

UNIVERZITET U BEOGRADU

INSTITUT ZA FIZIKU
U BEOGRADU

FIZIČKI FAKULTET



MASTER RAD

TOPOLOŠKO SPARIVANJE KOMPOZITNIH FERMIONA

Autor

Nikola Nešković

Mentor

Dr. Milica Milovanović

Septembar, 2023.
Beograd

Apstrakt

Razmatramo mogućnost p-talasnog sparivanja kompozitnih fermiona u specijalnom slučaju sistema bozona unutar najnižeg Landauovog nivoa na punjenju $\nu = 1$. Uprkos mnogobrojnim dokazima iz numeričkih eksperimenata, rađenih na sferi i torusu, da je Fafijan najverovatniji kandidat za opis osnovnog stanja, analitički prilaz preko teorije polja nije dovoljno jasan. Zapravo najrigorozniji, kontinualni opis koji su uveli Paskje i Holdejn, a dalje razvio Rid, u aproksimaciji srednjeg polja, ističe formiranje Fermi mora kompozitnih fermiona. U cilju razrešenja ove zagonetne kolizije pomenute numerike i analitike, najpre, pomoću numeričke metode egzaktne dijagonalizacije, analiziramo spektre tri relevantna kandidata sa šiftom -2,-1 i 0 na sferi, i upoređujemo njihove energije osnovnog stanja u termodinamičkom limesu. Zatim predlažemo formalizam koji analitički u aproksimaciji srednjeg polja vodi nekompresibilnom osnovnom stanju koje ima formu Fafijana.

Zahvalnice

Pre svega, želeo bih da se zahvalim svojoj dragoj mentorki prof. dr Milici Milovanović na svom vremenu i energiji koju je uložila u moj naučni razvitak i u ostvarivanje ovog rada. Zahvalan sam na svom strpljenju i znanju koje mi je prenela, kao i na svim učinkovitim diskusijama koje smo vodili. Smatram da je velika čast i privilegija raditi i učiti od jednog vrstnog istraživača kao što je Milica.

Puno zahvalnosti dugujem i dr Ivani Vasić na pomoći i smernicama vezanim za numerički deo istraživanja.

Takođe, zahvaljujem se prof. dr Antunu Balažu i Laboratoriji za primenu računara u nauci pri Institutu za fiziku u Beogradu na izuzetnom gostoprimstvu i omogućenim računarskim resursima pomoću kojih je dobijena većina numeričkih rezultata u ovom radu.

Konačno, želim da se zahvalim i svojim bližnjima. Mojoj divnoj supruzi Sari se zahvaljujem na neizmernoj ljubavi, podršci i razumevanju tokom izrade ove teze.

Na kraju, ovaj rad posvećujem svojim dobrim roditeljima Slobodanu i Snežani, koji su mi požrtvovano dali priliku da se školujem i pomogli da istrajem do kraja studija. Dragi oče i majko veliko vam hvala na svemu.

Nikola Nešković

Sadržaj

Uvod	9
1 Integralni kvantni Holov efekat	13
1.1 Klasičan Holov efekat	13
1.2 Integralni kvantni Holov efekat	15
1.3 Landauovi nivoi	16
1.3.1 Vektor centra orbite	17
1.3.2 Degeneracija Landauovog nivoa	18
1.3.3 Jednočestični bazis	18
1.3.4 Talasne funkcije u simetričnoj kalibraciji	19
1.3.5 Faktor punjenja	20
1.4 Popunjeni Landauovi nivoi i nekompresibilnost	20
2 Frakcioni kvantni Holov efekat	23
2.1 Laffinova talasna funkcija	24
2.1.1 Kvazičestične ekscitacije	26
2.2 Čern-Sajmons transformacija	27
2.3 Kompozitni fermioni	29
2.4 Polupopunjen Landauov nivo	32
2.4.1 Dipolna interpretacija	32
2.5 Fafijan	33
2.5.1 Ekscitacije Fafijana	35
2.5.2 Majorana mode	36
3 Bozoni na punjenju $\nu = 1$	39
3.1 Formalizam	39
3.1.1 Konstrukcija prostora stanja	39
3.1.2 Reprerentacija u impulsnom prostoru	40
3.1.3 Ridov hamiltonijan	43
3.2 Hartri-Fokova aproksimacija	44
3.3 BCS teorija srednjeg polja	45
4 Numerički eksperiment	47
4.1 Kvantni Holov sistem na sferi	47
4.1.1 Najniži Landauov nivo	48
4.1.2 Spinska reprezentacija	49
4.1.3 Šift	49
4.1.4 Holdejnovi pseudopotencijali	49
4.2 Egzaktna dijagonalizacija	50
5 Mehanizam sparivanja kompozitnih fermiona	55

6	Zaključak	59
A	Inverzni Čern-Sajmons prelaz za $\rho^R(\rho^R - \rho^L)$	61

Uvod

Kvantni Holov efekat (KHE) je makroskopski kvantni fenomen koji se javlja u efektivnom dvodimenzionalnom (2D) sistemu elektrona, ohlađenih do temperature koja je blizu apsolutne nule i u prisustvu jakog spoljašnjeg magnetnog polja.

Otkriven je početkom 1980. godine (skoro 100 godina nakon otkrića klasičnog Holovog efekta) kada je Klaus fon Klicing ¹ primetio da u sistemu dvodimenzionalnog elektronskog gasa pod gore navedenim uslovima, Holova provodnost poprima diskretne vrednosti

$$\sigma = \nu \frac{e^2}{2\pi\hbar}, \quad \nu \text{ je ceo broj,}$$

i to je praćeno jakim minimumom longitudinalne otpornosti [1]. Ono što je odmah bilo začuđujuće i neverovatno jeste izuzetna preciznost kvantizacije (s obzirom da se radi o mnogočestičnom elektronskom sistemu), koja je otporna na nečistoće kao i geometrijske detalje dvodimenzionalnog sistema. Efekat je stoga odmah privukao ogromnu pažnju čime je 1982. godine usledilo otkriće tzv. frakcionog kvantnog Holovog efekta (FKHE) (Cui ², Stormer ², Gosard [2]) kada je pokazano da ν ne mora biti isključivo celobrojna vrednost, već može biti i određeni racionalni broj $\nu = \frac{p}{q}$. Na početku su platoi Holove provodnosti primećeni na frakciji $\nu = \frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$, a kasnije kako je uzorak postajao čistiji i kako su sve niže temperature postizane, tako se sve više platoa otkrivalo. Najveći broj njih je za ν sa neparnim imeniocem, nekoliko je primećeno i sa parnim imeniocem u višim Landauovim nivoima (LL), ali nijedan takav u najnižem.

Prvo objašnjenje FKHE za $\nu = \frac{1}{m}$ gde je m neparan broj, dao je 1983. godine Laffin ² [3]. On je predložio talasnu funkciju koja je imala visok stepen preklapanja (99%) sa numeričkim rešenjem osnovnog stanja konačnog sistema (do 15 elektrona) sa Kulonovom interakcijom. Laffin takođe konstruiše talasne funkcije za naelektrisane ekscitacije³ sistema.

Za objašnjenje ostalih (ne-Laffinovih) $\nu = \frac{n}{2pn+1}$ (n i p su pozitivni celi brojevi) najpre su Halden [4] i Halperin [5] predložili tzv. hijerarhijsku konstrukciju sa kojom su, polazeći od poznatog Laffinovog stanja na određenoj frakciji, iterativno generisali niz stanja na drugim frakcijama.

Konceptualno drugačije mikroskopsko objašnjenje ne-Laffinovih frakcija $\nu = \frac{n}{2pn+1}$ ponudio je Dž. Džein 1989. godine posmatrajući FKH stanja aproksimativno kao celobrojna kvantna Holova stanja određenih kvazičestica tzv. kompozitnih fermiona⁴ [6].

Čern-Sajmonsov prilaz preko teorije polja u kome su elektroni tačno modelirani kao fermioni vezani za paran broj (fiktivnih) kvanata fluksa (koji na neki način reprezentuju paran broj vorteksa Džeinovog kompozitnog fermiona) prvi koriste Lopez i Fredkin [7] da opišu Džeinov niz nekompresibilnih FKH stanja. Velika prednost Čern-Sajmonsovog pristupa jeste mogućnost jednostavnog i donekle sistematičnog računa veličina kao što je provodnost koja može eksperimentalno da se meri.

¹Nobelova nagrada 1985. godine.

²Nobelova nagrada 1998. godine.

³Laffinove ekscitacije spadaju u tzv. Ablove anione (eng. anyons) – čestice sa netrivialnom statistikom i frakcionim naelektrisanjem.

⁴Kompozitni fermion predstavlja vezano stanje čestice i parnog broja tzv. vorteksa, ako su te čestice elektroni, a ako su bozoni onda neparnog broja.

Ubrzo nakon toga, Halperin, LI i Rid (HLR) [8] (takođe Kalpier i Ženg [9]) koriste Čern-Sajmonsovu teoriju polja i koncept kompozitnih fermiona da objasne odsustvo platoa u Holovoj provodnosti sistema elektrona na frakciji popunjenosti $\nu = \frac{1}{2}$. Ukratko, elektroni zbog prisustva vorteksa efektivno “osećaju” slabije magnetno polje nego što je spoljašnje, a na punjenju $\nu = \frac{1}{2}$ ispostavlja se da je ovo efektivno magnetno polje nula, tako da kompozitni fermioni obrazuju kompresibilno stanje slično Fermi moru.

Za razliku od polupopunjenog najnižeg Landauovog nivoa eksperiment [10] pokazuje da stanje elektrona na $\nu = \frac{5}{2}$ (polupopunjen drugi Landauov nivo) ima bitno drugačije ponašanje. Pojava platoa u Holovoj provodnosti sugerise da ovo stanje ne može biti objašnjeno na isti način kao što su elektroni na $\nu = \frac{1}{2}$. Veruje se da je najbolji kandidat da opiše FKHE sistema elektrona na $\nu = \frac{5}{2}$ Mur-Ridovo stanje tzv. Fafijan⁵ [11], koji se interpretira kao p-talasno sparno stanje kompozitnih fermiona.⁶ Uverenje je pre svega zasnovano na numeričkim studijama [12, 13, 14, 15] koje su pokazale visok stepen preklapanja Mur-Rid stanja sa pravim osnovnim stanjem dobijenim procesom egzaktne dijagonalizacije konačnog sistema elektrona sa Kulonovom interakcijom.

Motivisani radom Boma i Pajnsa [17] koji su razmatrali kolektivne ekscitacije 3D elektronskog gasa sa Kulonovom (dugodometnom) interakcijom, Šankar i Murti [18] analiziraju HLR teoriju i predlažu hamiltonijanski pristup na proširenom Hilbertovom prostoru. Slično kao što Bom i Pajns uvode plazmone kao dodatne (oscilatorne) stepene slobode, Šankar i Murti analogno tretiraju vortekse, koje kombinujući sa elektronima, ugrađuju u hamiltonijan uz dodatni skup veza. Primena ovog prilaza na sistem polupopunjenog najnižeg Landauovog nivoa dovela ih je do dipolne interpretacije: ponašanja kompozitnih fermiona na način gasa neutralnih dipola [19].

U želji da dođu do potpunog analitičkog opisa i boljeg razumevanja stanja Fermi tečnosti u najnižem Landauovom nivou Paskje i Holdejn [20], a nešto kasnije i Rid [21], razmatraju sistem popunjenog nivoa $\nu = 1$ bozona, konstruišući jasnu i preciznu reprezentaciju kompozitnih fermiona na proširenom Hilbertovom prostoru uz zanemarivanje doprinosa drugih nivoa (efektivno projektujući na samo jedan izolovani Landauov nivo). Očekivanje koje proizilazi iz Ridove teorije je da kompozitni fermioni formiraju Fermi tečnost. Ipak sa ovakvom slikom se ne slažu brojni numerički eksperimenti rađeni na sferi i torusu [22, 23, 24, 25, 26] i koji tvrde da je pravo osnovno stanje bozona unutar najnižeg Landauovog nivoa na punjenju $\nu=1$ (sa repulzivnom kontaktnom interakcijom) jedno nekompresibilno kvantno Holovo stanje – bozonski Fafijan – dobijen kondenzacijom parova kompozitnih fermiona. Ovde treba imati na umu ograničenja koja oba pristupa poseduju: Ridov preko usrednjene teorije polja koja možda grubo odbacuje važne fizičke pojedinosti neophodne za sparivanje fermiona, i numerička egzaktna dijagonalizacija koja se sprovodi na veoma malom sistemu (oko 16 čestica) što je dosta daleko od termodinamičkog limesa.

Novija zapažanja koja iznose Dong i Sentil [27], koja za razliku od Ridovog pristupa dinamičari, konstruišu hamiltonijan adaptiran na dipolnu reprezentaciju sa svojstvenom energijom polarizacije dipola, daju određene smernice, ali neka pitanja ostaju nerešena. Prvo pitanje se odnosi da dodatnu simetriju koju poseduje njihov hamiltonijan, vezanu za izmenu L i R stepeni slobode, odnosno ρ^L i ρ^R gustina. Drugo, BCS pristup u aproksimaciji srednjeg polja generiše dva p -talasna stanja suprotnih ugaonih momenata $l = -1$ i $l = 1$ (zbog dodatne simetrije), ali kako se ispostavlja, prema [28], za njih se ne može tvrditi da predstavljaju Fafijan i njegovog konjugovanog partnera. Na kraju “bozonski problem” ostaje nerešen i mi trenutno nemamo mehanizam sparivanja koji bi vodio osnovnom stanju “Fafijanskog tipa”, kako se zapaža u nu-

⁵Fafijan ima krajnje neobične osobine za fiziku. Naime njegove naelektrisane ekscitacije ispoljavaju ne-Abelovu netrivialnu statistiku. Danas se dosta istražuju jer potencijalno imaju važnu ulogu u (topološkom) kvantnom računanju [16].

⁶Tačnije očekuje se da varijanta Fafijanske (Mur-Ridove) konstrukcije opisuje osnovno stanje.

meričkim eksperimentima.

Stoga, u ovom radu se bavimo sistemom bozona na punjenju $\nu=1$, konkretno u Poglavlju 5 razmatramo način koji bi u formalizmu proširenog prostora stanja, tj. u reprezentaciji kompozitnih fermiona, vodio Fafjanu kao pravom opisu sistema i njegovog osnovnog stanja. Ali pre toga, rad započinjemo uvodeći najvažniju teoriju vezanu za kvantni Holov efekat podeljenu u dva poglavlja. U Poglavlju 1 se bavimo integralnim kvantnim Holovim efektom, dok u Poglavlju 2 obrađujemo frakcioni kvantni Holov efekat. Poglavlje 3 uvodi Ridov formalizam za sistem bozona na punjenju $\nu = 1$ kao okvir za dalja analitička razmatranja. Poglavlje 4 posvećujemo, nakon uvođenja sferne geometrije, numeričkom delu našeg istraživanja. Nakon toga prelazimo na pomenuto Poglavlje 5 koje predstavlja centralni deo teze. Na kraju iznosimo zaključke i navodimo otvorena pitanja za dalja istraživanja.

1. Integralni kvantni Holov efekat

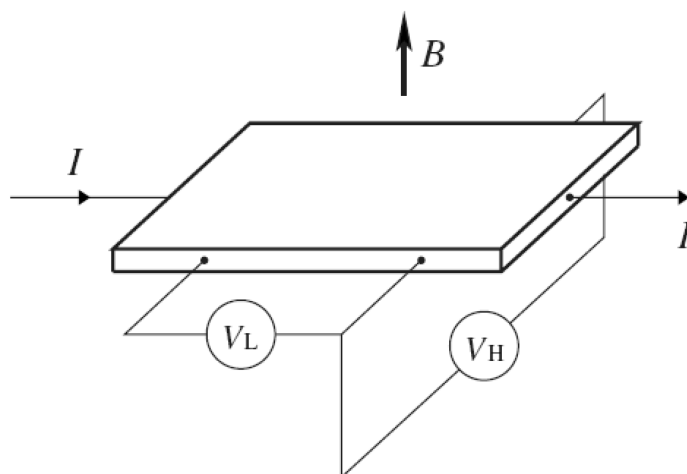
1.1. Klasičan Holov efekat

Omov zakon $I = \frac{U}{R}$ implicira da je jačina struje kroz otpornik proporcijalna padu napona na njemu. U većini situacija struja teče u istom pravcu kao što je vektor jačine spoljašnjeg električnog polja. U diferencijalnom obliku Ohm zakon ima oblik

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.1)$$

gde je σ provodnost, $\vec{J} = qn\vec{v}$ gustina struje za čestice naelektrisanja q , gustine n i koje se kreću brzinom \vec{v} .

1879. godine Edvin Hol [44] otkriva da u prisustvu magnetnog polja struja teče u pravcu normalnom na pravac spoljašnjeg polja. Drugim rečima, prolazak struje indukuje napon normalno na pravac protoka struje. Ovo je poznato kao *Holov efekat*.



Slika 1.1: Holov efekat označava pojavu razlike potencijala koja je ortogonalna kako na spoljašnje električno polje, tako i na njemu poprečno magnetno polje

Efekat nastaje kao posledica činjenice da magnetno polje uzrokuje da se naelektrisane čestice kreću po krugu. Jednačina kretanja čestice mase m i naelektrisanja q u magnetnom polju \vec{B} je

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.2)$$

Ako izaberemo $\vec{B} = B\vec{e}_z \Rightarrow \vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$, dobijamo dve kuplovane skalarne (po komponentama) diferencijabilne jednačine drugog reda

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} \end{aligned}$$

Opšte rešenje je

$$x(t) = X - R \sin(\omega_c t + \phi) \quad (1.3)$$

$$y(t) = Y + R \cos(\omega_c t + \phi) \quad (1.4)$$

gde je $\omega_c = \frac{qB}{m}$ ciklotronska frekvenca. Vidimo da se čestica kreće po kružnici sa centrom u tački (X, Y) i frekvencom ω_c .

