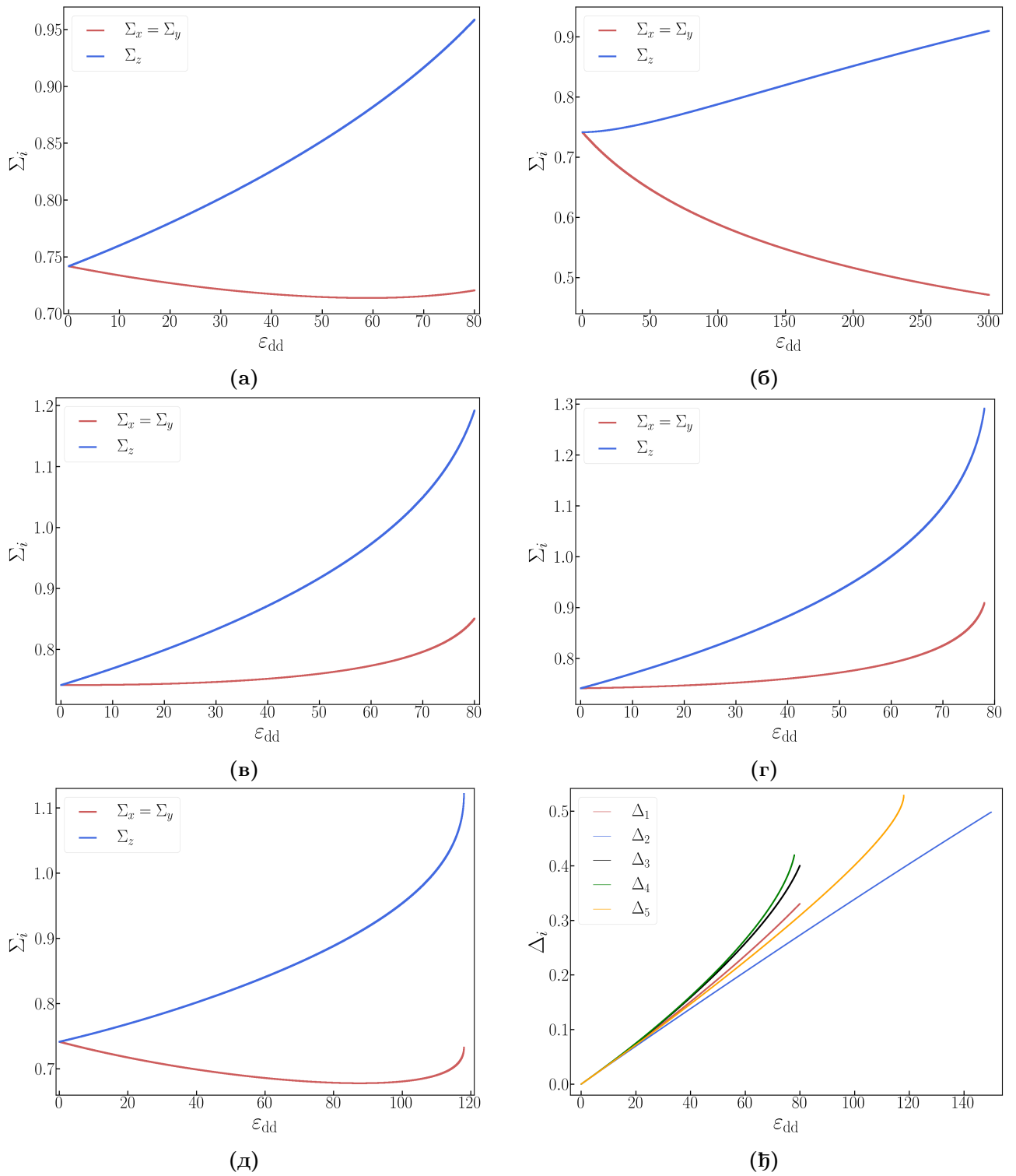
На овом месту можемо се осврнути на резултате из поглавља 3 рада [12]. Иако је у том раду коришћен анзац који је физички прилагођенији квантно дегенерисаном диполном Ферми систему, сви квалитативни закључци остају исти и у случају Гаусовог анзаца који смо овде користили.

3.4 Деформација Ферми површи

Пре него што кренемо са анализом резултата које смо добили за деформацију Ферми површи, хтели бисмо да нагласимо због чега је важно разумевање механизма који је одговоран за ову појаву. Као што је већ речено, Фоков изменски члан за ДДИ доводи до издуживања расподеле у импулсном простору. Последица овог издуживања је и промена суперфлуидног спаривања, јер је густина стања у околини Ферми површи модификована. На пример, у раду [24] је у Хартри-Фок-Богољубов формализму испитиван ансамбл ултрахладних поларисаних фермиона. Нађен је анизотропни параметар поретка и критична температура. Показано је да се за мале вредности јачине ДДИ у поларним молекулама може добити висока критична температура за суперфлуидност .

У овој секцији размотрићемо резултате добијене решавањем система једначина (3.4а)-(3.4д), на основу којих се види како се Ферми сфера деформише у елипсоид у зависности од релативне јачине ДДИ за различите геометрије замке. Битно је нагласити да анизотропија хармонијског потенцијала не утиче на радијусе расподеле у импулсном простору. Једнакост $\Sigma_x = \Sigma_y$ ће важити све док у следећем поглављу не узмемо у обзир и интеракцију дуж још једне осе и не нарушимо цилиндричну симетрију у импулсном простору.

На скупу слика 3.6 су приказане зависности импулса Σ_i у импулсном простору (у јединицама импулса за неитерагујући случај Σ_0) од релативне јачине интеракције. Плава крива на свим графицима представља понашање Σ_z , док црвена представља $\Sigma_x (= \Sigma_y)$.



Слика 3.6. Зависности импулса у импулсном простору од релативне јачине интеракције. (а) Случај 1 - Сферно симетрична замка. (б) Случај 2 - замка у облику диска у x - y равни. (с) Случај 3 - замка у облику диска у x - z равни. (д) Случај 4 - замка издужена дуж z -осе. (е) Случај 5 - замка издужена дуж y -осе. (ђ) Зависност деформације у импулсном простору од релативне јачине интеракције за све случајеве.

На слици 3.6(а), на којој су приказани резултати у случају 1, видимо да импулс Σ_z монотонно расте, док је зависност по којој се мењају преостала два радијуса немонотона, при чему је однос импулса $\Sigma_z/\Sigma_x > 1$.