Pojava napona normalno na pravac protoka inicijalne struje kao i magnetnog polja B je u vezi sa Holovom otpornošću ρ_H , koja linearno zavisi od magnetnog polja B . Ovo se može pokazati primenom Drudeove jednačine [41]

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} - m \frac{\vec{v}}{\tau}, \quad (1.5)$$

gde je τ srednje vreme između dva sudara. Interesuje nas stacionarno rešenje pa je $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, odakle sledi

$$\frac{q\tau}{m} \vec{E} = \vec{v} - \frac{q\tau}{m} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Primenom izraza za gustinu struje $\vec{J} = qn\vec{v}$ dobijamo

$$\vec{E} = -\frac{1}{nq} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{m}{nq^2\tau} \vec{J}. \quad (1.6)$$

Tenzor otpornosti $\hat{\rho}$ koji je definisan relacijom $\vec{E} = \hat{\rho}\vec{J}$ ima i vandijagonalne elemente u xy ravni. Prethodnu jednačinu možemo da napišemo u matricnom obliku

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

gde je $\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m}{nq^2\tau} = \rho_0$ ¹ longitudinalna otpornost, dok vandijagonalni članovi $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{B}{nq} = \rho_H$ predstavljaju *Holovu otpornost*. Grafički prikaz zavisnosti otpornosti ρ_{xx} i ρ_{xy} od magnetnog polja B dat je na Slici 2.2. Holov koeficijent je definisan sa

$$R_H = \frac{\rho_{xy}}{B} = -\frac{1}{nq} \quad (1.8)$$

Za $J_y = 0$ nalazimo da je $R_H = \frac{1}{B} \frac{E_y}{J_x}$.

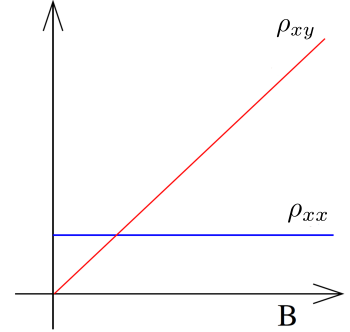
Kada je poznat tenzor otpornosti može se lako odrediti provodnost

$$\hat{\sigma} = \hat{\rho}^{-1} = \frac{\sigma_0}{1\omega_c^2\tau^2} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

gde je $\sigma_0 = \frac{nq\tau^2}{m}$ DC provodnost u odsustvu magnetnog polja.

U eksperimentu se meri otpor R koji se od otpornosti ρ razlikuje za geometrijski faktor. Međutim za ρ_{xy} ove dve veličine se poklapaju (do na znak). Da bismo se uverili u ovo razmotrimo materijal dužine L sa padom napona V_y u y pravcu i jačinom struje I_x izmerenom u x pravcu. Tada je

$$R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{LE_y}{LJ_x} = \frac{E_y}{J_x} = -\rho_{xy} \quad (1.10)$$



Slika 1.2: Longitudinalna i Holova otpornost

¹Primitimo da samo ρ_{xx} zavisi od τ i $\rho_{xx} \rightarrow 0$ kad $\tau \rightarrow \infty$.

Drugi način da sve ovo pokažemo jeste razmatranjem Galilejeve simetrije [29] (u odsustvu nečistoća). Neka naelektrisana čestica miruje u laboratorijskom sistemu u spoljašnjem magnetnom polju:

$$\text{LAB: } \vec{E} = 0, \vec{B} = B\vec{e}_z, \vec{v} = 0$$

Primenom busta $-\vec{v}$ prelazimo u pokretni sistem tako da se u njemu čestica kreće brzinom \vec{v} . Pošto ukupna Lorencova sila $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B})$ mora ostati nula², sledi da je za

$$\text{POKRETNI SISTEM: } \vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \vec{B} = B\vec{e}_z, \vec{J} = qn\vec{v}$$

Odatle sledi da je

$$\vec{E} = -\frac{1}{nqc}\vec{J} \times \vec{B}. \quad (1.11)$$

Tenzor otpornosti je dat sa $E^i = \rho_{ij}J^j$ pa odgovarajućom identifikacijom dobijamo

$$\hat{\rho} = -\frac{B}{nqc} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Vidimo da sistem bez nečistoća, invarijantan na Galilejeve transformacije, ima samo vandijagonalne elemente tj. samo Holovu otpornost.

1.2. Integralni kvantni Holov efekat

Skoro sto godina nakon otkrića Holovog efekta, 1980. godine van Klicing, koristeći uzorak koji su pripremili Dorda i Peper [1], otkriva tzv. *Integralni kvantni Holov efekat* (IKHE)³

U dve dimenzije Holov otpor je definisan sa

$$R_H = \frac{V_H}{I} \quad (1.13)$$

za koji očekujemo da je proporcijalan magnetnom polju B . Ovo je zaista uočeno u slabim magnetnim poljima. Za dovoljno veliko B (i dovoljno niske temperature) efekti kvantne mehanike se pojavljuju i Holova otpornost nije više linearna po B već grafik zavisnosti Holovog otpora (ili napona) od magnetnog polja B ispoljava određeni broj platoa (Slika 1.3), koji uzimaju vrednost

$$R_H = \frac{1}{\nu} \frac{2\pi\hbar}{e^2} \quad (1.14)$$

$$G_H = \frac{1}{R_H} = \nu \frac{e^2}{2\pi\hbar} \quad (1.15)$$

ili u Holovom naponu

$$V_H = \frac{1}{\nu} \frac{2\pi\hbar}{e^2} I \quad (1.16)$$

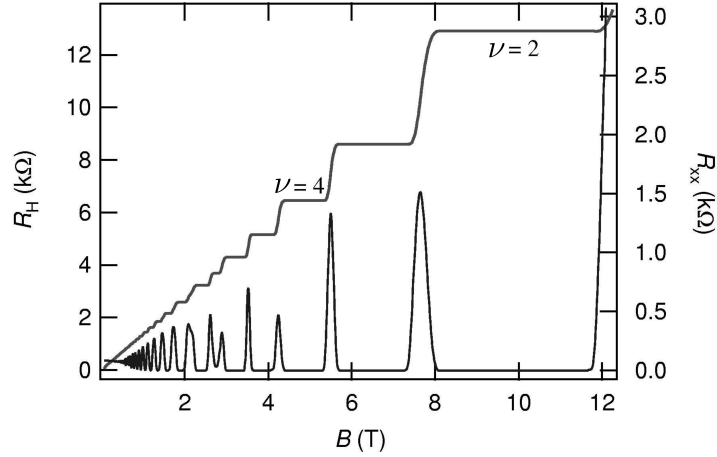
Ono što je takođe prisutno jeste da na mestima gde se javljaju platoi Holovog napona, longitudinalni otpor i napon uzimaju vrednost nula

$$R_L = 0, \quad (1.17)$$

što implicira da imamo stanje bez disipacije slično superfluidu [42].

²Lorencova transformacija tačno daje električno polje koje mora da poništi Lorencovu silu $\frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$

³Otkriće IKHE je povezano sa tehnološkim napretkom u proizvodnji visoko kvalitetnih tranzistora (silikonski MOSFET) za realizaciju 2D elektronskog gasa [30].



Slika 1.3: Integralni kvantni Holov efekat

Platoi se pojavljuju okolo onih vrednosti magnetnog polja tako da je tzv. *frakcija popunjenosti* ili *faktor punjenja*

$$\nu = \frac{n\phi_0}{B} \quad (1.18)$$

celi broj. Ovde je n 2D elektronska gustina, a $\phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}$ kvant fluksa.

Kvantizacija Holovog otpora je univerzalan fenomen [38], tj. nezavisan od pojedinih osobina uzorka kao što je geometrija, materijal u kome je proizveden 2D elektronski gas, i što je najvažnije, nezavisan od koncentracije i distribucije nečistoća uzorka. Ova univerzalnost⁴ je razlog ogromne preciznosti kvantizacije Holovog otpora (provodnosti).

1.3. Landauovi nivoi

Osnovni sastojak u razumevanju kvantnog Holovog efekta jeste Landauova kvantizacija tj. kvantizacija kinetičke energije (slobodnih) naelektrisanih čestica u (ortogonalnom) magnetnom polju.

Posmatramo nerelativističku naelektrisanu česticu mase m i naelektrisanja $q = -e$, koja se kreće u xy ravni u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja \vec{B} ortogonalnog na ravan, $\vec{B} = -B\vec{e}_z$, $B > 0$. Zbog jednostavnosti pretpostavićemo da su naelektrisane čestice bez spina (za dovoljno veliko magnetno polje spinovi čestica postaju polarizovani, tako da Zemanov član možemo odbaciti kao nebitnu konstantu⁵) [40]. Hamiltonijan za ovakav sistem je

$$H = \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m}, \quad (1.19)$$

gde je $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ vektorski potencijal i $\nabla \times \vec{A} = -B\vec{e}_z$. Unošenjem (elektro)magnetnog polja u sistem simetrija sistema postaje lokalna, tako fizički relevantne veličine moraju imati kalibraciono (eng. gauge) invarijantan zapis odnosno fizika ne sme da zavisi od izbora kalibracionog uslova. Ni kanonski impuls \vec{p} ni vektorski potencijal \vec{A} nisu kalibraciono invarijantne veličine, ali tzv. mehanički (kovarijantni) impuls $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ jeste.

Cilj nam je da odredimo spektar čestice u magnetnom polju

$$H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle. \quad (1.20)$$

⁴Ona se vidi i u tome da kada je $R_L = 0$, srednje vreme između sudara $\tau \rightarrow \infty$ u IKHE.

⁵Ovo je opravdano u većini eksperimenata.

Hamiltonijan je zapisan kovarijantno $H = \frac{\pi^2}{2m} = \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{2m}$. Ako potražimo komutator komponenti mehaničkog impulsa

$$[\pi_1, \pi_2] = i\hbar qB = i\hbar qB = i\frac{\hbar^2}{l_B^2}, \quad (1.21)$$

gde je $l_B \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{c\hbar}{qB}}$ tzv. *magnetna dužina*, vidimo da one ne komutiraju, odnosno one su međusobno kanonski konjugovane veličine, tako da je hamiltonijan formalno identičan onom za harmonijski oscilator. Standardno se definišu reprezentacije korenih vektora (poznatijih kao operatori podizanja i spuštanja)

$$\begin{aligned} a^\dagger &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}}(\pi_1 - i\pi_2), \\ a &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}}(\pi_1 + i\pi_2), \end{aligned} \quad (1.22)$$

koje zadovoljavaju komutacionu relaciju $[a, a^\dagger] = 1$ (bozonska algebra). Hamiltonijan je tada oblika

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger). \quad (1.23)$$

Možemo konstruisati prostor stanja, počevši od definisanja osnovnog stanja $|0\rangle$ sa $a|0\rangle = 0$, a zatim izgradnjom ostatka delovanjem na njega sa a^\dagger

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle. \end{aligned}$$

Stanje $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ ima energiju

$$E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.24)$$

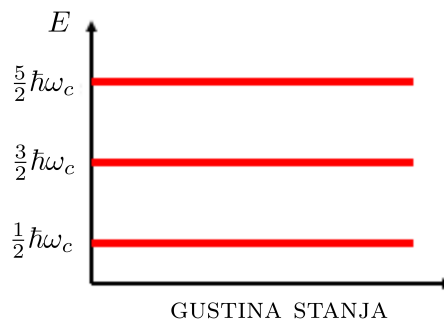
Dakle, u prisustvu magnetnog polja energetske nivoe čestice postaju ekvidistantni sa procepom između svakog nivoa širine $\hbar\omega_c$. Ovi energetske nivoe nazivaju se *Landauovi nivoe* [40].

1.3.1. Vektor centra orbite

Ako primetimo da smo krenuli sa dva stepena slobode, a završili sa jednim, jasno je da Landauov nivo nije određen jedinstveno, već postoji degeneracija stanja. Ova degeneracija je posledica lokalne (gauge) simetrije. Da bismo “videli” degeneraciju (tj. iscrpeli svojstveni potprostor određen sa $|n\rangle$) moramo naš skup operatora proširiti sa još jednim međusobno konjugovanim parom, koji komutiraju sa H .

Analogno klasičnoj teoriji uvodimo *vektor centra orbite* po kojoj se čestica kreće

$$\begin{aligned} \vec{R} = (X, Y) &= \vec{r} - \frac{l_B^2}{\hbar} \vec{e}_z \times \vec{\pi}, \\ X &= x + \frac{l_B^2}{\hbar} \pi_2, \\ Y &= y - \frac{l_B^2}{\hbar} \pi_1. \end{aligned} \quad (1.25)$$



Slika 1.4: Landauovi nivoe

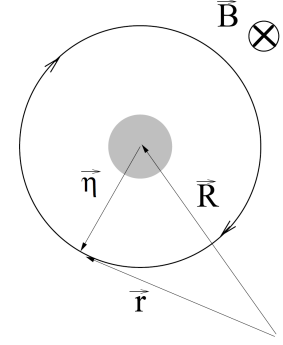
\vec{R} je konstanta kretanja, što se može videti računanjem komutatora $[X, H] = 0$ i $[Y, H] = 0$. Takođe može se proveriti da su koordinate centra orbite međusobno kanonski konjugovane veličine

$$[X, Y] = -il_B^2. \quad (1.26)$$

To znači da važi Hajzenbergova relacija neodređenosti

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{l_B^2}{2}, \quad (1.27)$$

koja kaže da ne možemo istovremeno lokalizovati stanje sa obe, X i Y koordinate, a mera te neodređenosti je upravo magnetna dužina l_B .



Slika 1.5: Vektor centra orbite

1.3.2. Degeneracija Landauovog nivoa

Degeneracija određenog Landauovog nivoa jednaka je broju dopuštenih stanja na datoj (makroskopskoj) površini A . Komutaciona relacija $[X, Y] = il_B^2$ je analogna komutacionoj relaciji između položaja i impulsa $[x, p] = -i\hbar$ čestice u 1D prostotru (jer oba para zadovoljavaju tzv. Hajzenbergovu algebru). Ako je dužina tog prostora L , onda je impuls kvantovan sa $p = \frac{2\pi\hbar}{L}n$ ($n \in \mathbb{Z}$), pa je širina između dva susedna stanja impulsa $\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{L}$. Ako L_p predstavlja interval svih mogućih vrednosti impulsa, onda je degeneracija stanja na površini faznog prostora $L \cdot L_p$

$$\frac{L_p}{\Delta p} = \frac{L_p \cdot L}{2\pi\hbar}$$

Kod 1D čestice veličina $2\pi\hbar$ predstavlja elementarnu ćeliju (kvant dejstva) faznog prostora. U slučaju Landauovog nivoa, po analogiji sledi da je A površina i prostora stanja, a $2\pi l_B^2$ je njegoa elementarna ćelija (l_B^2 igra ulogu \hbar). Odatle sledi da je degeneracija Landauovog nivoa

$$N_\phi = \frac{A}{2\pi l_B^2} = \frac{AB}{2\pi l_B^2 B} = \frac{\Phi}{\phi_0} \quad (1.28)$$

gde je Φ ukupan fluks kroz površinu A , a $\phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{q}$ je kvant fluksa. Dakle, degeneracija Landauovog nivoa je jednaka broju kvanata fluksa kroz površinu sistema [40].

1.3.3. Jednočestični bazis

Koordinate centra orbite, X i Y ne komutiraju međusobno, ali komutiraju sa komponentama mehaničkog impulsa π_1 i π_2 , kao i sa H . S tim u vezi, ponovo na sličan način definišemo reprezentacije korenih vektora

$$b^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X + iY) \quad (1.29)$$

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X - iY) \quad (1.30)$$

koje zadovoljavaju $[b, b^\dagger] = 1$. Operatori b i b^\dagger komutiraju sa a , a^\dagger i H tako da za neko stanje svojstvene energije E_n možemo operatorima b i b^\dagger iscrpeti ceo potprostor, odnosno dobiti sva stanja koja odgovaraju istoj energiji. Počevši od osnovnog stanja

$$a|0, 0\rangle = 0 \text{ i } b|0, 0\rangle = 0 \quad (1.31)$$

sa operatorima podizanja možemo izgraditi bazis

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle, \quad (1.32)$$

gde $n = 0, 1, \dots$ karakteriše Landauove nivoe energije $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$, dok $m = 0, 1, \dots, N_\phi$ prebrojava stanja iste energije.

1.3.4. Talasne funkcije u simetričnoj kalibraciji

Da bi konkretno odredili talasne funkcije neophodno je da izaberemo kalibracioni uslov. Odabir kalibracionog uslova zavisi od toga koju simetriju želimo da sačuvamo.

Biranjem tzv. *Landauovog kalibracionog uslova* [40]

$$\vec{A} = B(y, 0, 0), \quad (1.33)$$

hamiltonijan nema zavisnost od x koordinate i stoga komutira sa p_x . To implicira da je $p_x = \hbar k_x$ dobar kvantni broj i (pošto je impuls generator translacija) da je sistem translaciono invarijantan duž x ose. Dobijanje talasnih funkcija stanja u Landauovoj kalibraciji pogledati u [31]. Mi ćemo ovde nastaviti sa radom u tzv. *simetričnoj kalibraciji*

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2} = \frac{B}{2}(y, -x, 0). \quad (1.34)$$

Ovakav izbor narušava translacionu simetriju u oba pravca, ali održava rotacionu oko koordinatnog početka. Ovo znači da je ugaoni momenat dobar kvantni broj.

Dalje, prelazimo na nezavisne kompleksne promenljive

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Tada je

$$a^\dagger = -i\sqrt{2} \left(l_B \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{4l_B} \right) \quad (1.36)$$

$$a = -i\sqrt{2} \left(l_B \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{4l_B} \right) \quad (1.37)$$

$$b^\dagger = \sqrt{2} \left(l_B \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}}{4l_B} \right) \quad (1.38)$$

$$b = -\sqrt{2} \left(l_B \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{z}{4l_B} \right) \quad (1.39)$$

Ugaoni momenat $L = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ se lako može izraziti preko ovih operatora

$$L = \hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \hbar(b^\dagger b - a^\dagger a) \quad (1.40)$$

odakle se jasno vidi da ugaoni momenat komutira sa hamiltonijanom, $[L, H] = 0$. Pošto je $b^\dagger b |n, m\rangle = m |n, m\rangle$ i $a^\dagger a |n, m\rangle = n |n, m\rangle$ sledi da je

$$L |n, m\rangle = (m - n)\hbar |n, m\rangle. \quad (1.41)$$

u n -tom Landauovom nivou, odnosno

$$L |0, m\rangle = m\hbar |0, m\rangle \quad (1.42)$$

u najnižem.

Sada ćemo odrediti talasne funkcije bazisa. Talasnu funkciju osnovnog stanja $\psi_{0,0}(z, \bar{z}) = \langle z, \bar{z} | 0, 0 \rangle$ možemo dobiti iz uslova $\langle z, \bar{z} | a | 0, 0 \rangle = \langle z, \bar{z} | b | 0, 0 \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle z, \bar{z} | a | 0, 0 \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \left(l_B \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{4l_B} \right) \psi_{0,0}(z, \bar{z}) &= 0 \Rightarrow \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = C_1(z) \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right) \\ \langle z, \bar{z} | b | 0, 0 \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \left(l_B \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{z}{4l_B} \right) \psi_{0,0}(z, \bar{z}) &= 0 \Rightarrow \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = C_2(\bar{z}) \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right) \end{aligned}$$

Iz $C_1(z) = C_2(\bar{z}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} C_1(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} C_2(\bar{z}) = 0 \Rightarrow C_1(z) = C_0 = \text{const.}$, pa je talasna funkcija osnovnog stanja u simetričnoj kalibraciji

$$\psi_{0,0}(z, \bar{z}) = C_0 e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \quad (1.43)$$

gde je C_0 normalizaciona konstanta. Dejstvom operatora b^\dagger možemo lako da odredimo sva stanja unutar najnižeg Landauovog nivoa

$$\psi_{0,m}(z, \bar{z}) = \langle z, \bar{z} | 0, m \rangle = \frac{(b^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \psi_{0,0}(z, \bar{z}) = \frac{z^m}{l_B^m \sqrt{2\pi 2^m m!}} e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \quad (1.44)$$

Primitimo da su talasne funkcije najnižeg Landauovog nivoa polinomi po z (do na Gausov faktor), što znači da su one *analitičke* funkcije po z [40].

1.3.5. Faktor punjenja

Do sada smo govorili samo o jednoj naelektrisanjoj čestici (elektronu) i njenim mogućim stanjima. Ako zanemarimo međučestičnu interakciju, dodavajući čestice u isti sistem one najpre popunjavaju stanja najnižeg Landauovog nivoa (kada smo na $T = 0$) i to sve dok ne iscrpe degeneraciju, posle čega prelaze na sledeći nivo itd. U tu svrhu korisno je definisati faktor punjenja kao odnos broja čestica (elektrona) u sistemu i broja kvanata fluksa

$$\nu = \frac{N_e}{N\phi} = \frac{2\pi n\hbar}{qB} = \frac{n\phi_0}{B}, \quad (1.45)$$

gde je n gustina čestica. Primitimo da je ν inverzno proporcijalno jačini magnetnog polja, tako da sa porastom ove jačine Landauov nivo može da primi sve više i više čestica.

1.4. Popunjeni Landauovi nivoi i nekompresibilnost

Za proizvoljno ν , ako zanemarimo međučestičnu interakciju i u odsustvu nečistoća, osnovno stanje je izuzetno degenerisano, pošto elektroni u delimično popunjenom Landauovom nivou mogu biti raspoređeni na ogroman broj načina [31]. Za celobrojni faktor punjenja, $\nu \in \mathbf{N}$, osnovno stanje je jedinstveno. Talasna funkcija osnovnog stanja jednog popunjenog Landauovog nivoa u simetričnoj kalibraciji ima jednostavan oblik dat sa (do na normalizacioni faktor)

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_j |z_j|^2} = \prod_{j < k} (z_j - z_k) e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_j |z_j|^2}, \quad (1.46)$$

gde smo iskoristili da je Vandermond determinata jednaka $\prod_{j < k} (z_j - z_k)$.

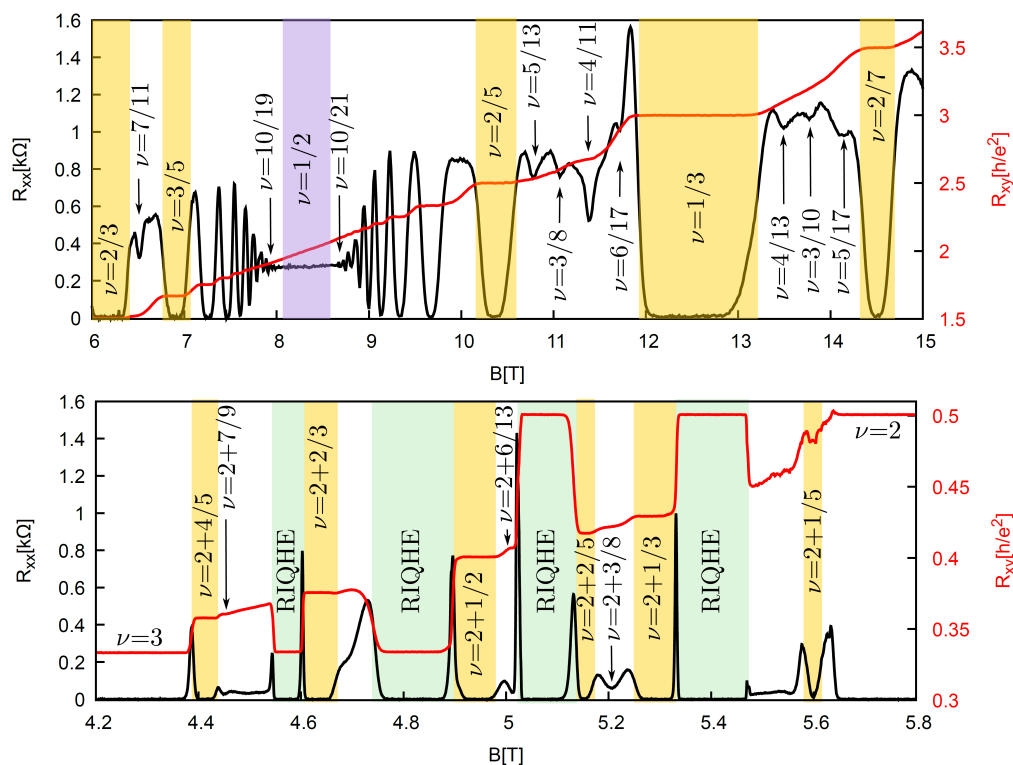
Popunjeni Landauovi nivoi imaju važnu osobinu, a to je da su *nekompresibilni* [32, 43]. Kada je celi broj ν Landauovih nivoa popunjen postoji diskontinuitet hemijskog potencijala $\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_B$, jer dodavanje dodatnog elektrona zahteva energiju $\hbar\omega_c$ (koliki je razmak između Landauovih nivoa), i posledično izotermalna kompresibilnost $K^{-1} = \rho^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_T$ postaje nula. Drugim rečima, sistem sa popunjenim Landauovim nivoima je nekompresibilan, jer infinitezimalno kompresovanje sistema, zbog procepa između osnovnog i prvog pobuđenog stanja, zahteva konačnu količinu energije.

Nekompresibilnost stanja za celobrojno ν i pad longitudinalnog otpora R_L na nulu je direktna posledica strukture Landauovih nivoa. Da bi platoi Holovog otpora bili formirani neophodno je uvrstiti u sistem i nečistoće [40] (koje se inače pojavljuju u realnom eksperimentu). Ukratko, nečistoće modifikuju spektar tako što se degenerisana stanja Landauovih nivoa u njihovom prisustvu šire i obrazuju zone. Jednočestična stanja koja su blizu neperturbovane energije E_n formiraju zone produženih (eng. extended) stanja [45]. Ove zone su razdvojene sa lokalizovanim stanjima koja ne doprinose transportu (tzv. pokretni procep), i sve fok je Fermi nivo na ovim lokalizovanim stanjima, Holov otpor se ne menja. Više o ulozi nečistoća u formiranju platoa Holovog otpora (ili provodnosti) pogledati u [40].

2. Frakcioni kvantni Holov efekat

Otkriće integralnog kvantnog Holovog efekta je dovela do značajnog povećanja interesa za 2D elektronske sisteme, i do 1982. godine istraživači su počeli da osećaju sigurnost u razumevanju zašto Holov otpor (provodnost) mora biti kvantovana veličina. Otkriće iste godine *Frakcionog kvantnog Holovog efekta* (FKHE) od strane Cui, Stormer i Gosarda [2] došlo je kao veliko iznenađenje, što svedoči naziv “anomalni kvantni Holov efekat”, kako je nazvan u ranim radovima.

Prvi plato koji je primećen je za $\nu = \frac{1}{3}$. Ubrzo nakon toga primećeni su platoi na $\nu = \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$ u okviru najnižeg Landauovog nivoa, takođe i $\nu = \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots$ u okviru viših. Do danas je zabeleženo preko 100 platoa. Većina ima neparan imenilac, ali postoje i izuzeci kao što su $\nu = \frac{5}{2}$ i $\frac{7}{2}$.



Slika 2.1: Eksperimentalna merenja Holovog otpora R_H i longitudinalnog otpora R_{xx} kao funkcije magnetnog polja B primenjenog normalno na 2D elektronski gas

U korenu kvantizacije IKHE leži nekompresibilnost koja se javlja sa tačno popunjenim Landauovim nivoima. Ono što je potrebno za slično razumevanje frakcionog KHE je nekakav mehanizam zbog kojeg određene frakcije ν imaju osnovno stanje sa istom osobinom. Odmah je bilo jasno da moramo, za jedan takav mehanizam, da uključimo interakciju između elektrona. Samo interakcije mogu da dovedu do postojanja procepa u ovakvom sistemu, i način na koji one to čine predstavlja jedinstven primer jako korelisanih sistema, a ubrzo ćemo videti i zašto.

Kako uslovi FKHE nalažu, zbog jakog magnetnog polja Kulonova interakcija između elektrona je mnogo manja od ciklotronske (kinetičke) energije (koja je ista za sve elektrone koji

pripadaju istom Landauovom nivou), ali sa druge strane, zbog zahteva visoke mobilnosti (čistoće) uzorka je mnogo veća od potencijala koji dolazi od nečistoća. Na ovaj način je data hijerarhija energetske skale u FKHE

$$\hbar\omega_c \gg V_C \gg V_{\text{disorder}}. \quad (2.1)$$

S tim u vezi možemo da zanemarimo:

1. prisustvo nečistoća – one su svakako važne kao i kod IKHE za formiranje platoa konačne širine, ali pošto nas zanima samo mehanizam formiranja nekompresibilnih stanja, možemo ih ignorisati;
2. mešanje Landauovih nivoa i da odbacimo kinetičku energiju kao irelevantnu konstantu;
3. Zemanov član, jer zbog jakog magnetnog polja možemo pretpostaviti da su svi spinovi polarizovani.

Na kraju dolazimo do efektivnog hamiltonijana koji u sebi ima samo Kulonov član

$$H = \sum_{i < j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (2.2)$$

gde je Hilbertov prostor ograničen na samo jedan delimično popunjen Landauov nivo [42].

Ovde već vidimo da problem FKHE nosi u sebi jednu fundamentalnu težinu. Obično mnogočestični problem rešavamo tako što na početku isključimo interakciju, koju kasnije dodajemo perturbativno. Međutim u našem problemu jedino interakcija figuriše. Čak i ako bismo za trenutak zanemarili interakciju to bi proizvelo ogroman broj osnovnih stanja, što je u vezi sa izuzetno visokom degeneracijom Landauovih nivoa. U odsustvu interakcije ni jedno stanje nije izdvojeno od ostalih za bilo koju frakciju popunjenosti. Kada uključimo interakciju degeneracija se narušava i jedna linearna kombinacija dozvoljenih stanja postaje nedegenerisano osnovno stanje. Ostaje pitanje kako do njega doći? Smatra se da je talasna funkcija koju je Laffin [3] predložio na osnovu malog broja pretpostavki prvi veliki korak u objašnjenju FKHE.

2.1. Laffinova talasna funkcija

Talasna funkcija koju je 1983. godine Laffin predložio za stanje na frakciji popunjenosti $\nu = \frac{1}{m}$, gde je m neparan broj, je oblika

$$\Psi_0(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2} \quad (2.3)$$

Ona je antisimetrična kada je m neparan broj, a simetrična kada je m parno.

Da bismo motivisali Laffinov anzac pođimo sa razmatranjem sistema od dve čestice u najnižem Landauovom nivou, koje međusobno interaguju sa potencijalom $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ [41]. Da bismo imali održanje ugaonog momenta izaberimo simetričan kalibracioni uslov $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$. U njemu su kao što smo ranije videli jednočestične talasne funkcije najnižeg LL oblika

$$\psi_m = \frac{z^m}{l_B^m \sqrt{2\pi 2^m m!}} e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \quad (2.4)$$

Ova stanja su lokalizovana na prstenu radijusa $r = \sqrt{2(m+1)}l_B$, a eksponent m označava ugaoni moment: $L\psi_m = \hbar m\psi_m$. Sada možemo da pretpostavimo oblik dvočestične talasne funkcije

$$\Psi_{M,m} \sim (z_1 + z_2)^M (z_1 - z_2)^m e^{-\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{4l_B^2}} \quad (2.5)$$

gde su M i m (do na \hbar) ugaoni moment centra mase i relativni ugaoni moment, respektivno. Za elektrone (fermione) m mora da bude neparan broj i može se smatrati merom međučestičnog rastojanja.

Dalje, operator interakcije između dve čestice

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \int \frac{dq}{(2\pi)^2} V(\vec{q}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \quad (2.6)$$

možemo pomoću razlaganja vektora kordinate $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \frac{l_B^2}{\hbar} \vec{e}_z \times \vec{\pi}_i$ da projektujemo u određeni LL

$$V_{ij} = \int \frac{dq}{(2\pi)^2} \left| \langle n | e^{\frac{i l_B^2}{\hbar} \vec{q} \cdot (\vec{e}_z \times \vec{\pi}_i)} | n \rangle \right|^2 V(\vec{q}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)}$$

Projektovana interakcija komutira sa operatorom relativnog ugaonog momenta dve čestice

$$l_{ij} = \frac{\hbar}{4l_B^2} \left| \vec{R}_i - \vec{R}_j \right|^2 - \frac{\hbar}{2} \quad (2.7)$$

čija svojstvena stanja su (2.5) u najnižem LL. Jednom takvom stanju možemo stoga pripisati energiju

$$v_m = \frac{\langle M, m | V_{ij} | M, m \rangle}{\langle M, m | M, m \rangle}. \quad (2.8)$$

Ove svojstvene vrednosti potencijala V obično nazivamo *Holdejnovim pseudopotencijalom* [30]. Za centralni potencijal one ne zavise od ugaonog momenta centra mase M . Važno je primetiti da su stanja diskretna, što znači da svako stanje $|M, m\rangle$ možemo posmatrati kao vezano stanje dve čestice iako je potencijal odbojan. Ceo halmitonijan možemo napisati u obliku

$$H_{ij} = \sum_m v_m P_m^{ij}, \quad (2.9)$$

gde je P_m^{ij} projektor na stanje dve čestice sa relativnim ugaonim momentom m .

Sada posmatramo sistem od $N \gg 1$ čestica u najnižem LL. Laffin je funkciju osnovnog stanja tražio u obliku

$$\Psi_0(z_1, \dots, z_N) = f(z_1, \dots, z_N) e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2},$$

gde je $f(z_1, \dots, z_N)$ neka analitička funkcija koja mora biti antisimetrična na zamenu bilo koja dva indeksa $z_i \leftrightarrow z_j$. Uzimajući da dominiraju dvočestične korelacije dolazimo do tzv. Jastrow zapisa

$$\Psi_0(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} g(z_i - z_j) e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}. \quad (2.10)$$

Ali čim pretpostavimo ovakav oblik nameće se da je

$$g(z_i - z_j) \sim (z_i - z_j)^k$$

Ostaje nam da odredimo k tako da ukupna talasna funkcija Ψ_0 opisuje elektrone u najnižem Landauovom nivou na frakciji popunjenosti $\nu = \frac{1}{m}$. U tu svrhu posmatramo jednu česticu unutar funkcije Ψ_0 . Činioci koji sadrže u sebi npr. z_1 su $\prod_{i=1}^N (z_1 - z_i)^k$. U ovom polinomu najviši stepen čestice z_1 je $k(N-1)$, što predstavljan njen maksimalni ugaoni moment, a to je dalje ujedno i njen broj kvanata fluksa kroz sistem N_ϕ . U termodinamičkom limesu $N \rightarrow \infty$:, $N_\phi = kN_e$ i iz fiksiranosti punjenja $\nu = \frac{1}{m}$ sledi da je $k = m$. Tako dobijamo Laffinovo rešenje (2.11):

$$\Psi_0(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2} \quad (2.11)$$

Sa gledišta interakcije ovaj izbor je potpuno opravdan. Svaki elektron ima ne samo jednu (zbog Paulijevog principa) nego m nula funkcije na svakom elektronu (sem njega). Stoga, približavajući se drugom elektronu funkcija opada kao stepena funkcija rastojanja sa stepenom m i verovatnoća da se elektron nađe u blizini drugog elektrona je prigušena i minimizacija interakcione energije je veoma efikasna [39].

Takođe, možemo primetiti iz oblika Laffinove funkcije da u slučaju kada je $m = 1$ (odnosno $\nu = 1$) dobijamo tačno Vodermond determinatu (do na eksponencijalni faktor) (1.46) za koju smo ranije videli da opisuje potpuno popunjen najniži LL.

Dalje, možemo upotrebiti pseudopotencijale da konstruišemo N-čestični hamiltonijan

$$H = \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{i<j} v_{m'} P_{m'}^{ij}, \quad (2.12)$$

gde je $P_{m'}^{ij}$ projektor na stanje u kome i -ta i j -ta čestica imaju relativan ugaoni moment m' . Lako je videti da je za tzv. "odsečen" potencijal [38]

$$v_{m'} = \begin{cases} 1, & m' < m \\ 0, & m' \geq m \end{cases} \quad (2.13)$$

Laffinova talasna funkcija (2.11) svojstvena sa energijom nula. Pošto ovakav model opisuje potpuno odbojnu interakciju, svako stanje mora imati energiju $E \geq 0$, pa je Laffinova talasna funkcija egzaktno osnovno stanje modela. Štaviše, ona je jedino stanje sa energijom nula, pošto ako uzmemo da se ukupan broj čestica i fluks održavaju, svako drugo stanje različito od Laffinovog će imati par čestica u stanju sa kvantnim brojem ugaonog momenta različitim od m : ako je manji od m to će zahtevati dodatnu energiju zbog $v_{m'} = 1$ kad je $m' < m$, ali ako je par u stanju sa $m' > m$, onda da bi se održao faktor punjenja postoji najmanje jedan par sa $m' < m$ i taj par doprinosi povećanju energije. Ovakav argument pokazuje da bilo kakvo pobudeno stanje mora imati konačnu i pozitivnu energiju stečenu od pseudopotencijala $v_{m'}$ za $m' < m$, što igra ulogu energetske procepa. U tom slučaju stanje koje opisuje Laffinova talasna funkcija je zaista nekompresibilno stanje.

Ipak, elektroni ne interaguju sa potencijalom (2.13), već sa Kulonovim potencijalom. Uprkos tome, pravo osnovno stanje za Kulonovu interakciju dobijeno numerički je pokazalo preklapanje od čak 98% sa Laffinovom funkcijom.