Резултати за случај 2 се налазе на слици 3.6(б). Видимо да импулс Σ_z расте монотонно, док Σ_x и Σ_y монотонно опадају.

У случају 3 добију се резултати, приказани на слици 3.6(в). Примећујемо да сви импулси расту, при чему све време важи $\Sigma_z/\Sigma_x > 1$. Сличан закључак се може добити посматрајући график 3.6(г), који се односи на случај 4. Можемо да приметимо да су зависности по којој се понашају импулси на слици 3.6(г) ипак стрмије. То је последица поклапања анизотропије ДДИ и анизотропије замке. Дакле, као и у реалном простору геометрија система може да појача ефекте који потичу од ДДИ.

Резултати за случај 5 представљени су на слици 3.6(д). Раст импулси Σ_z је монотон и након одређене јачине интеракције постаје веома изражен, док је понашање Σ_x и Σ_y немонотонно. Нагласимо да се у овом случају, као и у осталим, може проценити критична вредност релативне јачине ДДИ. Вредности $\varepsilon_{\text{dd}}^c$ су исте као за одговарајући случај у претходној секцији 3.3 што показује конзистентност добијеног система једначина.

На слици 3.6(ђ) приказали смо зависности деформација Ферми површи у односу на релативну јачину ДДИ у свих пет разматраних геометрија. Као што је већ речено раније, деформација Δ_4 за случај 4 је најоштрија функција релативне јачине ДДИ. Оваква анализа омогућава избор геометрије која у експерименталним условима максимизује ефекте присуства ДДИ, што је од великог значаја за мерење последица анизотропије и утицаја квантне статистике.

Поглавље 4

Енергија двоструко диполног система

У овом мастер раду надаље ћемо се бавити питањем шта се дешава са двоструко диполним системом у коме градивни атоми или молекули поседују две врсте диполних момената, електричне и магнетне. Различите врсте диполних момената могу независно да се оријентишу, па ћемо претпоставити да су магнетни диполи оријентисани дуж x -осе, а електрични диполи дуж z -осе. Овде ћемо размотрити како ће се гасни облак и Ферми површ деформисати у зависности од односа интензитета ове две врсте интеракције (електричне и магнетне ДДИ). Истраживање оваквих система мотивисао је брз развој експерименталних техника у области ултрахладних диполних гасова последњих година и могућност да се у скорој будућности реализују двоструко диполни системи ултрахладних фермиона. Додатни степен слободе на значајан начин повећава могућности за контролу особина оваквих система и квантних технологија, односно онога што се на енглеском језику назива quantum toolbox.

4.1 Укупна енергија система

Аналогно изразима за укупну енергију система у случају са једном интеракцијом, изрази (2.34) и (2.35), можемо написати чланове за укупну енергију у случају када у обзир узимамо и електричну и магнетну ДДИ у следећем облику:

$$E = E_k + E_U + E_h^e + E_f^e + E_h^m + E_f^m. \quad (4.1)$$

Последња два члана у горњем изразу обележена су индексом m и означавају Хартријев и Фоков члан за магнетну ДДИ. У следећим секцијама детаљно ћемо израчунати енергетски допринос ова два члана у случају када магнетне диполе усмеримо нормално на електричне диполе.

4.2 Директан (Хартри) члан за магнетну ДДИ

Подсетимо се да је општи облик за интеракциони потенцијал између два дипола поларисана дуж ортова \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 :

$$V_{dd}^m(r) = \frac{C_{dd}^m}{4\pi} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{r}^2 - 3(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^5}, \quad (4.2)$$

где је $C_{dd}^m = \mu_0 m^2$. Као што смо већ поменули, подразумеваћемо да су магнетни диполни

моменти оријентисани дуж x -осе, стога потенцијал (4.2) добија следећи облик:

$$V_{\text{dd}}^m(r) = \frac{C_{\text{dd}}^m}{4\pi} \frac{\mathbf{r}^2 - 3(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r})^2}{|\mathbf{r}|^5}, \quad (4.3)$$

Већ смо раније уочили да нам је у рачуну неопходан Фурије трансформ овог потенцијала. Он се може написати у следећем облику:

$$\tilde{V}_{\text{dd}}^m(\mathbf{k}) = \frac{C_{\text{dd}}^m}{3} \left(\frac{3(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} - 1 \right). \quad (4.4)$$

Цео рачун у овом делу биће аналоган рачуну из поглавља 2. Једина разлика настаје када дође до решавања интеграла чију подинтегралну функцију чини потенцијал (4.4). Раније смо уз погодне смене тај интеграл свели на добро познату анизотропну функцију. Размотримо сада пажљивије интеграл који се добија у овом случају:

$$\iiint dq_x dq_y dq_z \left(\frac{3\left(\frac{q_x}{\sigma_x}\right)^2}{\left(\frac{q_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{q_y}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{q_z}{\sigma_z}\right)^2} - 1 \right).$$

Ако као раније уведемо смену са Декартових на сферне координате: $q_x = k \sin \theta \cos \phi$, $q_y = k \sin \theta \sin \phi$, $q_z = k \cos \theta$ и за Јакобијан трансформације искористимо $J = k^2 \sin \theta$, након сређивања, угаони део интеграла постаје:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\frac{3\sigma_y^2 \sigma_z^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 \cos^2 \theta + \sigma_z^2 (\sigma_y^2 \cos^2 \phi + \sigma_x^2 \sin^2 \phi)} \sin^2 \theta - 1 \right). \quad (4.5)$$

Уколико уведемо нове ознаке: $x = \sigma_x/\sigma_z$, $y = \sigma_y/\sigma_z$ и дефинишемо помоћну функцију $f_{Ax}(x, y)$ као:

$$f_{Ax}(x, y) = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{3y^2 \cos^2 \phi}{x^2 y^2 \cos^2 \theta + (y^2 \cos^2 \phi + x^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta}, \quad (4.6)$$

тада можемо да решимо интеграл по углу ϕ . Притом ћемо интегралити у границама од 0 до $\pi/2$ и резултат помножити са 4. То је могуће јер је функција π -периодична и симетрична у односу на $\pi/2$. На овај начин се добија:

$$\begin{aligned} f_{Ax}(x, y) &= 1 - \frac{1}{4\pi} \propto 12 y^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \frac{\pi \left(1 - \sqrt{\frac{x^2 y^2 \cos^2 \theta + x^2 \sin^2 \theta}{x^2 y^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta}} \right)}{2 (y^2 \sin^2 \theta - x^2 \sin^2 \theta)} \\ &= 1 - \frac{3 y^2}{2 (y^2 - x^2)} \left(2 - 2 \frac{x}{y} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \sqrt{\frac{y^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{x^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \right) \\ &= 1 - \frac{3 y^2}{(y^2 - x^2)} \left(1 - \frac{x}{y} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \sqrt{\frac{1-\kappa^2 t^2}{1-t^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