2.1.1. Kvazičestične ekscitacije

Može se pokazati (pomoću analogije sa plazmom [30]) da sistem koji se nalazi u stanju opisanim Laffinovom talasnom funkcijom ima uniformnu gustinu. Svaka perturbacija ove gustine se dešava u diskretnim jedinicama naelektrisanja poznatim ako *kvazičestice*. Pozitivno naelektrisane izbočine naelektrisanja su tzv. kvazišupljine, dok su negativne kvazičestice.

Uzmimo za primer talasnu funkciju koja opisuje kvazišupljinu na poziciji $\eta \in \mathbf{C}$ [41]

$$\psi_{qh}(\eta) = \prod_{i=1}^N (z_i - \eta) \prod_{k<l} (z_k - z_l)^m e^{-\frac{1}{4l^2 B} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}. \quad (2.14)$$

Vidimo da gustina elektrona nestaje u tački η . Generalno, možemo uvesti M kvazišupljina na poziciji $\eta_j, j = 1, \dots, M$

$$\Psi_{Mqh}(\eta_1, \dots, \eta_M) = \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N (z_i - \eta_j) \prod_{k<l} (z_k - z_l)^m e^{-\frac{1}{4l^2 B} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}. \quad (2.15)$$

Dok su z -ovi koordinate fizičkih elektrona (dinamičke promenjive), η su parametri talasne funkcije. Funkcija $\Psi(\eta_1, \dots, \eta_M; z_1, \dots, z_N)$ je talasna funkcija elektrona u prisustvu kvazišupljina fiksiranih na η poziciji.

Za $\nu = \frac{1}{m}$, ako ubacimo m kvazišupljina u istu tačku η , tada talasna funkcija postaje

$$\Psi_{mqh}(\eta) = \prod_{i=1}^N (z_i - \eta)^m \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}. \quad (2.16)$$

Kada bi η bila dinamička promenjiva, onda bismo imali originalnu talasnu funkciju sa dodatnim elektronom na poziciji η . Ali, pošto je η parametar, talasna funkcija (2.16) opisuje deficit elektrona na mestu η , odnosno ona opisuje pravu šuljinu $q_h = e$. Ovo znači da se m kvazišupljina ponaša kao jedna obična šupljina i stoga (heuristički) vidimo da kvazišupljine nose frakciono naelektrisanje

$$e^* = \frac{e}{m}. \quad (2.17)$$

Jedna interesantna posledica frakcionog naelektrisanja kvazišupljine je da imaju tzv. netrivialnu (Abelovu) statistiku [41].

2.2. Čern-Sajmons transformacija

Zanimljiv prilaz FKHE preko efektivne teorije polja razvili su Ženg, Henson i Kivelson [46]. Osnovna ideja njihovog rada sastoji se u primeni singularne gejdž (eng. gauge) transformacije na koordinate elektrona, preslikavajući time problem interakcionog elektronskog gasa na problem inerakcionih bozona uz dodatnu gejdž interakciju. U ovoj reprezentaciji elektrone vidimo kao kompozit naelektrisanog bozona i fluks tube sa neparnim brojem kvanata fluksa $\phi_0 = \frac{hc}{q}$.

Prateći Ženga [47] polazimo od mikroskopskog hamiltonijana za 2D (polarizovane) elektrone u spoljašnjem potencijalu A_μ ,

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i \left(\vec{p}_i - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}_i) \right)^2 + \sum_i q A_0(\vec{x}_i) + \sum_{i < j} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

Šredingerova jednačina

$$H\Psi(x_1, \dots, x_N) = E\Psi(x_1, \dots, x_N), \quad (2.19)$$

određuje svojstvene vrednosti koje nas interesuju. U cilju da pređemo na bozonski problem uvodimo unitarnu transformaciju (koja je analogna fazi Laflinove funkcije)

$$U = e^{-i \sum_{i < j} m \alpha_{ij}} \quad (2.20)$$

tako da je $\Phi(x_1, \dots, x_N) = U\Psi(x_1, \dots, x_N)$ talasna funkcija koja opisuje bozone, α_{ij} je ugao koji zaklapa relativan vektor položaja i -te i j -te čestice sa x -osom, a m je neparan ceo broj. Može se pokazati da dejstvom ove transformacije na hamiltonijan H dobijamo hamiltonijan

$$H' = \frac{1}{2m} \sum_i \left(\vec{p}_i - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}_i) - \frac{q}{c} \vec{a}(\vec{x}_i) \right)^2 + \sum_i q A_0(\vec{x}_i) + \sum_{i < j} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.21)$$

u kome vidimo da se dodatno pojavila gejdž interakcija u vidu vektorskog potencijala

$$\vec{a}(\vec{x}_i) = \frac{m\phi_0}{2\pi} \sum_{j \neq i} \vec{\nabla}_i \alpha_{ij}. \quad (2.22)$$

Upravo za m neparno, Šredingerove jednačine

$$\begin{aligned} H\Psi &= E\Psi \\ H'\Phi &= E\Phi \end{aligned}$$

definišu isti svojstveni problem.

Dalje, uvodeći gustinu $\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$ dobijamo da je

$$\vec{a}(\vec{x}) = \frac{m\phi_0}{2\pi} \int dy \vec{\nabla} \alpha(x, y) \rho(\vec{y}). \quad (2.23)$$

odakle lako vidimo da \vec{a} zadovoljava jednačinu

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{x}) = m\phi_0 \rho(\vec{x}) \quad (2.24)$$

Zaključujemo da su čestice izvor gejdž potencijala koji opet na njih povratno deluje. Uzimajući vremenski izvod jednačine (2.24) uz jednačinu kontinuiteta

$$\dot{\rho}(x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0 \quad (2.25)$$

dobijamo $\vec{\nabla} \times \dot{\vec{a}} = \phi_0 m \dot{\rho} = -\phi_0 m \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$, odnosno

$$\epsilon^{\alpha\beta} \dot{a}_\beta(\vec{x}) = -m\phi_0 j^\alpha \quad (2.26)$$

Jednačine (2.24) i (2.26) u potpunosti određuju gejdž polje $\vec{a}(\vec{x}, t)$ i možemo ih posmatrati kao analogon Maksvelovih jednačina koje izvodimo iz dejstva

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \quad (2.27)$$

Za gejdž polje \vec{a} ispostavlja se da je dejstvo tzv. Čern-Sajmonsov član (CS)

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{e}{2m\phi_0} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu a_\rho - a_\mu j^\mu. \quad (2.28)$$

Kad izaberemo kalibracioni uslov $a_0 = 0$, variranjem CS lagranžijana po komponentama gejdž polja dobijamo jednačine (2.24) i (2.26).

CS član, iako je izražen preko gejdž potencijala umesto preko tenzora jačine polja, on je invarijantan na kalibracione transformacije (do na površinski član):

$$a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \Lambda(\vec{x}, t) \Rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\nu \Lambda) a_\rho) \quad (2.29)$$

Ukupno dejstvo bozonskog polja Φ sa gejdž poljem a_μ je

$$S = S_\Phi + S_a = \int d^3x \mathcal{L}_\Phi + \int d^3x \mathcal{L}_a, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}_\Phi = \Phi^\dagger (i\hbar\partial_0 - e(A_0 + a_0)) \Phi - \mathcal{H}, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}_a = \frac{e}{2m\phi_0} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \partial_\nu a_\rho. \quad (2.32)$$

Tražimo rešenje, u aproksimaciji srednjeg polja, dejstva (2.30) kad fiksiramo spoljašnji elektromagnetni potencijal $A_0 = 0$ i $\vec{\nabla} \times \vec{A} = -B$, gde je B spoljašnje uniformno magnetno polje. Ako izaberemo najprostiji oblik rešenja

$$\Phi(x) = \sqrt{\rho}, \quad \vec{a}(x) = -\vec{A}(x), \quad a_0(x) = 0 \quad (2.33)$$

gde je $\bar{\rho}$ srednja gustina čestica, može se pokazati da ono zadovoljava obe jednačine kretanja koje se dobijaju iz dejstva (2.30), ali uz određeni uslov. Kada rešenje (2.33) ubacimo u jednačinu $\text{rot} \vec{a} = m\phi_0 \dot{\rho}(x)$ dobijamo da je

$$B = m\phi_0 \bar{\rho} \Rightarrow \nu = \frac{\bar{\rho}}{\frac{B}{\phi_0}} = \frac{1}{m}. \quad (2.34)$$

Dakle, rešenje (2.33) je jedino moguće na frakciji popunjenosti $\nu = \frac{1}{m}$.

Rešenje u aproksimaciji srednjeg polja $\Phi(x) = \sqrt{\bar{\rho}}$ opisuje bozonsko superfluidno stanje. Pošto bozoni vide kombinaciju gejdž polja $\vec{a}(x)$ i spoljašnjeg polja $\vec{A}(x)$, formiranje uniformnog superfluida je jedino moguće kada se ova dva polja anuliraju tj. $\vec{a}(x) + \vec{A}(x) = 0$, a zbog veze gejdž polja $\vec{a}(x)$ sa gustinom bozona (2.24), ovo poništavanje se javlja isključivo kada je $\nu = \frac{1}{m}$.

Poznato nam je da naelektrisani Boze kondenzat ispoljava Majnsnerov efekat. Upravo ovaj efekat vodi nekompresibilnosti početnog sistema elektrona. Zašto? Zbog jednačine (2.24) svaka lokalna promena gustine indukuje promenu u gejdž polju \vec{a} što dalje rezultuje postojanju efektivnog fluksa u istoj oblasti. Ipak zbog Majnsnerovog efekta ovaj fluks ne može ući u naelektrisani Boze superfluid što dalje znači da i uniformnost gustine čestica mora biti održana tj. fluid je nekompresibilan. Nekompresibilnost može biti eksplicitno pokazana ako potražimo funkciju odziva sistema. Za više detalja o tome pogledati rad [47].

2.3. Kompozitni fermioni

Nedugo posle otkrića najistaknutijeg FKHE stanja na $\nu = \frac{1}{3}$, primećen je i čitav niz stanja na punjenju $\nu = \frac{n}{2pm \pm 1}$. U prvom teorijskom pristupu, ovaj niz stanja je interpretiran u okviru tzv. hijerarhijskih šema [4, 5]. Mi ćemo ovde pažnju posvetiti alternativnom viđenju ovih hijerarhija pomoću koncepta kompozitnih fermiona, koji je predložio Dž. Džein [6] 1989. godine. Do kraja odeljka pratimo konvenciju iz [40] po kojoj je $z = x - iy$ i $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $B > 0$.

Pre nego što definišemo šta je kompozitni fermion treba objasniti šta podrazumevamo za *vorteks* u FKHE. Obično u fizici kondenzovane materije vorteks definišemo sa osobinom da kompletan obilazak oko njega dovodi do skoka od 2π u fazi parametra uređenja. Međutim u FKHE vorteks ima malo drugačije značenje. Pre svega pošto magnetno polje narušava simetriju vremenske inverzije, talasna funkcija koja opisuje stanje FKHE stoga nije realna. Ako je magnetno polje dovoljno jako, tako da se svi elektroni nalaze u najnižem LL, talasna funkcija ima oblik polinoma (do na Gausov faktor) po $z_j = x_j - iy_j$. Znamo iz osobina kompleksnih funkcija da $z - \eta$ ima vorteks u η pošto potpuni obilazak oko njega menja fazu za -2π . Dakle vorteksi FKHE se javljaju u samoj talasnoj funkciji. Na primer ako talasna funkcija sadrži faktor tipa $(z_1 - z_2)^{2p}$ reći ćemo da čestica 1 vidi $2p$ vorteksa na čestici 2 i obratno. Ako uzmemo Laffinovu ekscitaciju, npr. kvazišupljinu

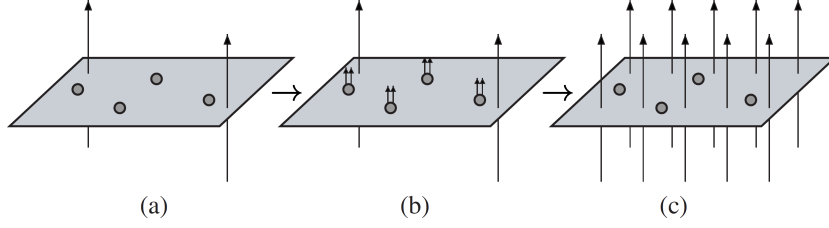
$$\psi_{qh}(\eta) = \prod_{i=1}^N (z_i - \eta) \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\frac{1}{4i^2 B} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}. \quad (2.35)$$

ona cela predstavlja vorteks koji stoga nosi frakciono naelektrisanje $\frac{e}{m}$. Zbog suprotnosti u naelektrisanju mogli bismo očekivati da se elektroni prirodno vezuju za njih i tu dolazimo do pojma kompozitnih fermiona.

Kompozitni fermion (KF) predstavlja vezano stanje elektrona i parnog broja vorteksa¹.

¹Ponekad se kompozitni fermioni opisuju kao vezano stanje elektrona i parnog broja kvantata magnetnog fluksa (slično kao što smo videli kod Ženga prilikom formiranja kompozitnih bozona (Odeljak 2.2). Ovakav opis za KF ima svoje opravdanje u tome da su vorteks i kvant fluksa topološki slični u smislu da oboje proizvode isto namotavanje (eng. winding) faze: vorteks po definiciji proizvodi faznu promenu od 2π za zatvorenu putanju oko

Da bismo uočili značaj novih stepena slobode pođimo od sistema neinteragujućih elektrona na punjenju $\nu^* = n \in \mathbf{N}$ (Slika 2.2 (a)). Pošto se radi o IKHE jasno nam je da je sistem nekompresibilan tj. osnovno stanje je nedegenerisano, odvojeno od sledećeg pobuđenog procepm. Magnetno polje koje “osećaju” ovi elektroni označićemo sa B^* (može biti pozitivno ili negativno) tako da je $\frac{\rho\phi_0}{|B^*|} = n$. Zatim u sledećem koraku vežemo za svaki elektron bezmaseni, beskonačno tanak solenoid koji nosi $2p$ kvanata fluksa usmerenih u \vec{e}_z smeru². Na ovaj način smo elektrone konvertovali u kompozitne fermione (Slika 2.2 (b)). Novi problem definisan u odnosu na kompozitne fermione je identičan originalnom problemu neinteragujućih elektrona u magnetnom polju B^* . Mi smo stoga transformisali nekompresibilno stanje elektrona u nekompresibilno stanje kompozitnih fermiona.



Slika 2.2: Put od IKHE do FKHE

Sada možemo da primenimo aproksimaciju srednjeg polja. Adijabatski (sporo u odnosu na $\frac{\hbar}{\Delta}$, gde je Δ procep) širimo fluks tube, prvobitno vezane za elektrone, sve dok ne postanu deo ravnomernog magnetnog polja³ (Slika 2.2 (c)). Na kraju dobijamo čestice koje se kreću u pojačanom magnetnom polju

$$B = B^* + 2p\rho\phi_0 \quad (2.36)$$

Iz relacija $\nu = \frac{\rho\phi_0}{B}$ i $\nu^* = n = \frac{\rho\phi_0}{|B^*|}$ sledi da je odgovarajući faktor punjenja⁴

$$\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}. \quad (2.37)$$

Šta nam govori cela ova konstrukcija? Ako sve ove korake posmatramo u obrnutom redosledu, elektroni koji se kreću u jakom magnetnom polju B i nalaze se u frakcionom kvantnom Holovom (FKH) stanju na specifičnom punjenju $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$, apsorbovanjem $2p$ kvanata fluksa od spoljašnjeg magnetnog polja, transformišu se u kompozitne fermione koji se nalaze u integralnom kvantnom Holovom (IKH) stanju na celobrojnom punjenju $\nu^* = n$ i osećaju efektivno magnetno polje B^* (Slika 2.3). Ukratko *FKHE čestica se može posmatrati kao IKHE kompozitnih fermiona* [40].

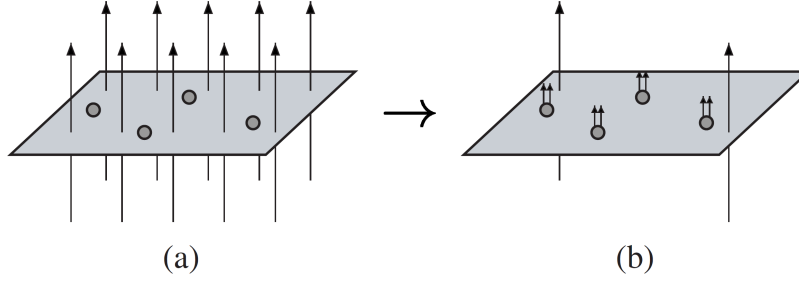
Fizika kompozitnih fermiona nam na ovaj način objašnjava zašto dolazi do FKHE. Elektroni se međusobno najefikasnije izbegavaju upravo hvatajući paran broj vorteksa talasne funkcije i tako formiraju KF. Rezidualna interakcija između kompozitnih fermiona je slaba i u prvoj aproksimaciji može biti zanemarena. Pošto se nalaze u efektivnom magnetnom polju, obrazuju Landauove nivoe koje kada celobrojno popunjavaju dobijamo IKH (nekompresibilno) stanje KF,

njega, što je takođe ista Aranov-Bom faza koju elektron proizvodi kružeći oko fluksa. Međutim treba imati u vidu da je vezivanje fluks tube za elektron na kraju samo matematički trik: fluks tube su nefizičke i neutralne [19]. Sa druge strane vorteksi su fizičke ekscitacije Laffinovog osnovnog stanja i nose frakciono naelektrisanje.

²Može se pokazati da je ovako dodat fluks sistemu neopservabilan pošto ne menja fazni faktor Fajmanovog funkcionalnog integrala po bilo kojoj zatvorenoj putanji [31].

³Pošto početno stanje ima uniformnu gustinu elektrona, dodatni fluks vezan za gustinu proizvodi uniformno magnetno polje.

⁴Znak \pm u imeniocu odgovara smeru $B^* = \pm|B^*|\vec{e}_z$



Slika 2.3: Svaki elektron vezuje dva kvanta fluksa da obrazuje kompozitni fermion. Kompozitni fermioni detektuju rezidualno magnetno polje koje je dosta slabije od spoljašnjeg magnetnog polja

koje odgovara FKH (nekompresibilnom) stanju elektrona. Postavlja se pitanje da li nam cela ova konstrukcija može pomoći da odredimo talasne funkcije FKH stanja?