где су $\vartheta_x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ и $\kappa^2 = (1-y^2)/(1-x^2)$. Користећи симетричност у односу на $\pi/2$ преполовили смо интервал интеграције, а на прелазу из другог у трећи ред увели смо смену: $t = \cos \theta \sqrt{1-x^2}$. Скрећемо пажњу да ову смену можемо да уведемо само под условом

$0 < x^2 < 1$, док на другим интервалима вредности параметра x морамо аналитички да продужимо ову функцију. Најзад, користећи дефиниције елиптичких интеграла из референце [23] добијамо помоћну функцију у облику:

$$f_{Ax}(x, y) = \frac{3y^2}{(x^2 - y^2)} \left(1 - \frac{x}{y\sqrt{1-x^2}} E(\vartheta_x, \kappa) \right) + 1. \quad (4.8)$$

Уколико искористимо овај резултат, директан члан је:

$$E_h^m = -\frac{N^2 C_{dd}^m}{96\sqrt{2}\pi^{3/2}\bar{\sigma}} f_{Ax} \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right). \quad (4.9)$$

4.3 Изменски (Фоков) члан за магнетну ДДИ

Коначно, за Фоков члан можемо искористити аналогиче са свим до сада урађеним у поглављу 3 и у секцији 4.2, на основу чега следи:

$$E_f^m = \frac{N^2 C_{dd}^m}{96\sqrt{2}\pi^{3/2}\bar{\sigma}} f_{Ax} \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right). \quad (4.10)$$

Као што смо могли очекивати, у последња два члана изгубили смо цилиндричну симетрију. Раније је сисмтем био цилиндрично симетричан око z -осе, а магнетна ДДИ има цилиндричну симетрију око x -осе, па укупно губимо те симетрије. Дакле, изменски члан је сада мало компликованија функција у односу на поједностављену симетричну форму анизотропне функције, коју смо раније користили.

Посебну пажњу морамо да обратимо на аргументе помоћне функције f_{Ax} . Као што је већ поменуто, однос јачина интеракције за електричне и магнетне диполе је типично $C_{dd}^e/C_{dd}^m \sim 1/\alpha_s^2 \sim 10^4$. Дакле, електрична интеракција је значајно јача од магнетне, стога у грубој анализи очекујемо веће издужење у правцу z -осе него у правцу x -осе, док дуж y -осе не очекујемо издужење на директан начин иако ће до њега доћи на индиректан начин, због промене облика гасног облака. На основу овога очекујемо да аргументи помоћне функције у импулсном простору буду већи од јединице. С обзиром да рачун из секције 4.3 одговара ситуацији када су аргументи функције мањи од 1, а у спроведеној анализи смо закључили да ће наши аргументи бити већи од јединице, и то други већи од првог, морамо аналитички да продужимо функцију $f_{Ax}(x, y)$ на случај $y > x > 1$, користећи табелу (8.127) из референце [23].

Потребне су нам следеће везе:

$$\kappa_1 = \frac{\kappa'}{i\kappa}, \quad \sin \vartheta_1 = -\frac{i\kappa \sin \vartheta}{\Delta \vartheta}, \quad \cos \vartheta_1 = \frac{1}{\Delta \vartheta}. \quad (4.11)$$

Примењујући ове смене уз додатне алгебарске трансформације добијамо:

$$f_{Ax}(x, y) = \frac{x^4 - x^2 - 4x^2y^2 + y^2}{(x^2 - y^2)(x^2 - 1)} + \frac{3xy}{(x^2 - y^2)} \left(\frac{\sqrt{y^2 - 1}}{x^2 - 1} E(\vartheta_1, \kappa_1) - \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} F(\vartheta_1, \kappa_1) \right), \quad (4.12)$$

где су нови аргументи елиптичких интеграла $\kappa_1^2 = (y^2 - x^2)/(y^2 - 1)$ и $\vartheta_1 = \arcsin \sqrt{y^2 - 1}/y$.

4.4 Минимизација енергије

Користећи резултате добијене у претходне две секције, укупна енергија многочестичног система двоструко диполних фермиона у случају када су њихови електрични диполи оријентисани дуж z -осе, а магнетни дуж x -осе је:

$$E_{\text{uk}} = \frac{N}{2} \left(\sum_i \frac{\hbar^2 \Sigma_i^2}{2M} + \frac{M}{2} \sum_i \sigma_i^2 \omega_i^2 \right) + N^2 \frac{c_d^e}{\bar{\sigma}} \left[f \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right) - f \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) \right] + N^2 \frac{c_d^m}{\bar{\sigma}} \left[f_{Ax} \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right) - f_{Ax} \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \right) \right]. \quad (4.13)$$

где су $c_d^e = C_{\text{dd}}^e / (96\sqrt{2}\pi^{3/2})$ и $c_d^m = C_{\text{dd}}^m / (96\sqrt{2}\pi^{3/2})$. Овде наглашавамо да је и Фоков члан за електричну дипол-дипол интеракцију захтевао аналитичко продужење анизотропне функције, које добијамо користећи трансформације (8.127) из референце [23]:

$$f(x, y) = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} + \frac{3xy}{(x^2 - 1)\sqrt{y^2 - 1}} E(\vartheta_1, \kappa_1). \quad (4.14)$$

Аргументи елиптичког интеграла κ_1 и ϑ_1 су уведени на исти начин као у секцији 4.3.

4.4.1 Варијациони параметри у импулсном простору

С обзиром да користимо формализам великог канонског ансамбла, дефинисаћемо велики канонски потенцијал $\Omega = E_{\text{uk}} - \mu N$, израчунати његове изводе по варијационим параметрима и изједначити их са нулом да бисмо добили варијационе једначине. Потражимо прво изводе по импулсима Σ_i :

$$0 = -\frac{1}{8}\mu \sigma_x \sigma_y \sigma_z \Sigma_y \Sigma_z + \frac{N\hbar^2}{2M} \Sigma_x - \frac{N^2 c_d^e}{\bar{\sigma}^3} \frac{\Sigma_z}{\Sigma_x^2} f_1 \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right) - \frac{N^2 c_d^m}{\bar{\sigma}^3} \frac{\Sigma_z}{\Sigma_x^2} f_{Ax1} \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right), \quad (4.15)$$

$$0 = -\frac{1}{8}\mu \sigma_x \sigma_y \sigma_z \Sigma_x \Sigma_z + \frac{N\hbar^2}{2M} \Sigma_y - \frac{N^2 c_d^e}{\bar{\sigma}^3} \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y^2} f_2 \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right) - \frac{N^2 c_d^m}{\bar{\sigma}^3} \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y^2} f_{Ax2} \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right), \quad (4.16)$$

$$0 = -\frac{1}{8}\mu \sigma_x \sigma_y \sigma_z \Sigma_x \Sigma_y + \frac{N\hbar^2}{2M} \Sigma_z + \frac{N^2 c_d^e}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{\Sigma_x} f_1 \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right) + \frac{N^2 c_d^e}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{\Sigma_y} f_2 \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right) + \frac{N^2 c_d^m}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{\Sigma_x} f_{Ax1} \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right) + \frac{N^2 c_d^m}{\bar{\sigma}^3} \frac{1}{\Sigma_y} f_{Ax2} \left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} \right). \quad (4.17)$$

Поново можемо направити линеарну комбинацију ових једначина како бисмо хемијски потенцијал изразили преко осталих варијационих параметара. Тако добијамо исту везу (2.37) као и раније. Ако покушамо сада да одузмемо прву од треће једначине, добићемо компликован израз који се због нарушења цилиндричне симетрије не може свести на једноставну везу која открива деформацију Ферми површи. То значи да овог пута морамо прећи читав пут до решавања једначина како бисмо извукли закључак о облику Ферми површи.

Уочимо да су варијациони параметри у овом случају сва три импулса Σ_i у импулсном простору, пошто више нема цилиндричне симетрије.

4.4.2 Варијациони параметри у реалном простору

Изводи великог канонског потенцијала по радијусима у реалном простору нам дају следеће једначине:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{8}\mu\sigma_y\sigma_z\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z + \frac{1}{2}NM\sigma_x\omega_x^2 - \frac{N^2c_d^e}{\bar{\sigma}^3}f_1\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} + \frac{N^2c_d^e}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_x} \\
& - \frac{N^2c_d^e}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_x} - \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax1}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} \\
& + \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_x} - \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax}\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_x},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{8}\mu\sigma_x\sigma_z\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z + \frac{1}{2}NM\sigma_y\omega_y^2 - \frac{N^2c_d^e}{\bar{\sigma}^3}f_2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} + \frac{N^2c_d^e}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_y} \\
& - \frac{N^2c_d^e}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_y} - \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax2}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} \\
& + \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_y} - \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax}\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_y},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{8}\mu\sigma_x\sigma_y\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_z + \frac{1}{2}NM\sigma_z\omega_z^2 + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f_1\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_x}{\sigma_z^2} + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} \\
& + \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f_2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_z^2} - \frac{N^2c_d}{\bar{\sigma}^3}f\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_z} \\
& + \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax1}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_x}{\sigma_z^2} + \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{1}{\sigma_z} \\
& + \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax2}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_z^2} - \frac{N^2c_d^m}{\bar{\sigma}^3}f_{Ax}\left(\frac{\Sigma_z}{\Sigma_x}, \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y}\right)\frac{1}{\sigma_z}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ове три једначине су линеарно независне. Можемо их искористити да изразимо Лагранжев множитељ, али то није неопходно с обзиром да је израз еквивалентан већ раније добијеном, а рачун је знатно компликованији.

Уочимо да су варијациони параметри и у овом случају сва три радијуса у реалном простору.

4.5 Деформације гасног облака и Ферми површи двоструко диполног система

4.5.1 Једначине у бездимензионој форми

На исти начин као у претходном поглављу прећи ћемо на бездимензиону форму једначина. Тада систем изгледа овако:

$$0 = 6 \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \Sigma_y'^2 \Sigma_z' - 1, \quad (4.21a)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (\Sigma_y'^2 + \Sigma_z'^2 - 2\Sigma_x'^2) + \varepsilon_{dd} b \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'} f_1 \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right), \quad (4.21b)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (\Sigma_x'^2 - 2\Sigma_y'^2 + \Sigma_z'^2) + \varepsilon_{dd} b \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} f_2 \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right), \quad (4.21b)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (3\sigma_x'^2 - \Sigma_x'^2 - \Sigma_y'^2 - \Sigma_z'^2) - \varepsilon_{dd} b \left(f \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x} f_1 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right) - \varepsilon_{dd}^m b \left(f_{Ax} \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f_{Ax} \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x} f_{1Ax} \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right), \quad (4.21\Gamma)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (3\sigma_y'^2 - \Sigma_x'^2 - \Sigma_y'^2 - \Sigma_z'^2) - \varepsilon_{dd} b \left(f \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} f_2 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right) - \varepsilon_{dd}^m b \left(f_{Ax} \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f_{Ax} \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} f_{Ax2} \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right), \quad (4.21\Delta)$$

$$0 = \bar{\sigma}' (3\sigma_z'^2 - \Sigma_x'^2 - \Sigma_y'^2 - \Sigma_z'^2) - \varepsilon_{dd} b \left(f \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) - \frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x} f_1 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} f_2 \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right) - \varepsilon_{dd}^m b \left(f_{Ax} \left(\frac{\Sigma_z'}{\Sigma_x'}, \frac{\Sigma_z'}{\Sigma_y'} \right) - f_{Ax} \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) + \frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x} f_{Ax1} \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) - \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} f_{Ax2} \left(\frac{\sigma'_x \omega_z}{\sigma'_z \omega_x}, \frac{\sigma'_y \omega_z}{\sigma'_z \omega_y} \right) \right), \quad (4.21\text{ђ})$$

где је $b = 6^{1/6}/(192\sqrt{\pi})$, а ε_{dd}^m је релативна јачина магнетне интеракције. Битно је запазити да код двоструко диполних система имамо смањену симетрију укупне енергије, односно можемо да очекујемо да су сва три импулса различита у општем случају. Као што можемо да приметимо овде смо користили само прву и другу једначину у импулсном простору, јер се њиховим сабирањем може добити изостављена једначина. У реалном простору су све једначине линеарно независне. Дакле, имамо пет једначина као и услов за фиксирање броја честица (4.21a). Решавањем овог система добијамо свих шест варијационих параметара.