Možemo primetiti da za kompozitne fermione koji se nalaze u IKH stanju sa $\nu^* = n$ već znamo talasnu funkciju osnovnog stanja - to je talasna funkcija potpuno popunjenih n Landauovih nivoa $\Phi_n(z, \bar{z})$. Dakle, u cilju da odredimo talasnu funkciju elektrona na frakciji $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$, najpre pređemo u reprezentaciju KF, koji su na punjenju $\nu^* = n$ i čiju talasnu funkciju u principu znamo, $\Phi_n(z, \bar{z})$. Sledeći korak je da povežemo ovu talasnu funkciju sa onom koju tražimo Ψ_ν , i način da ovo uradimo je Čern-Sajmons transformacija, slična onoj iz Odeljaka 2.2, osim što ovde elektroni vežu paran broj $m = 2p$ kvantata fluksa. Prelazak vršimo preko unitarne transformacije

$$\Psi_\nu = \Phi_n e^{-2ip \sum_{i < j} \alpha_{ij}}, \quad (2.38)$$

gde je

$$\alpha_{ij} = i \ln \frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|} \quad (2.39)$$

relativan ugao između čestica i i j . Odatle dobijamo osnovno stanje na $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$,

$$\Psi_\nu = \Phi_{\pm n} \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|} \right)^{2p}, \quad (2.40)$$

gde se \pm ponovo odgovara smeru $B^* = \pm |B^*| \vec{e}_z$.

U izvođenju ove talasne funkcije posmatrali smo KF kao vezana stanja elektrona i kvantata fluksa tube. Da bismo sa fluks tube prešli na vortekse dovoljno je da u talasnoj funkciji (2.40) odbacimo imenilac $|z_i - z_j|^{2p}$ [40]. Ovim konačno dobijamo Džeinovu talasnu funkciju⁵ (odnosno niz talasnih funkcija) za osnovno stanje elektrona na punjenju $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$:

$$\Psi_\nu = \Phi_{\pm n} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p}. \quad (2.41)$$

Možemo primetiti da za $n = 1$ dobijamo Laffinovu talasnu funkciju (2.11), gde je $m = 2p \pm 1$.

Za $n > 1$ talasna funkcija Φ_n sadrži neanalitičke komponente (velike stepene po \bar{z}). Zato se često umesto talasne funkcije (2.41) koristi talasna funkcija projektovana u najniži LL:

$$\Psi_\nu = \mathcal{P}_{LLL} \Phi_{\pm n} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p}, \quad (2.42)$$

⁵Džejnove talasne funkcije imaju visok stepen preklapanja (95%) sa odgovarajućim funkcijama osnovnog stanja dobijenih numeričkim metodama.

gde \mathcal{P}_{LLL} označava projekciju na najniži Landauov nivo. Projektor \mathcal{P}_{LLL} se obično definiše na sledeći način: najpre normalno uredimo talasnu funkciju (bez Gausijanskog dela) pomerajući sve \bar{z} ulevo u odnosu na z , a zatim izvršimo smenu:

$$\bar{z}_i \rightarrow 2l_B^2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.43)$$

uzimajući da izvodi po z ne deluju na Gausijan.

2.4. Polupopunjen Landauov nivo

Do sada smo razmatrali samo sisteme kompozitnih fermiona koji odgovaraju frakciji⁶ $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$ na kojima je FKHE primećen. 1993. godine Halperin, Li i Rid (HLR) [8] ukazuju na zanimljivu činjenicu da i u oblastima gde nema pojave KHE, kompozitni fermioni i dalje mogu biti realizovani.

Videli smo u Odeljku 2.3 da u KF slici dolazi do renormalizacije magnetnog polja, $B = B^* + 2p\rho\phi_0$ usled vezivanja vorteksa. Posebno interesantna situacija nastupa kada je faktor punjenja $\nu = \frac{1}{2}$ (što odgovara limesu $n \rightarrow \infty$). Tada kompozitni fermioni, koji se sastoje od elektrona vezanog za dva vorteksa (pošto je $p = 1$), efektivno ne “osećaju” nikakvo magnetno polje tj. $B^* = 0$. To dalje znači da oni ne formiraju Landauove nivoe, već tzv. *Fermi more kompozitnih fermiona*. Odsustvo FKHE na $\nu = \frac{1}{2}$ onda direktno sledi iz činjenice da pobuđena stanja Fermi mora nemaju procep tj. stanje elektrona na $\nu = \frac{1}{2}$ je kompresibilno.

Da li možemo da odredimo talasnu funkciju za ovo stanje? Prirodan anzac za N -čestičnu talasnu funkciju ovakve Fermi tečnosti (FT) je Slejterova determinanta

$$\Phi_F = \det \left(e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j} \right), \quad |\vec{k}_i| \leq k_F. \quad (2.44)$$

Dalje, da bismo našli talasnu funkciju koja odgovara reprezentaciji elektrona, a ne kompozitnih fermiona, možemo ponovo iskoristiti Čern-Sajmons transformaciju, posle koje (uz odbacivanje imenioca da bismo konvertovali fluks tube u vortekse) dobijamo

$$\Psi_{\nu=\frac{1}{2}} = \Phi_F \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2, \quad (2.45)$$

Ovo nije talasna funkcija najnižeg LL. Neanalitičnost potiče od skalarnog proizvoda $\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j = \frac{1}{2}(k_i \bar{z}_j + \bar{k}_i z_j)$ unutar Slejterove determinante. Formalno, ovaj problem možemo ponovo izbeći projekcijom na najniži LL. Tako dobijamo talasnu funkciju

$$\Psi_{\nu=\frac{1}{2}} = \mathcal{P}_{LLL} \det \left(e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2, \quad (2.46)$$

koju su predložili Rejazi i Rid [48] za opis kompresibilnog stanja na punjenju $\nu = \frac{1}{2}$.⁷

2.4.1. Dipolna interpretacija

Obično kada imamo čestice koje formiraju Fermi more znamo odakle dolaze njihovi impulsi. Ovde stvar nije baš očigledna s obzirom da je kinetička energija elektrona koji se nalaze u najnižem LL “ugašena” (eng. quenched) i ceo hamiltonijan se svodi jedino na međučestičnu interakciju

$$H = \sum_{i < j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (2.47)$$

⁶Ovde uključujemo i Laflinove frakcije za $n = 1$.

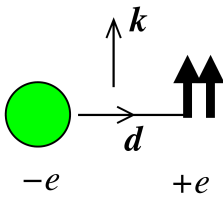
⁷Rejazi i Rid talasna funkcija ima izuzetno dobar procenat preklapanja sa pravim osnovnim stanjem dobijenim numeričkim metodama [48].

Da bismo odgonetnuli poreklo impulsa razmotrimo šta dobijamo nakon projekcija u talasnoj funkciji (2.42). Kao što smo videli u Odeljku 2.3 projektovanjem na najniži LL pravimo smenu $\bar{z}_i \rightarrow 2l_B^2 \frac{\partial}{\partial z}$ tako da dobijamo

$$\Psi_{\nu=\frac{1}{2}} = \det \left(e^{i\bar{k}_i z_j + i l_B^2 k_i \frac{\partial}{\partial z_j}} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \quad (2.48)$$

Eksponecijalni član $e^{i l_B^2 k \frac{\partial}{\partial z}}$ predstavlja translacioni operator: $z \rightarrow z + i k l_B^2$. Stoga, nakon projekcije u najniži LL dobijamo talasnu funkciju u sledećem (analitičkom) obliku

$$\Psi_{\nu=\frac{1}{2}} = \mathcal{A} \left(\prod_i e^{i\bar{k}_i z_i} \right) \prod_{i < j} ((z_i + i k l_B^2) - (z_j + i k l_B^2)), \quad (2.49)$$



Slika 2.4: Kompozitni fermion je neutralan dipol

gde je \mathcal{A} antisimetrizator⁸ koji dolazi od Slejterove determinante. Rezultat je da su nule talasne funkcije – vorteksi – pomereni za rastojanje $|k l_B^2|$ od elektrona u pravcu normalnom na \vec{k} . Pošto vorteksi više nisu na elektronu, kompozitni fermion ima dva kraja koja se nalaze na rastojanju $k l_B^2$: na jednom kraju je elektron neelektrisanja $-e$, a na drugom su dva vorteksa od kojih svaki nosi razlomljeno naelektrisanje $+\frac{e}{2}$. Ceo objekat stoga predstavlja *neutralan dipol*: elektron-korelaciona šupljina, momenta \vec{d} čiji je intenzitet $|\vec{d}| = e k l_B^2$ i $\vec{d} \cdot \vec{k} = 0$.

Energija neophodna za proizvodnju dipola je ekvivalentna Kulonovoj privlačnoj interakciji $V(|\vec{d}|) = V(l_B^2 k)$ između elektrona i korelacione šupljine. Razvoj potencijalne energije za malo \vec{d} treba da počne sa članom $\sim |\vec{d}|^2$ i to je upravo poreklo kinetičke energije. U magnetnom polju oba kraja dipola se kreću u istom pravcu \vec{k} , brzinom $\frac{\partial V}{\partial \vec{k}}$ održavajući međusobno rastojanje [19, 48].

2.5. Fafijan

Početna tačka u razmatranju FKH stanja za $\nu > 1$ jeste da se fokusiramo na poslednji Landauov nivo koji je delimično popunjen, tretirajući niže (popunjene) nivoe kao inertne. U tom smislu stanje $\nu = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ odgovara stanju $\nu = \frac{1}{2}$ u drugom Landauovom nivou⁹. Problem elektrona na $\nu = \frac{1}{2}$ u drugom LL možemo simulirati sa elektronima na $\nu = \frac{1}{2}$ u najnižem LL uz prisustvo efektivne interakcije [40]. Sa ovim bismo očekivali formiranje Fermi mora KF po analogiji sa fizikom polupopunjenog najnižeg LL, tj. očekivali bismo da stanje na $\nu = \frac{5}{2}$ bude kompresibilno. Iznenađenje je usledilo kada je u eksperimentu [10] primećeno prisustvo platoa Holove provodnosti.

U početku je postojala ideja da spin elektrona ima važnu ulogu u FKHE $\nu = \frac{5}{2}$ [49], ali su naknadne studije i numerički eksperimenti ipak doveli da je najverovatnije da su elektroni potpuno polarizovani. Ako stoga odbacimo spinski stepen slobode iz razmatranja, jedini način da objasnimo nekompresibilnost stanja jeste da prihvatimo da kompozitni fermioni formiraju p -talasno sparno stanje koje opisuje tzv. *Fafijan*, odnosno talasna funkcija Mur-Rida [11]

$$\Psi_{\text{Pf}} = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}, \quad (2.50)$$

⁸Da bi talasna funkcija bila nenulta nakon antisimetrizacije, svi k -ovi moraju biti međusobno različiti (i manji od k_F).

⁹Popunjen Landauov nivo, kada računamo i spinske stepene slobode, se računa kao 2.

gde Pf označava Fafijan¹⁰. Fafijan proizvoljne antisimetrične matrice M_{ij} je definisan (do na normalizacioni faktor) sa

$$\text{Pf}(M_{ij}) = \mathcal{A}(M_{12}M_{34} \dots M_{N-1,N}), \quad (2.51)$$

gde je \mathcal{A} antisimetrizator. Fafijanski faktor upravo doprinosi da sveukupna talasna funkcija (2.50) bude antisimetrična. Ekvivalentno možemo ga zapisati kao

$$\text{Pf}(M_{ij}) = \frac{1}{2^{N/2}(N/2)!} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sign}(\sigma) \prod_{k=1}^{N/2} M_{\sigma(2k-1), \sigma(2k)}.$$

Na primer ako imamo 4 čestice onda je

$$\text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_3 - z_4} + \frac{1}{z_1 - z_3} \frac{1}{z_4 - z_2} + \frac{1}{z_1 - z_4} \frac{1}{z_2 - z_3}.$$

Dok je $\text{Pf}(M_{ij})$ izuzetno komplikovana funkcija, njen kvadrat je relativno prost [41]

$$(\text{Pf}M)^2 = \det M.$$

Ovo svojstvo je korisno za računanje energije talasne funkcije Mur-Rida za koju nam je neophodno samo $|\Psi_{\text{Pf}}|^2$.

Možemo primetiti da BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) talasna funkcija, za potpuno polarizovane elektrone, i u slučaju jakog kuplovanja može biti napisana [28] kao

$$\Psi_{\text{BCS}} = \mathcal{A}(g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)g(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) \dots g(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)),$$

što je upravo Fafijan koji opisuje p -talasno sparivanje elektrona, i Ψ_{Pf} se interpretira kao p -talasno sparno stanje kompozitnih fermiona koji nose po dva vorteksa.

Za sparivanje nam je obično neophodna privlačna interakcija. U našem slučaju hamiltonijan sadrži jedino odbojnu Kulonovu interakciju između elektrona. Postavlja se pitanje kako može doći do sparivanja uprkos jakoj odbojnoj interakciji. Stvar je u tome da objekti koji se sparuju nisu elektroni, već kompozitni fermioni, koji za razliku od elektrona interaguju slabo odbojno uz mogućnost da ova interakcija postane čak slabo privlačna. Kako je to moguće? Vezivanjem vorteksa za elektron dolazi do ekraniranja Kulonove interakcije, tako da efektivno imamo korelacione šupljine oko svakog elektrona. Pošto se broj vezanih vorteksa ne može menjati kontinualno, može doći do "nadekraniranja" (eng. overscreening) Kulonove interakcije. Postoji i numerički dokaz [50] da je interakcija između dva kompozitna fermiona na Fermi granici odbojna u slučaju $\nu = \frac{1}{2}$, ali privlačna za $\nu = \frac{5}{2}$.

Ono što je još važno istaći jeste da je Fafijan egzaktno osnovno stanje energije nula modelnog hamiltonijana elektrona sa tročestičnom interakcijom oblika¹¹ [13]

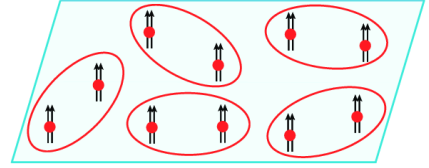
$$H = \sum_{i < j < k} \nabla_i^2 (\delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_k)) \quad (2.52)$$

¹⁰Bez fafijanskog faktora $\text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right)$ talasna funkcija i dalje opisuje stanje na $\nu = \frac{1}{2}$, ali ima pogrešnu izmensku simetriju.

¹¹U numeričkim eksperimentima se koristi i korigovana verzija:

$$H = - \sum_i \mathcal{S}_{ijk} \{ \nabla_i^4 \nabla_j^2 \} (\delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_k))$$

gde je \mathcal{S}_{ijk} simetrizator [15].



Slika 2.5: Sparivanje kompozitnih fermiona

Ovaj hamiltonijan anihilira talasnu funkciju za koju svaka trojka elektrona i, j i k zadovoljava uslov da ako i i j imaju relativan ugaoni moment 1, onda i i k moraju imati ugaoni moment ≥ 2 . Fafijan Ψ_{Pf} zadovoljava ove uslove, pošto i i j imaju relativan ugaoni moment 1 samo kada su upareni, ali ako je i upareno sa j , onda ne može biti upareno i sa k . Pošto je rastojanje između čestica proporcionalno njihovom relativnom ugaonom momentu, grubo možemo reći da sparujući se sa česticom j (i bliže joj stoga prilazeći) čestica i je u mogućnosti da bolje drži odstojanje od drugih čestica i stoga maksimalno umanjuje interakcionu energiju [37].

Numeričke studije realističnih sistema [15] su pokazale da je Fafijan vrlo dobra probna talasna funkcija što se tiče osnovnog stanja, pogotovo ako je Kulonova interakcija modifikovana dodatkom kratkodometnog potencijala oblika $V(r) = V\nabla^2\delta(r)$, i takođe čestica-šupljina simetrizacijom Mur-Ridove talasne funkcije. Primetimo da Fafijan, kao osnovno stanje tročestične interakcije (2.52), nije simetričan na izmenu čestica-šupljine. Stanje koje se dobija čestica-šupljina konjugacijom Mur-Ridove talasne funkcije (2.50) je tzv. *anti-Fafijan* koji takođe važi za validnog kandidata da opiše $\frac{5}{2}$ stanje [51, 52, 53].

2.5.1. Ekscitacije Fafijana

Naše sparano stanje podržava dve klase pobuđenih stanja. Jedna je analogon kvazičestica koje se javljaju u običnoj BCS teoriji. Dobijaju se dodavanjem kompozitnih fermiona ili slamanjem parova. Stanje sa ovakvim neutralnim fermionskim ekscitacijama lokalizovanih u z se dobijaju dejstvom na osnovno stanje sa $\psi^\dagger(z) \prod_i (z - z_i)^m$ [11].

Drugu klasu čine naelektrisane ekscitacije i ovde ćemo se fokusirati na kvazišupljine. Možemo analogno kao u slučaju Laffinove kvazičestice (2.14) predložiti sledeću talasnu funkciju

$$\Psi(z) = \prod_k (z_k - \eta) \text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}. \quad (2.53)$$

Rezultujući objekat ima naelektrisanje $\frac{e}{m}$ i možemo ga razumeti kao dodatak jednog kvanta fluksa, odnosno jednog vorteksa. Međutim, ispostavlja se da ovaj vid Laffinove konstrukcije nije najelementarnija naelektrisana ekscitacija. Ako poziciju novog objekta unesemo u fafijanski faktor dobijamo talasnu funkciju sledećeg oblika

$$\Psi(z) = \text{Pf} \left(\frac{(z_i - \eta_1)(z_j - \eta_2) + (z_j - \eta_1)(z_i - \eta_2)}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}. \quad (2.54)$$

Primetimo da je argument u Fafijanu antisimetričan kao što je očekivano. Raspisivanjem Fafijana možemo videti da on sadrži isti broj $(z - \eta)$ faktora kao u (2.53), ali ovde figurišu pozicije η_1 i η_2 koje odgovaraju dvoma nezavisnih objekata koje ćemo označiti kao kvazišupljine. Kada se ove dve kvazišupljine poklope, tako da je $\eta_1 = \eta_2$, dobijamo (2.53). Ovo znači da individualna kvazišupljina u (2.54) može biti shvaćena kao polu vorteks (odnosno polovina kvanta fluksa). One imaju naelektrisanje $e^* = \frac{e}{2m}$. Konkretno za $m = 2$ stanja, kvazišupljine imaju naelektrisanje $\frac{e}{4}$ (što je eksperimentalno potvrđeno za $\nu = \frac{5}{2}$ stanja [54, 55]).

Ako bismo hteli da napišemo talasnu funkciju za 4 kvazišupljine neophodno je da pozicije η_α , $\alpha = 1, \dots, 4$ uvrstimo u fafijanski faktor. Jedno takvo stanje je oblika

$$\Psi_{(12),(34)}(z) = \text{Pf}_{(12),(34)}(z) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2},$$

gde smo definisali

$$\text{Pf}_{(12),(34)}(z) = \text{Pf} \left(\frac{(z_i - \eta_1)(z_i - \eta_2)(z_j - \eta_3)(z_j - \eta_4) + (i \leftrightarrow j)}{z_i - z_j} \right).$$

Ipak, zbog proizvoljnosti podele 4 kvazišupljine u dve grupe (12) i (34), ovo stanje nije jedinstveno, već postoji još dva stanja $\Psi_{(13),(24)}(z)$ i $\Psi_{(14),(23)}(z)$ koje opisuju 4 kvazišupljine. Međutim, ispostavlja se da ova tri stanja nisu linearno nezavisna i da bazis čine dva stanja [56]

$$\Psi_1^{4qh} = \frac{(\eta_{13}\eta_{24})^{1/4}}{(1 + \sqrt{1-x})^{1/2}} (\Psi_{(12),(34)}(z) + \sqrt{1-x}\Psi_{(14),(24)}(z))$$

$$\Psi_2^{4qh} = \frac{(\eta_{13}\eta_{24})^{1/4}}{(1 + \sqrt{1-x})^{1/2}} (\Psi_{(12),(34)}(z) - \sqrt{1-x}\Psi_{(14),(24)}(z)).$$

U generalnom slučaju za $2n$ kvazišupljina dimenzija prostora stanja je 2^{n-1} [56]. Ovakav vid degeneracije, odnosno “unutrašnjeg” stepena slobode nije u vezi sa bilo kojom pojedinačnom kvazišupljinom, umesto toga ona je svojstvo čitave kolekcije čestica.

2.5.2. Majorana mode

Ono što je karakteristično za svaki superprovodnik jeste prisustvo vorteksa gde faza kondenzata trpi skok obilaskom oko njega. Pošto se kompozitni elektroni kondenzuju u paru, najjednostavniji vorteks nosi fluks $\frac{hc}{2e} = \frac{\phi_0}{2}$, pa se iz tog razloga često nazivaju poluvorteksi (mi ćemo nastaviti da ih zovemo vorteksi). Oni predstavljaju naše kvazišupljine. Ono što je specijalno za $p_x + ip_y$ superprovodnike jeste da vorteksi imaju *nula mode* (eng. *zero modes*) – rešenja jednačine za fermionsko polje u pozadini vorteksa. I što je još važnije, za ove p -talasne superprovodnike, ove nula mode su *majorane*.

U fizici visokih energija majorana čestica je fermion koji je istovremeno sam sebi antičestica. Formalno se uvodi preko operatora

$$\gamma_i = c_i + c_i^\dagger, \quad (2.55)$$

gde su c i c^\dagger klasični fermionski operatori sa algebrom $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$. Majorana operatori očigledno ispunjavaju uslov $\gamma_i = \gamma_i^\dagger$. Može se lako pokazati da oni zadovoljavaju tzv. *Klifordovu algebru*

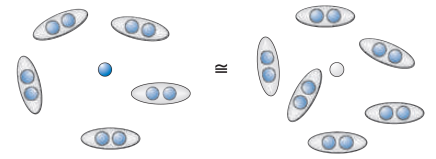
$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}.$$

Ako uzmemo da c^\dagger kreira fermion naelektrisanja $-e$, dok c kreira šupljinu naelektrisanja $+e$, to znači da γ kreira česticu koja je u superpoziciji različitih naelektrisanja. Ovo obično nije dozvoljeno, međutim, okruženje u superprovodniku čini ovo mogućim. Naime, u superprovodniku broj čestica nije održan: dva elektrona (Kuperov par) možemo dodati ili oduzeti kondenzatu bez da promenimo svojstvo sistema. Zbog toga on ekranira električno i konfinira magnetno polje, naelektrisanje nije više opservabilno, pa stoga elektron i šupljina imaju efektivno isto naelektrisanje [57].

Pretpostavimo da imamo $2n$ vorteksa, svaki sa svojom Majorana nula modom γ_i . Da bismo izgradili prostor stanja definišemo kompleksne fermionske mode

$$\Psi_k = \frac{1}{2} (\gamma_{2k-1} + \gamma_{2k}), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

koje zadovoljavaju fermionske antikomutacione relacije $\{\Psi_k, \Psi_l^\dagger\} = \delta_{kl}$. Konstrukciju počinjemo standardno definisanjem vakuuma $|0\rangle$ sa $\Psi_k |0\rangle = 0$ za $\forall k$, a zatim ostatak prostora dobijamo



Slika 2.6: U superprovodniku čestica i šupljina imaju efektivno isto naelektrisanje

sukcesivnim dejstvom operatora kreacije Ψ_k^\dagger :

$$\begin{aligned} &|0\rangle \\ &\Psi_k^\dagger |0\rangle \\ &\Psi_k^\dagger \Psi_l^\dagger |0\rangle \\ &\vdots \\ &\Psi_1^\dagger \dots \Psi_n^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

Dimenzija ovako dobijenog Hilbertovog prostora je $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$. Kao što ćemo videti ovaj prostor se može podeliti na dva potprostora: jedan sadrži paran broj ekscitacija Ψ^\dagger , dok drugi sadrži neparan broj. Svaki od ovih potprostora ima dimenziju 2^{n-1} , i linearno nezavisna stanja ekscitacija upravo razapinju jedan od ova dva potprostora [41].

Pomoću Majorana nula moda možemo na jednostavan način ispitati i statistiku kvazišupljina. Za razliku od $d \geq 3$ dimenzije gde je grupa izmene permutaciona grupa, u $d = 2$ izmena čestica je u prostoru stanja opisana reprezentacijama grupe “uplitanja” (eng. *braid group*). Generatori grupe za sistem sa $2n$ Majorana mode su R_i , $i = 1, \dots, 2n - 1$ koji prave izmenu i -tog vorteksa sa $(i + 1)$ u smeru suprotnom od kazaljke časovnika. Dejstvo ove izmene na Majorana mode je

$$R_i : \begin{cases} \gamma_i & \rightarrow & \gamma_{i+1} \\ \gamma_{i+1} & \rightarrow & -\gamma_i \\ \gamma_j & \rightarrow & \gamma_j \quad j \neq i, i + 1 \end{cases}$$

gde minus odgovara promeni faze Majorana mode za 2π kada obidu vorteks. U prostoru stanja ovo dejstvo je reprezentovno unitarnim operatorom

$$R_i = e^{\frac{\pi}{4} \gamma_{j+1} \gamma_i} e^{i\pi\alpha}. \quad (2.57)$$

Pošto je $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $(\gamma_i \gamma_{j+1})^2 = -1$ sledi da je

$$R_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_{j+1} \gamma_i) e^{i\pi\alpha}. \quad (2.58)$$

Fazni faktor $e^{i\pi\alpha}$ odražava Abelovu statistiku koja nije fiksna. Za Mur-Ridovo stanje na $\nu = \frac{1}{m}$ ispostavlja se da je $\alpha = \frac{1}{4m}$.

Za bilo koje stanje Hilbertovog prostora, dejstvo grupe izmene je $|\Psi\rangle \rightarrow R_i |\Psi\rangle$. Ispitajmo ovo dejstvo na jednostavnom primeru, uzmimo ponovo 4 kvazišupljine: bazis porostora stanja je $\{|0\rangle, \Psi_1^\dagger |0\rangle, \Psi_2^\dagger |0\rangle, \Psi_1^\dagger \Psi_2^\dagger |0\rangle\}$ i postoje 3 generatora braid grupe: za izmenu $1 \leftrightarrow 2$ i $3 \leftrightarrow 4$ odgovarajući operatori sadrže samo po jedan kompleksan fermion

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_2 \gamma_1) e^{i\pi\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i - 2i \Psi_1^\dagger \Psi_1) e^{i\pi\alpha} \\ R_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_4 \gamma_3) e^{i\pi\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i - 2i \Psi_2^\dagger \Psi_2) e^{i\pi\alpha}. \end{aligned}$$

To znači da ovi operatori dovode do pojavljivanja samo Abelove faze, što se lako može videti ako ih predstavimo ka 4x4 matrice

$$R_1 = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} e^{i\pi\alpha}, \quad i \quad R_3 = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} e^{i\pi\alpha}.$$

Međutim, operator R_2 menja $2 \leftrightarrow 3$, odnosno vrši izmenu dva vorteksa koja pripadaju različitim parovima u našoj konstrukciji bazisa prostora (2.56). Ovo znači da operator R_2 uključuje i Ψ_1 i Ψ_2

$$R_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_3\gamma_2)e^{i\pi\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i(\Psi_2 + \Psi_2^\dagger)(\Psi_1 - \Psi_1^\dagger))e^{i\pi\alpha}.$$

i posleđično nije dijagonalan za izabran bazis

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\pi\alpha}.$$

Ovde vidimo ne-Abelovu prirodu izmene. Stoga se, generalno, za kvazičestice stanja Mur-Rida kaže da spadaju u tzv. *ne-Abelove anione* (eng. *non-Abelian anyons*). Primetimo takođe da stanja $\Psi_1^\dagger|0\rangle$ i $\Psi_2^\dagger|0\rangle$, sa neparnim brojem Ψ ekscitacija, se transformišu jedno u drugo pod dejstvom braid grupe. Drugim rečima ova dva stanja razapinju potprostor koji je ireducibilan za reprezentaciju iste grupe. Stanja $|0\rangle$ i $\Psi_1^\dagger\Psi_2^\dagger|0\rangle$ sa parnim brojem Ψ ekscitacija obrazuju drugi ireducibilni potprostor. Ova osobina se održava sa proizvoljnim brojem kvazišupljina tako da reprezentacije Braid grupe dele ukupan Hilbetrov prostor dimenzije 2^n na dva ireducibilna potprostora (svaki dimenzije 2^{n-1}) koji opisuju dve klase ne-Abelovih aniona [41].

3. Bozoni na punjenju $\nu = 1$

U ovom poglavlju razmatramo sistem bozona u najnižem Landauovom nivou na punjenju $\nu = 1$, kvalitativno identičan fermionima na frakciji popunjenosti sa parnim imeniocima. Prednost bozona je u tome što možemo matematički precizno da uvedemo reprezentaciju kompozitnih fermiona u proširenom prostoru. Naš vodič je formalizam kompozitnih fermiona koji su uveli Paskje i Holdejn [20], a dalje razvio Rid [21]. Kompozitni fermioni u ovom slučaju predstavljaju vezana stanja bozona i jednog vorteksa, i kao takvi kreću se u efektivnom magnetnom polju $B^* = 0$. Vorteks (ili korelaciona šupljina) je fermion koji nosi suprotno naelektrisanje od bozona i stoga kompozitni fermion možemo interpretirati kao neutralan dipol momenta $\vec{d} = l_B^2 \vec{k} \times \vec{e}_z$.

Cilj nam je da najpre kompozitne fermione predstavimo u reprezentaciji druge kvantizacije. U tu svrhu prvo krećemo sa konstrukcijom proširenog Hilbertovog prostora koji pored fizičkih stepeni slobode (bozona) sadrži i nefizičke stepene slobode koji dolaze od korelacionih šupljina (uz prisustvo odgovarajućih veza). Zatim u drugom odeljku primenom formalizma ispitujemo mogućnost formiranja Fermi tečnost pomoću Hartri-Fokove teorije, odnosno u trećem odeljku mogućnost BCS sparivanja. Radićemo u jedinicama u kome je skala dužine $l_B = 1$.

3.1. Formalizam

3.1.1. Konstrukcija prostora stanja

Neka je za dato magnetno polje B degeneracija izolovanog LL $N_\phi = N$ i neka $m = 1, \dots, N$ prebrojava jednočestična stanja $|m\rangle$ datog nivoa. U ovom prostoru uvodimo operatore kreacije a_m^\dagger i anihilacije a_m koji standardno zadovoljavaju komutacione relacije $[a_m, a_{m'}^\dagger] = \delta_{mm'}$. N-čestično stanje dalje možemo zapisati preko operatora kreacije

$$|m_1 m_2 \dots m_N\rangle = a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \dots a_{m_N}^\dagger |0\rangle. \quad (3.1)$$

Ova stanja dakle čine fizički prostor stanja.

Sada uvodimo prostor stanja na kome ćemo opisati kompozitne fermione. U tu svrhu proširujemo prostor stanja tako što uvodimo fermionske operatore koji su matrice sa dva indeksa c_{mn} i c_{nm}^\dagger , i koji zadovoljavaju antikomutacione relacije

$$\{c_{mn}, c_{n'm'}^\dagger\} = \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Jednočestična stanja KF $|m, n\rangle = c_{nm}^\dagger |0\rangle$ su opisana stoga sa dva indeksa: levi indeks m , kao i ranije, opisuje stanje bozona, dok desni n opisuje korelacione šupljine. Totalni prostor kompozitnih fermiona čine stanja $c_{n_1 m_1}^\dagger \dots c_{n_N m_N}^\dagger |0\rangle$.

Može se pokazati da su antikomutacione relacije (3.2) invarijantne na biunitarnu transformaciju

$$c \rightarrow U_L c U_R \quad (3.3)$$

$$c^\dagger \rightarrow U_R^\dagger c^\dagger U_L^\dagger, \quad (3.4)$$

gde su U_L i U_R unitarne $N \times N$ matrice koje deluju na leve, odnosno desne indekse respektivno. Generatori ovih transformacija su operatori

$$\rho_{nn'}^R = \sum_m c_{nm}^\dagger c_{mn'} \quad (3.5)$$

$$\rho_{mm'}^L = \sum_n c_{nm'}^\dagger c_{mn} \quad (3.6)$$

Desni operator ρ^R generiše unitarnu grupu $U(N)_R$. Uzimanjem traga ovog operatora dobijamo operator broja čestica

$$\hat{N} = \sum_{n,m} c_{nm}^\dagger c_{mn} \quad (3.7)$$

Iz fizičkih razloga želimo da nam broj čestica bude održan u sistemu, tako da \hat{N} predstavlja generator $U(1)$ globalne simetrije sa svojstvenom vrednošću N . Preostali deo ρ^R generiše $SU(N)_R$ grupu koja predstavlja gejdž slobodu reprezentacije. Fiksiranjem ovog gejdža namećemo N^2 veza na sistem (uključujući i onu koja fiksira broj čestica)

$$(\rho_{nn'}^R - \delta_{nn'}) |m_1 m_2 \dots m_N\rangle = 0 \quad (3.8)$$

sa kojima definišemo potprostor stanja koji identifikujemo sa fizičkim prostorom. Naime, uslov (3.8)

$$\begin{cases} n = n', & \rho_{nn}^R |m_1 \dots m_N\rangle = 1 |m_1 \dots m_N\rangle \\ n \neq n', & \rho_{nn'}^R |m_1 \dots m_N\rangle = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

izražava zahtev da je svaka orbitala n jedinstveno popunjena, tako da nefizička stanja formiraju uniformnu pozadinu. Drugim rečima, nefizička stanja su fermioni koji čine spin-singlet reprezentacije $SU(N)_R$.

Levi operator ρ^L se takođe zbog $U(1)$ globalne simetrije, koju deli sa ρ^R : $\text{Tr}\rho^L = \text{Tr}\rho^R = N$, svodi na generator $SU(N)_L$ grupe koja deluje u fizičkom prostoru stanja. U zavisnosti od hamiltonijana ova grupa se razbija na podgrupe koje predstavljaju rotacije i translacije na nekoj 2D mnogostrukosti (ravan, sfera, torus, ...) U isto vreme ovaj operator će predstavljati fizičku gustinu na mnogostrukosti.

Fizičko stanje koje zadovoljava uslov (3.8) možemo zapisati pomoću Levi-Čivita tenzora

$$|m_1 m_2 \dots m_N\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N} \epsilon^{n_1, n_2, \dots, n_N} c_{n_1 m_1}^\dagger c_{n_2 m_2}^\dagger \dots c_{n_N m_N}^\dagger |0\rangle \quad (3.10)$$

Ova stanja su očigledno singlet u odnosu na reprezentaciju grupe $SU(N)_R$.

3.1.2. Reprezentacija u impulsnom prostoru

Impuls kompozitnih fermiona \vec{k} je dobar kvantni broj [18, 21] zbog $B^* = 0$, tako da želimo da ovaj KF formalizam reprezentujemo u impulsnom prostoru. Međutim, kao što smo ranije videli komponente centra orbite $\vec{R} = (X, Y)$ ne komutiraju: $[X, Y] = -i$, prostor unutar LL je nekomutativan što onemogućava primenu običnog Furijeovog transformata.