4.5.2 Гранична вредност мале јачине електричне ДДИ

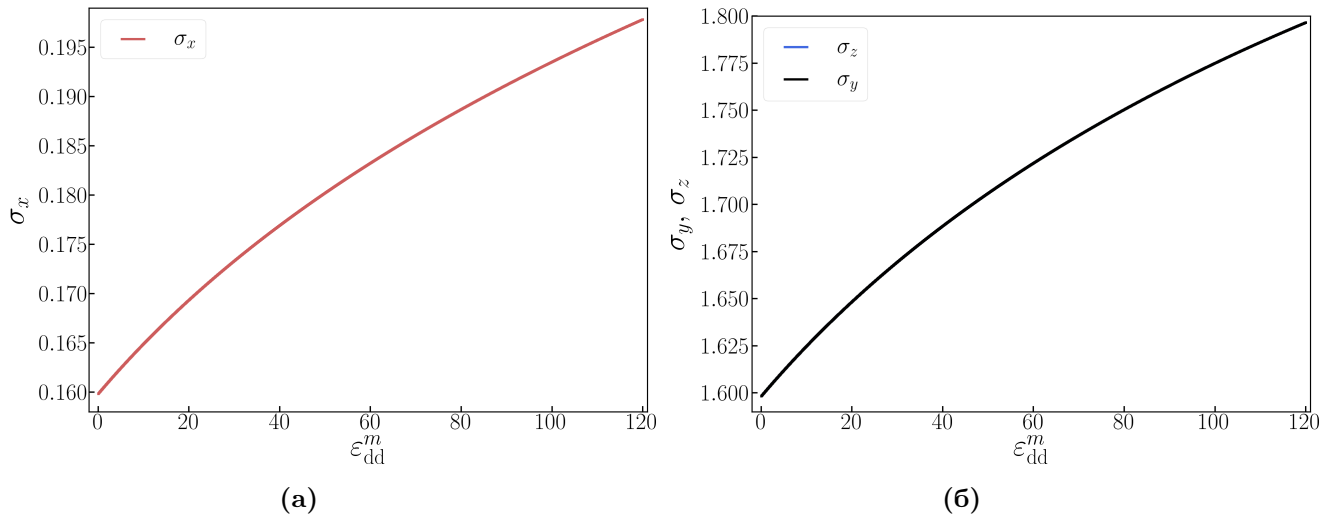
Решавање сиситема једначина (4.21) у општем случају, за произвољне јачине интеракција, је веома захтевно. Сетимо се да су анизотропна функција f и помоћна функција f_{Ax} , које се јављају у једначинама, дефинисане на веома уском домену, када су оба аргумента у

интервалу између нуле и јединице ($0 < x < 1$). Међутим, за недеформисану Ферми сферу ови аргументи једнаки су јединици, а за сферу издужену у правцу z -осе су већи од јединице. С обзиром на то, у зависности од геометрије замке и опсега у ком се крећу релативне јачине интеракције, пре решавања једначина морамо ове две функције аналитички продужити на релевантан домен, користећи се физичком интуицијом. Када смо имали једну интеракцију, релативно лако је било развити потребну интуицију. Међутим, у случају конкуренције две интеракције, много је теже предвидети понашање система, па је често потребно применити метод покушаја и погрешке.

Ми смо нумерички нашли решење једначина за случај када је једна интеракција (електрична ДДИ дуж z -осе) веома мала, док смо јачину магнетне интеракције дуж x -осе мењали. Ова решења су представљена у следећој секцији.

4.5.3 Деформација гасног облака и Ферми површи

Нека се систем двоструко диполних ултрахладних фермиона налази у замци облика диска у y - z равни ($\omega_x = 10\omega_y = 10\omega_z$). Претпоставимо да су електрични диполи оријентисани дуж z -осе и да су параметри подешени тако да релативна јачина ДДИ ε_{dd} има малу вредност. Уколико су магнетни диполи оријентисани дуж x -осе, размотрићемо шта се дешава уколико мењамо вредност релативне јачине магнетне ДДИ ε_{dd}^m . Добијене резултате представили смо графички.

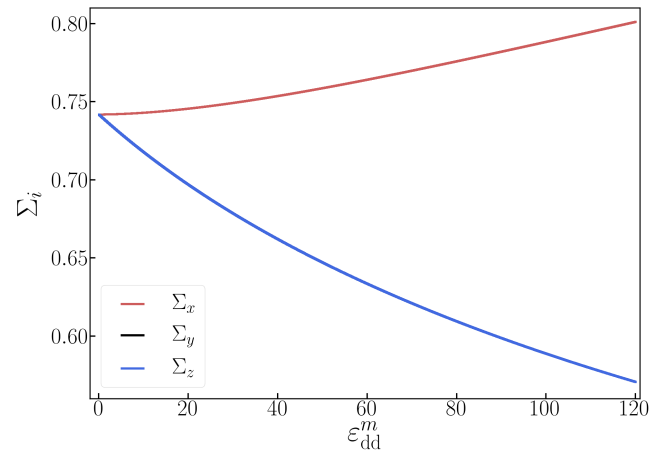


Слика 4.1. Зависности радијуса (а) σ_x и (б) σ_y, σ_z у реалном простору изражених у јединицама σ_{0i} од релативне јачине магнетне ДДИ.

На сликама 4.1(а) и 4.1(б) видимо да се са повећањем релативне јачине магнетне интеракције систем шири у свим правцима. Примећујемо да је у резултатима одржана цилиндрична симетрија око x -осе, с обзиром да је електрична ДДИ међу диполима оријентисаним у правцу z -осе врло мала и не ремети симетрију коју задаје магнетна ДДИ. Овде скрећемо пажњу да када бисмо за резултате добијене у поглављу 3 за случај 2 из табеле 3.1 извршили цикличну пермутацију координата $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, добили бисмо приближно резултате приказане на сликама 4.1(а) и 4.1(б).

На слици 4.2 представљени су резултати добијени импулсе. Можемо да видимо да се Ферми сфера деформише у елипсоид издужен дуж x -осе. Као и у реалном простору

цилиндрична симетрија око x -осе је приближно одржана, па $\Sigma_y \approx \Sigma_z$ опадају монотонно на исти начин, док Σ_x расте. Примећујемо да за однос импулса важи $\Sigma_z/\Sigma_x < 1$.