Fizički, stanje kompozitnog fermiona $|m, n\rangle$ možemo opisati kao superpoziciju stanja sa impulsom \vec{k} sa težinom koja zavisi od efektivnog rastojanja između orbitala

$$c_{mn} = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \langle m | \tau_{\vec{k}} | n \rangle c_{\vec{k}} \quad (3.11)$$

gde je $\tau_{\vec{k}} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ operator magnetne translacije. Postavlja se pitanje kako da li postoji i kako glasi inverzna transformacija. Možemo poći od nečega što “imitira” Furijeov transform

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m \langle n | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} | m \rangle c_{mn} &= \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^{3/2}} \sum_n \sum_m \langle n | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} | m \rangle \langle m | e^{i\vec{k}'\cdot\vec{R}} | n \rangle c_{\vec{k}'} \\ &= \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^{3/2}} \sum_n \langle n | e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{R}} | n \rangle e^{-\frac{i}{2}\vec{k}'\times\vec{k}} c_{\vec{k}'}, \end{aligned}$$

gde smo u drugom redu iskoristili da je

$$\tau_{\vec{k}}\tau_{\vec{k}'} = \tau_{\vec{k}+\vec{k}'} e^{\frac{i}{2}[\vec{k}\cdot\vec{R}, i\vec{k}'\cdot\vec{R}]} = \tau_{\vec{k}+\vec{k}'} e^{-\frac{i}{2}\vec{k}'\times\vec{k}}.$$

Za dalje nam je neophodno da izračunamo $\text{Tr } \tau_{\vec{k}} = \sum_m \langle m | e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} | m \rangle$. Ovo možemo postići koristeći algebru operatora $\vec{R} = (X, Y)$ koju smo uveli u Pododeljku 1.3.3. Prelaskom na kompleksne promenljive

$$\begin{aligned} k &= k_x + ik_y, & R &= X + iY, \\ \bar{k} &= k_x - ik_y, & \bar{R} &= X - iY, \end{aligned}$$

dobijamo da je

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} = e^{\frac{i}{2}(\bar{k}R+k\bar{R})} = e^{-\frac{|k|^2}{4}} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{k}b^\dagger} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}kb}, \quad (3.12)$$

gde je $b^\dagger = \frac{R}{\sqrt{2}}$ i $b = \frac{\bar{R}}{\sqrt{2}}$. Sada računamo trag izraza (3.12)

$$\begin{aligned} \text{Tr} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} &= \sum_m \langle m | e^{\frac{|k|^2}{4}} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{k}b^\dagger} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}kb} | m \rangle \\ &= \sum_m e^{-\frac{|k|^2}{4}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{k}\right)^p}{p!} \frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}k\right)^q}{q!} \langle m | (b^\dagger)^p b^q | m \rangle \\ &= \sum_m e^{-\frac{|k|^2}{4}} \sum_{p=0}^m \frac{\left(-\frac{1}{2}|k|^2\right)^p}{(p!)^2} \frac{m!}{(m-p)!} \quad \leftarrow p = q \leq m \\ &= \sum_m e^{-\frac{|k|^2}{4}} \sum_{p=0}^m \left(-\frac{|k|^2}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \binom{m}{p} \\ &= \sum_m e^{-\frac{|k|^2}{4}} L_m \left(\frac{|k|^2}{2}\right), \end{aligned}$$

gde je $L_m(x) = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \frac{(-1)^p}{p!} x^p$ Lagerov polinom. Koristeći relaciju ortogonalnosti ovih polinoma dobijamo na kraju da je

$$\text{Tr} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} = \sum_m e^{-\frac{|k|^2}{4}} L_m \left(\frac{|k|^2}{2}\right) L_m(0) = \delta \left(\frac{|k|^2}{2}\right). \quad (3.13)$$

Iz poslednjeg izraza nalazimo da je

$$\sum_m \langle m | e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{R}} | m \rangle = \delta \left(\frac{|\vec{k}' - \vec{k}|^2}{2}\right) \quad (3.14)$$

Kada izraz (3.14) uvrstimo u izraz (3.12) dobijamo da je

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m \langle n | e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} | m \rangle c_{mn} &= \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^{3/2}} \delta\left(\frac{|\vec{k}' - \vec{k}|^2}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\vec{k}'\times\vec{k}} c_{\vec{k}'} \\ &= \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Iskoristili smo da je $\int d^n x \delta\left(\frac{x^2}{b} - a\right) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}$, odnosno u našem slučaju $\int d^2 x \delta\left(\frac{x^2}{2}\right) = 2\pi$. Na kraju dobijamo inverznu transformaciju

$$c_{\vec{k}} = \sqrt{2\pi} \sum_n \sum_m \langle n | \tau_{-\vec{k}} | m \rangle c_{mn}. \quad (3.15)$$

Operatori kreacije i anihilacije kompozitnih fermiona u stanju sa impulsom \vec{k} zadovoljavaju antikomutacione relacije

$$\{c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'}^\dagger\} = 2\pi\delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.16)$$

Dalje možemo da odredimo i operatore gustine u inverznom prostoru. Za levi imamo

$$\begin{aligned} \rho_{mm'}^L &= \sum_n c_{nm'}^\dagger c_{mn} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle m' | \tau_{\vec{k}'} \tau_{-\vec{k}} | m \rangle c_{\vec{k}'}^\dagger c_{\vec{k}} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle m' | \tau_{\vec{k}' - \vec{k}} | m \rangle e^{-\frac{i}{2}\vec{k}'\times\vec{k}} c_{\vec{k}'}^\dagger c_{\vec{k}} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^{3/2}} \langle m' | \tau_{\vec{q}} | m \rangle e^{\frac{i}{2}\vec{k}\times\vec{q}} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}}, \\ &= \int \frac{d^2q}{2\pi} \langle m' | \tau_{\vec{q}} | m \rangle \rho_{\vec{q}}^L \end{aligned} \quad (3.17)$$

gde je

$$\rho_{\vec{q}}^L = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{2}\vec{k}\times\vec{q}} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}}. \quad (3.18)$$

Slično dobijamo i za desni operator

$$\rho_{nn'}^R = \sum_m c_{nm}^\dagger c_{mn'} = \int \frac{d^2q}{2\pi} \langle n | \tau_{\vec{q}} | n' \rangle \rho_{\vec{q}}^R, \quad (3.19)$$

gde je

$$\rho_{\vec{q}}^R = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\frac{i}{2}\vec{k}\times\vec{q}} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}}. \quad (3.20)$$

Veza koja izdvaja fizički prostor u uvećanom Hilbertovom prostoru (3.8) i u impulsnoj reprezentaciji ima svoj analogon

$$\rho_{\vec{q}}^R | \Psi_{\text{phys}} \rangle = (2\pi)^2 \bar{\rho} \delta(\vec{q}) \quad (3.21)$$

što nameće ravnomernu gustinu vorteksa $\bar{\rho}$.

Levi operatori u impulsnoj reprezentaciji ne komutiraju za različite impulse:

$$\begin{aligned}
[\rho_{\vec{q}}^L, \rho_{\vec{q}'}^L] &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{2}\vec{k} \times \vec{q}} e^{\frac{i}{2}\vec{k}' \times \vec{q}'} [c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'-\vec{q}'}^\dagger c_{\vec{k}'}] \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{2}(\vec{k} \times \vec{q} + \vec{k}' \times \vec{q}')} \left(\underbrace{c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger \{c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'-\vec{q}'}^\dagger\}}_{(2\pi)^2 \delta(\vec{k}-\vec{k}'+\vec{q}')} c_{\vec{k}'} - c_{\vec{k}'-\vec{q}'}^\dagger \underbrace{\{c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger, c_{\vec{k}'}\}}_{(2\pi)^2 \delta(\vec{k}-\vec{q}-\vec{k}')} c_{\vec{k}} \right) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{2}\vec{k} \times (\vec{q} + \vec{q}')} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}+\vec{q}'} - \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{2}\vec{k}' \times (\vec{q} + \vec{q}')} c_{\vec{k}'-\vec{q}'}^\dagger c_{\vec{k}'+\vec{q}} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{\frac{i}{2}\vec{k} \times (\vec{q} + \vec{q}')} c_{\vec{k}-\vec{q}-\vec{q}'}^\dagger c_{\vec{k}} \left(e^{\frac{i}{2}\vec{q} \times \vec{q}'} - e^{-\frac{i}{2}\vec{q} \times \vec{q}'} \right) \\
[\rho_{\vec{q}}^L, \rho_{\vec{q}'}^L] &= 2i \sin\left(\frac{\vec{q} \times \vec{q}'}{2}\right) \rho_{\vec{q}+\vec{q}'}^L. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Levi operatori zadovoljavaju tzv. GMP (Girvin, MacDonald, Platzman) algebru. Na analogan način može se pokazati da desni operatori gustine zadovoljavaju istu algebru, ali za čestice suprotnog naelektrisanja:

$$[\rho_{\vec{q}}^R, \rho_{\vec{q}'}^R] = -2i \sin\left(\frac{\vec{q} \times \vec{q}'}{2}\right) \rho_{\vec{q}+\vec{q}'}^R. \tag{3.23}$$

Može se lako proveriti da levi i desni operator komutiraju $[\rho_{\vec{q}}^L, \rho_{\vec{q}'}^R] = 0$

3.1.3. Ridov hamiltonijan

Nakon konstrukcije prostora stanja za kompozitne fermione sledeći korak je da formulišemo dinamiku sistema. U fizičkom prostoru stanja sa bozonskim operatorima a i a^\dagger (koje smo uveli na početku odeljka) dinamika je određena hamiltonijanom koji u reprezentaciji druge kvantizacije ima oblik

$$H = \frac{1}{2} \sum_{m_1, \dots, m_4} V_{m_1, m_2, m_3, m_4} a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger a_{m_4} a_{m_3} \tag{3.24}$$

gde je V_{m_1, m_2, m_3, m_4} matrični element interakcije između bozona u izolovanom Landauovom nivou.

U proširenom prostoru kompozitnih fermiona hamiltonijan ima analogan oblik izražen sada preko KF operatora c i c^\dagger [21]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{m_1, \dots, m_4} \sum_{n_1, n_2} V_{m_1 m_2 m_3 m_4} c_{m_1 n_1}^\dagger c_{m_2 n_2}^\dagger c_{m_4 n_2} c_{m_3 n_1} \tag{3.25}$$

Prelaskom u impulsni prostor dobijamo *Ridov hamiltonijan* (kako ćemo ga u nastavku zvati)

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V(\vec{q}) e^{-\frac{q^2}{2}} : \rho_{\vec{q}}^L \rho_{-\vec{q}}^L : \tag{3.26}$$

gde je $V(\vec{q})$ Furijeov transform obične dvočestične interakcije između bozona u koordinatnom prostoru, a eksponencijalni član dolazi od projekcije u najniži LL. Ovaj čisto interakcioni hamiltonijan redukuje grupu simetrije $SU(N)_L$ na $SU(2)$ kada se radi o sferi, odnosno na magnetne translacije i rotacije u ravni. Komutira sa desnim operatorom gustine ρ^R :

$$[H, \rho^R(\vec{q})] = 0, \tag{3.27}$$

jer je $[\rho_{\vec{q}}^L, \rho_{\vec{q}'}^R] = 0$, tako da je desni operator konstanta kretanja, što je neophodno za vezu $\rho^R(\vec{q}) = 0$, ($\vec{q} \neq 0$).

3.2. Hartri-Fokova aproksimacija

U analizi bozona na $\nu = 1$, Rid [21] pretpostavlja da kompozitni fermioni obrazuju stanje Fermi mora i saglasno tome primenjuje Hartri-Fokovu (HF) aproksimaciju.

HF aproksimacija za translaciono invarijantne sisteme uzima da je svojstveno stanje energije jedinstvena Slejterova determinanta ravnih talasa. Kao što znamo ovo je ekvivalentno zameni hamiltonijana H sa efektivno jednočestičnim

$$H_{HF} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \epsilon_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}}, \quad (3.28)$$

gde je $\epsilon_{\vec{k}}$ efektivna energija za svako stanje ravnog talasa \vec{k} . Polazeći od Ridovog hamiltonijana (3.26) raspisanog preko KF operatora:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) \iint \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} e^{-\frac{i}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \times \vec{q}} c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} \quad (3.29)$$

gde je $\tilde{V}(\vec{q}) = V(\vec{q})e^{-\frac{|\vec{q}|^2}{2}}$, jedan brz način da dođemo do oblika (3.28) uz očuvanje fermionske statistike je Vikov razvoj:

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} &= : c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} : + \langle c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1} \rangle c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} + \langle c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} \rangle c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1} \\ &\quad - \langle c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} \rangle c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1} - \langle c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1} \rangle c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} + \text{const.} \\ &= : c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} : + (2\pi)^2 \delta_{\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_1} n_{\vec{k}_1} c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2} + (2\pi)^2 \delta_{\vec{k}_2 - \vec{q}, \vec{k}_2} n_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_1} \\ &\quad - (2\pi)^2 \delta_{\vec{k}_1 + \vec{q}, \vec{k}_2} n_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_1} - (2\pi)^2 \delta_{\vec{k}_2 - \vec{q}, \vec{k}_1} n_{\vec{k}_1} c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2} + \text{const.} \end{aligned}$$

gde je $n_{\vec{k}} = \theta(k_F - k)$ za fermione na $T = 0$. Zadržavajući samo jednočestične članove dobijamo

$$\begin{aligned} H_{HF} &= \frac{1}{2} \iint \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \left(\tilde{V}(0) n_{\vec{k}_1} c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2} + \tilde{V}(0) n_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_1} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{V}(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) n_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1}^\dagger c_{\vec{k}_2} - \tilde{V}(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) n_{\vec{k}_1} c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2} \right) \\ H_{HF} &= \iint \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \left(\tilde{V}(0) - \tilde{V}(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \right) n_{\vec{k}_1} c_{\vec{k}_2}^\dagger c_{\vec{k}_2}. \quad (3.30) \end{aligned}$$

Oдавde nalazimo da je disperzija

$$\epsilon_{\vec{k}} = \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \tilde{V}(0) n_{\vec{k}_1} - \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{k} - \vec{k}_1) n_{\vec{k}_1}, \quad (3.31)$$

gde je prvi član Hartrijev (direktan), a drugi Fokov (izmenski) u kome je sadržana zavisnost od \vec{k} .

Za bilo kakvu odbojnu interakciju $\tilde{V}(\vec{q}) = V(\vec{q})e^{-\frac{|\vec{q}|^2}{2}} > 0$, pa $\epsilon_{\vec{k}}$ raste monotono sa $|\vec{k}|$ za svako \vec{k} . Na $|\vec{k}| = k_F$:

$$\frac{k_F}{m^*} \equiv \frac{\partial \xi_{\vec{k}}}{\partial |\vec{k}|} = - \int_{|\vec{k}'| \leq k_F} \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{\partial \tilde{V}(\vec{k} - \vec{k}_1)}{\partial |\vec{k}|} = - \frac{k_F}{2\pi} \int \frac{d\theta}{2\pi} V(\vec{k} - \vec{k}_1) \cos(\theta), \quad (3.32)$$

gde je $\xi_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}} - \mu$, θ je ugao između \vec{k} i \vec{k}_1 i $|\vec{k}| = |\vec{k}_1| = k_F$. Za potencijal kontaktne interakcije $V(\vec{q}) = V_0$ dobijamo da je $\frac{1}{m^*}$ konačno i pozitivno, pa je sistem stabilan u odnosu na jednočestične ekscitacije.

3.3. BCS teorija srednjeg polja

U prošlom odeljku smo videli da HF prilaz vodi stabilnoj konfiguraciji koja je analogna opisu običnog elektronskog gasa. Druga mogućnost za kompozitne fermione bez spina u efektivnom magnetnom polju $B^* = 0$, koju želimo da ispitamo, jeste p-talasno BCS sparivanje.

Polazimo ponovo od Ridovog hamiltonijana (3.26)

$$H = \frac{1}{2} \iiint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) e^{-\frac{i}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \times \vec{q}} c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} \quad (3.33)$$

koji najpre redukujemo na Kuperov kanal: $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1 = -\vec{k}$,

$$H_{BCS} = \frac{1}{2} \iint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) e^{-i\vec{k} \times \vec{q}} c_{\vec{k} + \vec{q}}^\dagger c_{-\vec{k} - \vec{q}}^\dagger c_{-\vec{k}} c_{\vec{k}}. \quad (3.34)$$

Možemo da preimenujemo indekse tako da dobijemo

$$H_{BCS} = \frac{1}{2} \iint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{k} - \vec{q}) e^{i\vec{k} \times \vec{q}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}}. \quad (3.35)$$

U aproksimaciji srednjeg polja

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} &= \left(\langle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \rangle - (c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger - \langle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \rangle) \right) \left(\langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle - (c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} - \langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle) \right) \\ &\approx -\langle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \rangle \langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle + \langle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \rangle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} + \langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \end{aligned} \quad (3.36)$$

gde smo zanemarili kvadrat fluktuacije. Kada izraz u (3.36) zamenimo u (3.35) dobijamo BCS hamiltonijan u aproksimaciji srednjeg polja:

$$H_{BCS}^{MF} = \frac{1}{2} \iint \frac{d^2q d^2k}{(2\pi)^4} \tilde{V}(\vec{k} - \vec{q}) e^{i\vec{k} \times \vec{q}} \left(-\langle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \rangle \langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle + \langle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \rangle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} + \langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger \right) \quad (3.37)$$

Kao i u običnoj BCS teoriji definišemo parametar uređenja

$$\Delta_{\vec{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{k} - \vec{q}) e^{i\vec{k} \times \vec{q}} \langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle. \quad (3.38)$$

Uzimajući i jednočestični član, na kraju dobijamo efektivni hamiltonijan

$$K_{\text{eff}} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\xi_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} + \frac{1}{2} (\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}} c_{\vec{k}}) \right) \quad (3.39)$$

adaptiran na fiziku Kuperovih parova kompozitnih fermiona u aproksimaciji srednjeg polja.

Za kompleksno p-talasno sparivanje, $l = \pm 1$, uzimamo da je $\Delta_{\vec{k}}$ svojstvena funkcija ugaonog momenta: $\Delta_{\vec{k}} = |\Delta_{\vec{k}}| e^{il\varphi}$, gde je φ polarni ugao vektora \vec{k} [28].

Dalje, dijagonalizujemo hamiltonijan (3.39) uvodeći kanonsku transformaciju

$$\alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} c_{\vec{k}} - v_{\vec{k}} c_{-\vec{k}}^\dagger \quad (3.40)$$

$$\alpha_{-\vec{k}}^\dagger = u_{\vec{k}} c_{-\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}} \quad (3.41)$$

tako da je $\{\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^\dagger\} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$ i važi $|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1$. Kanonska transformacija prevodi hamiltonijan (3.39) u jednočestični oblik

$$K_{\text{eff}} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} E_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \text{const.}, \quad (3.42)$$

a da bismo tačno specificirali oblik energije bogoljubona možemo uzeti da je $[\alpha_{\vec{k}}, K_{\text{eff}}] = E_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}$. Odatle, koristeći da je $\Delta_{\vec{k}} = -\Delta_{-\vec{k}}$, $u_{\vec{k}} = u_{-\vec{k}} = u_{\vec{k}}^*$ i $v_{\vec{k}} = -v_{-\vec{k}}$, dobijamo Bogoljubov de Žen jednačine:

$$E_{\vec{k}}u_{\vec{k}} = \xi_{\vec{k}}u_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}}^*v_{\vec{k}} \quad (3.43)$$

$$E_{\vec{k}}v_{\vec{k}} = -\xi_{\vec{k}}v_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}}u_{\vec{k}} \quad (3.44)$$

Rešavajući ovaj sistem jednačina dobijamo da je

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2} \quad (3.45)$$

Sledeće što možemo jeste da ispitamo šta se dobija za parametar uređenja. Kada (3.38) izrazimo preko bogoljubonskih operatora dobijamo na temperaturi $T = 0$ da je

$$\Delta_{\vec{k}} = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{k} - \vec{q}) e^{i\vec{k} \times \vec{q}} u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \quad (3.46)$$

odnosno kad iskoristimo relaciju (koja se takođe nalazi iz Bogoljubov de Žen jednačina)

$$u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = -\frac{\Delta_{\vec{k}}}{2E_{\vec{k}}}$$

imamo samousaglašenu jednačinu za parametar uređenja

$$\Delta_{\vec{k}} = - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{k} - \vec{q}) e^{i\vec{k} \times \vec{q}} \frac{\Delta_{\vec{q}}}{2E_{\vec{q}}} \quad (3.47)$$

U slučaju kontaktne interakcije potencijal ima oblik $\tilde{V}(\vec{k} - \vec{q}) = V_0 e^{-\frac{|\vec{k}-\vec{q}|^2}{2}}$ pa je

$$\Delta_{\vec{k}} = -V_0 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{-\frac{|\vec{k}-\vec{q}|^2}{2}} e^{i\vec{k} \times \vec{q}} \frac{|\Delta_{\vec{k}}| e^{il\varphi}}{2E_{\vec{q}}} \quad (3.48)$$

Kada izračunamo ugaoni deo integrala

$$J_{\varphi} = \int \frac{d\varphi}{2\pi} e^{kq(\cos \varphi - i \sin \varphi) + il\varphi}$$

za dva p-talasna kanala dobijamo

$$J_{\varphi} = \begin{cases} 0, & l = 1 \\ kq \geq 0, & l = -1. \end{cases} \quad (3.49)$$

Oba slučaja ne daju pozitivan i konačan procep pa zaključujemo da Ridov hamiltonijan ne dovodi do p-talasnog sparivanja kompozitnih fermiona.