Слика 4.2. Зависност импулса изражених у јединицама Σ_0 од релативне јачине магнетне ДДИ, због веома слабог нарушења цилиндричне симетрије важи $\Sigma_y \approx \Sigma_z$

Закључак

У овом раду смо се бавили испитивањем утицаја електричне и магнетне ДДИ на облик гаса и на облик Ферми површи у ултрахладним квантним гасовима.

Поглавље 1 смо посветили подсећању на основне карактеристике ултрахладних фермиона у хармонијској замци који међусобно интерагују посредством ДДИ. Дали смо преглед досадашњих резултата у области и кратко продискутовали метод рада заснован на Хартри-Фок теорији средњег поља. Затим смо мотивисали решавање нашег проблема у фазном простору помоћу Вигнерове функције расподеле.

У поглављу 2 смо одабрали релевантан анзац за Вигнерову функцију погодан за опис система и извели израз за његову укупну енергију. Након тога смо у формализму великог канонског ансамбла минимизовали енергију и на тај начин дошли до система једначина за варијационе параметре. У овом поглављу извели смо и аналитички израз за деформацију Ферми површи.

У наредном поглављу 3 смо систем једначина довели до бездимензионог облика погодног за нумеричко решавање. Затим смо систем нумерички решили и добили варијационе параметре у зависности од релативне јачине ДДИ у различитим геометријама замке и резултате презентовали графички. Закључили смо да се и Ферми површ и облак гаса издужују дуж осе оријентације дипола и да геометрија замке значајно утиче на повећање или смањење ефеката изазваних присуством ДДИ. Штавише, у различитим геометријама ће систем за мање или веће вредности јачине ДДИ постати нестабилан.

На крају, у поглављу 4 смо исту методологију применили на добијање укупне енергије двоструко диполног система, минимизацију и добијање система једначина за варијационе параметре. Због комплексности једначина и осетљивости нумеричког приступа, решења смо нашли само у граничном случају врло мале вредности ДДИ међу електричним диполима. На графицима смо представили зависност радијуса у реалном и импулсном простору од јачине магнетне ДДИ.

Закључили смо да би аналитички приступ у решавању овог проблема био изузетно компликован при коришћењу анзаца из рада [12]. Међутим, видели смо да се при коришћењу простије варијационе функције, као у овом раду, губи тачност квантитивних закључака у случају диполних система. Проблеме на које смо наишли у случају двоструко диполних система потребно користити нешто комплекснији анзац за чије би решавање био неопходан потпуни нумерички приступ у тражењу основног стања.

Захвалница: Овај мастер рад је урађен у Лабораторији за примену рачунара у науци, у оквиру Националног центра изузетних вредности за изучавање комплексних система Института за физику у Београду под менторством др Антуна Балажа. Захваљујем му се на бројним сугестијама и исправкама, али и на могућности да у току ове школске године учествујем на конференцијама и летњој школи из области ултрахладних гасова и стекнем драгоцена искуства.

Додатак А

Фурије трансформ ДДИ потенцијала

У овом додатку израчунаћемо Фурије трансформ ДДИ потенцијала између два фермиона, који је дат једначином (1.11) и има облик:

$$V_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \frac{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{r}^2 - 3(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^5}. \quad (\text{A.1})$$

Ми смо у раду користили ДДИ потенцијал између два дипола која су поларизована дуж истог орта \mathbf{e} . С обзиром на то потенцијал можемо да напишемо и у једноставнијем облику:

$$V_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \frac{r^2 - 3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})^2}{r^5}. \quad (\text{A.2})$$

Како бисмо наставили рачун искористићемо форму потенцијала коришћену у раду [25]:

$$V_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \sum_{i,j} e_i e_j \left(\delta_{ij} \frac{1}{r^3} - 3 \frac{r_i r_j}{r^5} \right), \quad (\text{A.3})$$

где су e_i и r_i Декартове компоненте вектора \mathbf{e} и \mathbf{r} , а δ_{ij} је Кронекерова делта. За даљи рачун биће нам потребан генерализани Дирак-Гринов идентитет:

$$\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) - \delta_{ij} \frac{1}{r^3} + 3 \frac{r_i r_j}{r^5}. \quad (\text{A.4})$$

Ако се усредсредимо само на део у загради из израза (A.3), користећи Дирак-Гринов идентитет за преуређивање добијамо:

$$-\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) - \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (\text{A.5})$$

Како бисмо наставили израчунавање Фурије трансформа, приметимо да су следећа Фурије разлагања тачна:

$$\frac{1}{r} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (\text{A.7})$$

Видимо да $1/r$ може да се представи као инверзни Фурије трансформ од $4\pi/k^2$. Још

ћемо искористити да је тродимензионална Диракова делта функција инверзни Фурије трансформ јединице.

Примењивање идентитета (A.6) и (A.7) у изразу (A.5) доводи нас до:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2} e^{i \sum_l k_l r_l} \right) \\
 & = -\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \left(i \sum_l k_l \frac{\partial r_l}{\partial r_i} \right) \left(i \sum_l k_l \frac{\partial r_l}{\partial r_j} \right) \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \\
 & = -\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \left(i \sum_l k_l \delta_{i,l} \right) \left(i \sum_l k_l \delta_{j,l} \right) \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \\
 & = -\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + k_i k_j \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right).
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Коначно можемо написати следеће:

$$V_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \sum_{i,j} e_i e_j \left[-\frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \mathcal{F}^{-1}[1] + 4\pi k_i k_j \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{k^2} \right] \right], \tag{A.9}$$

Сада можемо да израчунамо Фурије трансформ и леве и десне стране овог изрази, што нам даје:

$$\tilde{V}_{\text{dd}}(\mathbf{k}) = -\frac{C_{\text{dd}}}{3} \sum_{i,j} e_i e_j \left(\delta_{ij} - 3 \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \tag{A.10}$$

Када просумирамо овај израз добијамо:

$$\tilde{V}_{\text{dd}}(\mathbf{k}) = -\frac{C_{\text{dd}}}{3} \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} \right), \tag{A.11}$$

Орт поларизације дипола у овом раду је \mathbf{e}_z , па је облик Фурије трансформа потенцијала коришћеног у раду следећи:

$$\tilde{V}_{\text{dd}}(\mathbf{k}) = \frac{C_{\text{dd}}}{3} \left(3 \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z)^2}{k^2} - 1 \right). \tag{A.12}$$

Приметимо да решење зависи од правца и смера импулса, док не зависи од његовог интензитета. Такође, лако је уочити да за $k = 0$ Фурије трансформ ДДИ потенцијала није дефинисан, па се у зависности од потребе мора регуларизовати.

Додатак Б

Анизотропна и помоћна функција

Б.1 Анизотропна функција

При проучавању диполарних ултрахладних гасова у рачуну се, као последица анизотропности ДДИ, појављује тзв. анизотропна функција. Ова функција има следећи облик:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\frac{3x^2y^2 \cos^2 \theta}{x^2y^2 \cos^2 \theta + (y^2 \cos^2 \phi + x^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{3x^2y^2}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{x^2y^2 \cos^2 \theta + (y^2 \cos^2 \phi + x^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

Интеграл по ϕ се може решити користећи идентитет (3.642.1) из референце [23]:

$$\int_0^{\pi/2} d\phi \frac{\sin^{2\mu-1} \phi \cos^{2\nu-1} \phi}{(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)^{\mu+\nu}} = \frac{1}{a^{2\mu} b^{2\nu}} B(\mu, \nu), \quad (\text{Б.2})$$

где је $B(\mu, \nu)$ Ојлерова бета функција. Можемо вршити интеграцију на интервалу од 0 до $\pi/2$, и онда помножити резултат са 4, јер је функција π -периодична и симетрична у односу на $\pi/2$. Да бисмо искористили овај резултат расписаћемо именилац тако да има форму која је приказана у горњем интегралу, тада се лако види да:

$$\begin{aligned} \mu &= \nu = \frac{1}{2}, \\ a &= x(1 - \cos^2 \theta(1 - y^2)), \\ b &= y(1 - \cos^2 \theta(1 - x^2)). \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Коришћење горенаведеног довешће нас до:

$$f(x, y) = 1 - \frac{3xy}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta(1 - x^2)} \sqrt{1 - \cos^2 \theta(1 - y^2)}}, \quad (\text{Б.4})$$

где је искоришћено $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$. За анизотропну функцију важи $f(x, y) = f(y, x)$. У зависности од односа аргумената анизотропне функције можемо имати различита решења горњег интеграла:

1. $x < y < 1$

Користећи смену $u = \cos \theta \sqrt{1 - x^2}$, интеграл (Б.4) постаје:

$$f(x, y) = 1 + \frac{3xy}{(1 - x^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} du \frac{u^2}{\sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - \kappa^2 u^2}}, \quad (\text{Б.5})$$

где је $\kappa = \sqrt{(1-y^2)/(1-x^2)} < 1$. Решење горњег интеграла једино можемо представити помоћу специјалних функција. Користићемо елиптичке интеграле прве и друге врсте, који су дефинисани као у поглављу 8.1 референце [23]. Коначно, резултат је:

$$f(x, y) = 1 + 3xy \frac{E(\vartheta, \kappa) - F(\vartheta, \kappa)}{(1-y^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad (\text{Б.6})$$

где је $\sin \vartheta = \sqrt{1-x^2}$.

2. $y < x < 1$

С обзиром на симетрију анизотропне функције, вредност функције $f(x, y)$, за задате услове може се добити израчунавањем $f(y, x)$ за услове случаја 1.

3. $x < 1 < y$

На овом домену неопходно је аналитички продужити функцију (Б.6) користећи табелу (8.127) из референце [23]. Потребне су нам следеће трансформације:

$$\kappa_1 = i \frac{\kappa}{\kappa'}, \quad \sin \vartheta_1 = \kappa' \frac{\sin \vartheta}{\Delta \vartheta}, \quad F(\vartheta_1, \kappa_1) = \kappa' F(\vartheta, \kappa), \quad (\text{Б.7})$$

$$E(\vartheta_1, \kappa_1) = \frac{1}{\kappa'} \left(E(\vartheta, \kappa) - \frac{\kappa^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\Delta \vartheta} \right),$$

где је $\Delta \vartheta = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \vartheta}$ и нови модул елиптичког интеграла $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$. Примењујући ове трансформације добијамо:

$$f(x, y) = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} + \frac{3xy\sqrt{y^2 - x^2}E(\vartheta_1, \kappa_1)}{(y^2 - 1)(x^2 - 1)} + \frac{3xyF(\vartheta_1, \kappa_1)}{(y^2 - 1)\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad (\text{Б.8})$$

где је $\kappa_1 = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2-x^2}}$ и $\sin \vartheta_1 = \sqrt{y^2 - x^2}/y$.

4. $y < 1 < x$

С обзиром на симетрију анизотропне функције, вредност функције $f(x, y)$, за задате услове може се добити израчунавањем $f(y, x)$ за услове случаја 3.

5. $x < 1 < y$

До анизотропне функције на овом домену доћићемо процедуром као у случају 3, користећи следеће трансформације:

$$\kappa_1 = \frac{\kappa'}{i\kappa}, \quad \sin \vartheta_1 = -i\kappa \frac{\sin \vartheta}{\Delta \vartheta}, \quad F(\vartheta_1, \kappa_1) = -i\kappa F(\vartheta, \kappa), \quad (\text{Б.9})$$

$$E(\vartheta_1, \kappa_1) = \frac{i}{\kappa} \left(E(\vartheta, \kappa) - F(\vartheta, \kappa) - \frac{\kappa^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\Delta \vartheta} \right),$$

где је $\Delta \vartheta = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \vartheta}$ и нови модул елиптичког интеграла $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$. Примењујући ове трансформације добијамо:

$$f(x, y) = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} + \frac{3xyE(\vartheta_1, \kappa_1)}{(x^2 - 1)\sqrt{y^2 - 1}}, \quad (\text{Б.10})$$

где је $\kappa_1 = \sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2-1}}$ и $\sin \vartheta_1 = \sqrt{y^2-1}/y$.

6. $1 < y < x$

С обзиром на симетрију анизотропне функције, вредност функције $f(x, y)$, за задате услове може се добити израчунавањем $f(y, x)$ за услове случаја 5.

7. $x = y$

У овом случају, када аргументи анизотропне функције теже један другом, што одговара случају када је систем цилиндрично симетричан, тада анизотропна функција зависи само од једног аргумента, и дата је са:

$$f(x, x) \equiv f_s(x) = \lim_{x \rightarrow y} f(x, y) = \frac{1 + 2x^2 - 3x^2 d(x)}{1 - x^2}, \quad (\text{Б.11})$$

где је $d(x)$ дато са:

$$d(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tanh^{-1} \sqrt{1-x^2}, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tanh^{-1} \sqrt{x^2-1}, & x > 1. \end{cases} \quad (\text{Б.12})$$

8. $x \neq y = 1$

$$f(x, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} f(x, y) = -\frac{1}{2} f_s(1/x), \quad (\text{Б.13})$$

9. $x = 1 \neq y$

$$f(1, y) = f(y, 1) = -\frac{1}{2} f_s(1/y). \quad (\text{Б.14})$$

У овом раду, аргументи анизотропне функције су односи радијуса гасног облака или односи радијуса Ферми површи. У зависности од геометрије замке и јачине интеракције ови односи ће бити различити. Пре решавања једначина за тачно одређен случај увек морамо да водимо рачуна какав однос радијуса нам диктира геометрија замке и како ће се због интеракције у систему они мењати. У импулсном простору, у систему без интеракције, сви радијуси су једнаки, за у присуству интеракције у систему ови односи ће се мењати.

У овом раду користили смо и $f_i(x_1, y_2)$ да бисмо означили први парцијални извод анизотроне функције по њеним аргументима $i = 1, 2$.

У анализи цилиндрично симетричног система када се правац поларизације дипола поклапа са правцем интеракције за извод анизотропне функције коришћено је:

$$\lim_{x \rightarrow y} f_1(x, y) = \frac{(2 + x^2) f_s(x)}{2(1 - x^2)} - 1. \quad (\text{Б.15})$$

Б.2 Помоћна функција

При проучавању двоструко диполних ултрахладних гасова у рачуну се, као последица нарушавања цилиндричне симетрије, појављује помоћна функција. Ова функција има следећи облик:

$$f_{Ax}(x, y) = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} \left(d\phi \frac{3y^2 \cos^2 \phi}{x^2 y^2 \cos^2 \theta + (y^2 \cos^2 \phi + x^2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta} \right). \quad (\text{Б.16})$$

Налик претходном делу додатка, могу се применити трансформације и на помоћну функцију и добити облици за потребне случајеве.

Литература

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] B. DeMarco and D. S. Jin, *Science* **285**, 1703 (1999).
- [4] T. Miyakawa, T. Sogo, and H. Pu, Phase-space deformation of a trapped dipolar Fermi gas, *Phys. Rev. A* **77**, 061603 (2008).
- [5] K. Aikawa, S. Baier, A. Frisch, M. Mark, C. Ravensbergen, and F. Ferlaino, Observation of Fermi surface deformation in a dipolar quantum gas, *Science* **345**, 1484 (2014).
- [6] M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon, Ultra-cold Fermi gases: Varenna on Lake Como, Villa Monastero, 20-30 June 2006, IOS Press: Societa italiana di fisica (2007).
- [7] L. De Marco, G. Valtolina, K. Matsuda, W. G. Tobias, J. P. Covey, and J. Ye, A degenerate Fermi gas of polar molecules, *Science* **363**, 853 (2019).
- [8] K. K. Voges, P. Gersema, M. Meyer zum Alten Borgloh, T. A. Schulze, T. Hartmann, A. Zenesini, and S. Ospelkaus, Ultracold Gas of Bosonic NaK Ground-State Molecules, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 083401 (2020).
- [9] P. K. Molony, P. D. Gregory, Z. Ji, B. Lu, M. P. Köppinger, C. R. Le Sueur, C. L. Blackley, J. M. Hutson, and S. L. Cornish, Creation of Ultracold RbCs Molecules in the Rovibrational Ground State, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 255301 (2014).
- [10] W. Li, T. Pohl, J. M. Rost, S. T. Rittenhouse, H. R. Sadeghpour, J. Nipper, B. Butscher, J. B. Balewski, V. Bendkowsky, R. Löw, and T. Pfau, A Homonuclear Molecule with a Permanent Electric Dipole Moment, *Science* **334**, 1110 (2011).
- [11] S. Giovanazzi, A. Görlitz, and T. Pfau, Tuning the Dipolar Interaction in Quantum Gases, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 130401 (2002).
- [12] V. Veljić, A. Pelster, and A. Balaž, *Phys. Rev. Research* **1**, 012009(R) (2019).
- [13] E. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [14] M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully, and E.P. Wigner, Distribution functions in physics: Fundamentals, *Phys. Rep.* **103**, 121167 (1984).

- [15] J.-N. Zhang, and S. Yi, Fermi surface of a trapped dipolar Fermi gas, *Phys. Rev. A* **80**, 053614 (2009).
- [16] A. R. P. Lima and A. Pelster, Collective motion of polarized dipolar Fermi gases in the hydrodynamic regime, *Phys. Rev. A* **81**, 021606(R) (2010).
- [17] T. Sogo, L. He, T. Miyakawa, S. Yi, H. Lu, and H. Pu, Dynamical properties of dipolar Fermi gases, *New J. Phys.* **11**, 055017 (2009).
- [18] T. Sogo, L. He, T. Miyakawa, S. Yi, and H. L. Pu, Dynamical properties of dipolar Fermi gases, *New J. Phys.* **12**, 079801 (2010).
- [19] J.-N. Zhang and S. Yi, Thermodynamic properties of a dipolar Fermi gas, *Phys. Rev. A* **81**, 033617 (2010).
- [20] J.-N. Zhang, R.-Z. Qiu, L. He, and S. Yi, Dynamical properties of a trapped dipolar Fermi gas at finite temperature, *Phys. Rev. A* **83**, 053628 (2011).
- [21] D. Baillie and P. B. Blakie, Magnetostriction and exchange effects in trapped dipolar Bose and Fermi gases, *Phys. Rev. A* **86**, 023605 (2012).
- [22] V. Veljić, A. Balaž, and A. Pelster, Time-of-flight expansion of trapped dipolar Fermi gases: From the collisionless to the hydrodynamic regime, *Phys. Rev. A* **95**, 053635 (2017).
- [23] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, seventh edition, Academic Press (2007).
- [24] C. Zhao, L. Jiang, X. Liu, W. M. Liu, X. Zou, and H. Pu, Hartree-Fock-Bogoliubov theory of dipolar Fermi gases, *Phys. Rev. A* **81**, 063642 (2010).
- [25] C. Eberlein, S. Giovanazzi, and D.H.J. O'Dell, Exact solution of the Thomas-Fermi equation for a trapped Bose-Einstein condensate with dipole-dipole interactions, *Phys. Rev. A* **71**, 033618 (2005).
- [26] F. Wächtler, A. R. P. Lima, and A. Pelster, Low-lying excitation modes of trapped dipolar Fermi gases: From the collisionless to the hydrodynamic regime, *Phys. Rev. A* **96**, 043608 (2017).