4. Numerički eksperiment

Zbog makroskopske degeneracije Landauovih nivoa, kao što smo i ranije videli, frakciona Holova stanja ne možemo tretirati perturbativno. Stoga se numeričke metode egzaktne dijagonalizacije dosta često koriste u proučavanju ovakvih stanja.

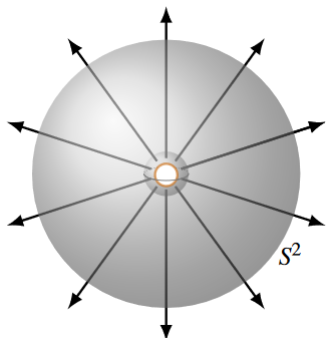
Da bismo beskonačni 2D sistem modelovali kao konačni sistem pogodan za numerički pristup, vrlo je zgodno da N čestica konfiniramo na površinu sfere. Očigledna prednost sferne geometrije je pre svega mogućnost da razmatramo unutrašnjost (eng. bulk) sistema zbog odsustva granice. Drugo, Landauovi nivoi imaju konačnu degeneraciju (za konačno magnetno polje) što je korisno u identifikaciji nekompresibilnih stanja. I treće, imamo potpuno očuvanje simetrije 2D sistema.

Numerički eksperimenti na sfernoj geometriji su pokazali da relativno mali sistemi (koji se mogu egzaktno rešiti) se ponašaju na mnogo načina kao beskonačni, tako da se neki parametri sistema (na primer karakteristične energije ekscitacije) mogu dobiti iz ovakvih numeričkih proračuna.

Cilj ovog poglavlja jeste da numeričkim pristupom ispitamo sistem bozona na punjenju $\nu = 1$, ali pre toga neophodno je da razmotrimo osnove formalizma postavke kvantnog Holovog sistema na sferi.

4.1. Kvantni Holov sistem na sferi

U sfernoj geometriji dvodimenzionalni list koji sadrži čestice je obmotan oko sfere, dok je ortogonalno (radijalno) magnetno polje generisano Dirakovim magnetnim monopolom postavljenim u centar sfere [40]. Jednočestičan problem u prisustvu ovog magnetnog monopola su detaljno razmatrali Vu i Jang [58], dok je u KHE ovu geometriju prvi uveo Holdejn [4].



Slika 4.1: Dirakov magnetni monopol postavljen u centar sfere

Magnetni fluks (računat u jedinicama ϕ_0) kroz površ sfere je kvantovan

$$\Phi = 4\pi R^2 B = 2Q\phi_0, \quad (4.1)$$

gde je $2Q$ celi broj, a R poluprečnik sfere. Jednočestični hamiltonijan možemo zapisati na sledeći način

$$H = \frac{|\vec{\Lambda}|^2}{2mR^2}, \quad (4.2)$$

gde je

$$\vec{\Lambda} = \vec{R} \times \left(-i\hbar\nabla + \frac{c}{\hbar}\vec{A}(\vec{R}) \right) \quad (4.3)$$

kovarijantan ugaoni moment. Ako fiksiramo gejdž

$$\vec{A} = -\frac{\hbar c Q}{eR} \text{ctg } \theta \vec{e}_\phi \quad (4.4)$$

može se pokazati [40] da je

$$\Lambda^2 = L^2 - \hbar^2 Q^2, \quad (4.5)$$

gde je

$$\vec{L} = \vec{\Lambda} + \hbar Q \vec{\Omega} \quad (4.6)$$

operator ugaonog momenta koji zadovoljava Lijevu algebru $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ i $\vec{\Omega} = \frac{\vec{R}}{R}$. Pošto je $[L^2, L_z] = 0$, biramo svojstvene funkcije koje istovremeno dijagonalizuju H , L^2 i L_z . Te svojstvene funkcije nazivamo *sfernim magnetnim harmonicima* Y_{Qlm} , i za njih važi da je

$$\begin{aligned} L^2 Y_{Qlm} &= l(l+1)\hbar^2 Y_{Qlm} \\ L_z Y_{Qlm} &= m\hbar Y_{Qlm} \end{aligned}$$

gde je $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ i $m = -l, \dots, l$. Pošto operator ugaonog momenta nije kalibraciono invarijantna veličina, stoga ni celobrojnost m ne garantuje jedinstvenost Y_{Qlm} . Ispostavlja se [58] da zahtev jedinstvenosti stanja nameće uslov

$$m - Q = \text{ceo broj},$$

a pošto je Q ceo ili poluceo broj, takav je i m . Takođe, iz (4.5) sledi da je $l(l+1) \geq |Q|^2$, odakle dobijamo da su dozvoljene vrednosti

$$\begin{aligned} l &= |Q|, |Q| + 1, \dots \\ m &= -l, \dots, l. \end{aligned}$$

Svojstvene vrednosti Λ^2 su $l(l+1)\hbar^2 - \hbar^2 Q^2$, pa su svojstvene energije

$$E_{Q,l} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} (l(l+1) - Q^2) = \frac{l(l+1) - Q^2}{2|Q|} \hbar\omega_c \quad (4.7)$$

Ljuske ugaonog momenta, koje prebrojava l , predstavljaju Landauove nivoe u sfernoj geometriji. Degeneracija svakog nivoa je jednaka ukupnom broju m vrednosti tj. $2l + 1$.

4.1.1. Najniži Landauov nivo

Najniži Landauov nivo (LLL) ima $l = |Q|$, a talasna funkcija je oblika [40]

$$Y_{QQm} = \left(\frac{2Q+1}{4\pi} \binom{2Q}{2Q-m} \right)^{\frac{1}{2}} (-1)^{Q-m} v^{Q-m} u^{Q+m} \quad (4.8)$$

gde su

$$u = \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \quad \text{i} \quad v = \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \quad (4.9)$$

tzv. *Holdejnove spinorne promenljive* [4]. Ove promenljive nisu nezavisne, jer je $|u|^2 + |v|^2 = 1$. Ovo nam omogućava da dve promenljive stereografski preslikamo na jednu kompleksnu $z = 2R \frac{v}{u}$. Bazisna stanja su tada data sa

$$\frac{z^m}{\left(1 + \frac{|z|^2}{4R^2}\right)^{1 + \frac{N_\phi}{2}}}$$

a ugaoni moment u ravnoj (disk) geometriji je $L = \frac{N_\phi}{2} - m$. Primetimo da ako $N_\phi, R \rightarrow \infty$ tako da je $\frac{N_\phi}{R^2}$ fiksno, sfera postaje efektivno ravan i jednočestična stanja se svode na ona koja odgovaraju geometriji diska $z^m e^{-\frac{|z|^2}{4}}$.

Talasna funkcija popunjenog Landauovog nivoa je jedinstvena i može biti napisana kao Sletjeva determinanta sfernih magnetnih harmonika koja, nakon sređivanja, ima jednostavan oblik

$$\Phi_1 = \prod_{i < j} (u_i v_j - v_i u_j). \quad (4.10)$$

4.1.2. Spinska reprezentacija

S obzirom da Q može biti i poluceli broj, stanja najniže Landauove orbite $l = |Q|$ možemo predstaviti u spinskoj reprezentaciji (tj. kao stanja koja se transformišu po $SU(2)$ reprezentaciji). Drugim rečima, česticu na sferi sa ugaonim koordinatama $\vec{\Omega}$ možemo predstaviti kao spin usmeren u pravcu vektora $\vec{\Omega}$. Međutim, u najnižoj Landauovoj orbiti kinetička energija (odnosno kovarijantni ugaoni moment) je fiksna i stoga ugašena, pa efektivno imamo da je $l_i \sim Q \frac{x_i}{R}$. Ko rezultat ovoga imaćemo da koordinate čestice x_i ne komutiraju već zadovoljavaju algebru tzv. *razmazane (eng. fuzzy) sfere*

$$[x_i, x_j] = i\epsilon^{ijk} \frac{Q}{R} x_k \quad (4.11)$$

Spinska stanja su stoga razmazana oko pravca spina [59].

4.1.3. Šift

Za N -čestični sistem faktor potpunosti je definisan sa

$$\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2Q}, \quad (4.12)$$

međutim kada se radi o konačnim sistemima, ovaj faktor može biti blago pomeren od njegovog termodinamičkog limesa. Naime, za zatvorenu 2D mnogostrukost (kao što je sfera) veza između broja čestica N i broja kvanata fluksa $2Q$ je data sa

$$2Q = \frac{1}{\nu} N - \delta, \quad (4.13)$$

gde je δ broj, reda jedinice, koji zovemo *topološki pomeraj* (eng. *shift*) [60]. On je u vezi sa načinom odgovora sistema na zakrivljenost površi i predstavlja karakteristiku osnovnog stanja i topološke faze u kojoj se sistem čestica nalazi.

4.1.4. Holdejnovi pseudopotencijali

Egzaktna dijagonalizacija zahteva da najpre prebrojimo sva mnogočestična stanja, da izračunamo matrice elemente hamiltonijana, a zatim da dijagonalizujemo matricu hamiltonijana. Ako jednočestična stanja unutar Landauovog nivoa prebrojavamo sa kvantnim brojem m koji predstavlja projekciju ugaonog momenta na z osu, onda bazis N -čestičnog prostora stanja čine Slejterove determinante (sfernih magnetnih harmonika)

$$|m_1 m_2 \dots m_N\rangle = a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger \dots a_{m_N}^\dagger |0\rangle \quad (4.14)$$

Interakcioni hamiltonijan je dat sa

$$H = \frac{1}{2} \sum_{m_1, \dots, m_4 = -Q}^Q \langle m_1, m_2 | V | m_3, m_4 \rangle a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger a_{m_4} a_{m_3} \quad (4.15)$$

Ako je interakcija izotropna (zavisi samo od relativnih koordinata, a ne i od centra mase) i dvočestična, zgodno je preći sa nekorelisanog na simetrijski adaptiran bazis parova $|L, M\rangle$ relativnog ugaonog momenta¹ L i $M = -L, \dots, L$, pri čemu je

$$\langle m_1, m_2 | V | m_3, m_4 \rangle = \sum_{L=0}^{2Q} \sum_{M=-L}^L \langle Q m_1, Q m_2 | LM \rangle V_L \langle LM | Q m_3, Q m_4 \rangle \quad (4.16)$$

¹Relativan ugaoni momenat L i njegova z komponenta komutiraju sa većinom hamiltonijana od interesa pa su stoga dobri kvantni brojevi. Sva svojstvena stanja koja pripadaju istom multipletu L imaju istu energiju. Stoga je dovoljno raditi u potprostoru sa najmanjom L_z imajući u vidu da svako stanje tog potprostora označava multiplet od $2L + 1$ degenerisanih stanja celog Hilbertovog prostora. Takođe, može se pokazati da stanja sa $L = 0$ imaju uniformnu gustinu.

gde su koeficijenti u razvoju $\langle LM|Qm_i, Qm_j \rangle$ tzv. Klebš-Gordanovi koeficijenti, a $\{V_L : L = 0, \dots, 2Q\}$ su Holdejnovi pseudopotencijali koji predstavljaju energiju dve čestice u stanju sa relativnim ugaonim momentom L . Oni jedinstveno određuju interakcioni hamiltonijan u bilo kom izolovanom Landauovom nivou i mogu se direktno izračunati. Naime, kao što smo ranije spomenuli, problem interakcije čestica višeg Landauovog nivoa je matematički ekvivalentan problemu čestica unutar najnižeg Landauovog nivoa koje interaguju sa efektivnim potencijalom V_{eff} . Može se pokazati koristeći korene operatore (podizanja i spuštanja) da je Furijeov transform efektivne interakcije n -tog Landauovog nivoa projektovan na najniži Landauov nivo

$$V_{\text{eff}}(q) = \left(L_n \left(\frac{q^2}{2} \right) \right)^2 V(q) \quad (4.17)$$

gde je $L_n(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{(-1)^p}{p!} x^p$ Lagerov polinom, a $V(q)$ Furijeov transform interakcije unutar najnižeg Landauovog nivoa. Stoga sve dok smo ograničeni na samo jedan Landauov nivo problem je jedinstveno određen nizom brojeva V_L [40].

4.2. Egzaktna dijagonalizacija

U Poglavlju 3 smo videli da Ridov analitički pristup uz aproksimaciju srednjeg polja ne daje nikakvu mogućnost za sparivanje kompozitnih fermiona. U ovom odeljku, pomoću metode egzaktne dijagonalizacije, ispitaćemo kako se ponaša sistem malog broja (8-16) bozona na sferi sa faktorom punjenja $\nu = 1$. Konkretno, odredićemo energije osnovnog stanja i ispitati prisustvo procepa za tri relevantna šifta u zavisnosti od broja čestica, a zatim ćemo uporediti energije osnovnog stanja po čestici sva tri šifta u termodinamičkom limesu.

Ko što smo ranije spomenuli, u slučaju bozona faktor potpunosti $\nu = 1$ odgovara odsustvu magnetnog polja koje deluje na kompozitne fermione. Prethodne numeričke studije [22, 23, 24, 25, 26] rađene na torusu i sferi su pokazale da umesto Fermi tečnosti, kompozitni fermioni ipak podležu sparivanju. Talasna funkcija koja opisuje ovaj fenomen je tzv. *bozonski Fafijan*. On odgovara $l = -1$ (p-talasnom) Kuperovom kanalu i u ravni ima sledeći oblik

$$\Psi_{\text{BosePf}} = \text{Pf} \left(\frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j) e^{-\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2}, \quad (4.18)$$

Griter, Ven i Vilček [13] su pokazali da ovo stanje (slično kao i u fermionskom slučaju) predstavlja egzaktno osnovno stanje (energije nula) modelne tročestične interakcije oblika

$$H = V \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \quad (4.19)$$

koja daje nulu kad se tri bozona susretnu (u to se možemo uveriti razmatrajući približavanje dve čestice u prisustvu treće). Ova interakcija ima prirodnu generalizaciju na sfernu geometriju [61]. Za sistem $\nu=1$ bozona na sferi Fafijan ima sledeći oblik (do na eksponencijalni faktor)

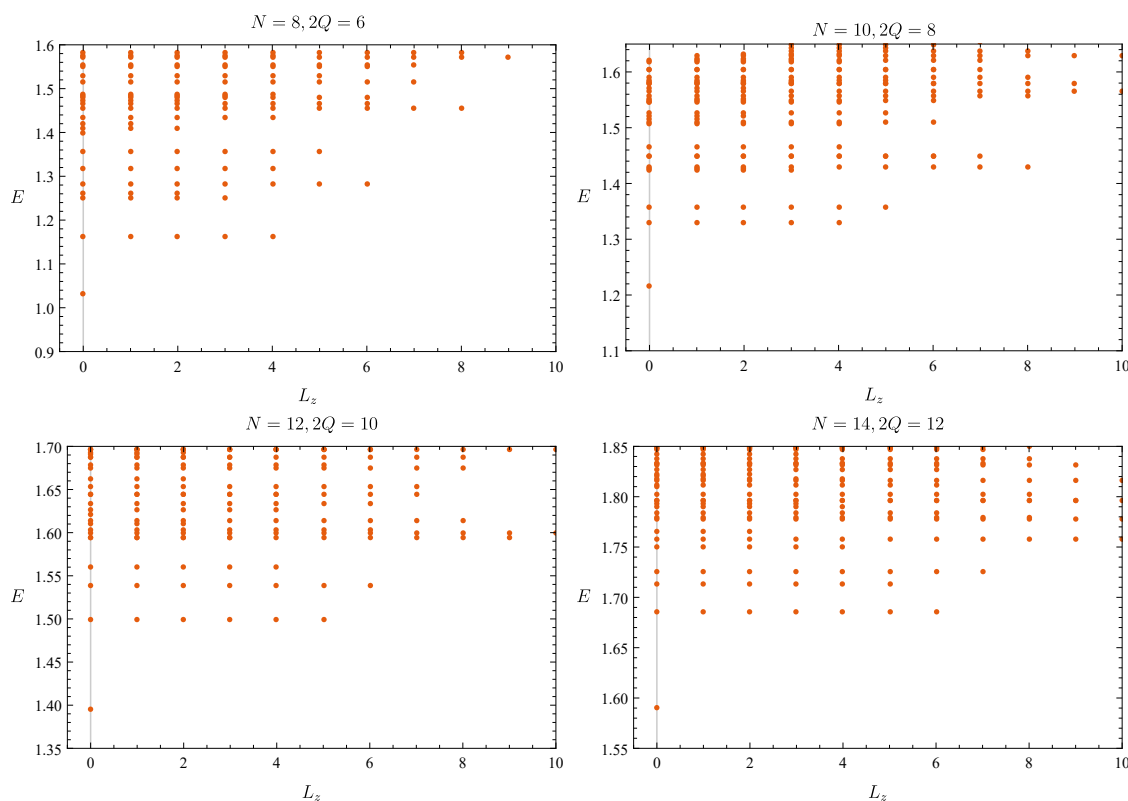
$$\Psi_{\text{BosePf}} = \text{Pf} \left(\frac{1}{u_i v_j - v_i u_j} \right) \prod_{i < j} (u_i v_j - v_i u_j). \quad (4.20)$$

i korespondira stanju $2Q = N - 2$ za svako N parno. Najbliže primicanje tri bozona odgovara maksimalnom totalnom ugaonom momentu tripleta, što je $L_{\text{max}} = 3Q$ (gde je Q ugaoni momenat pojedinačnog bozona). Eliminacija takve konfiguracije je ekvivalentna izbegavanju da se triplet poklopi. Tročestična interakcija u sfernoj geometriji stoga ima oblik

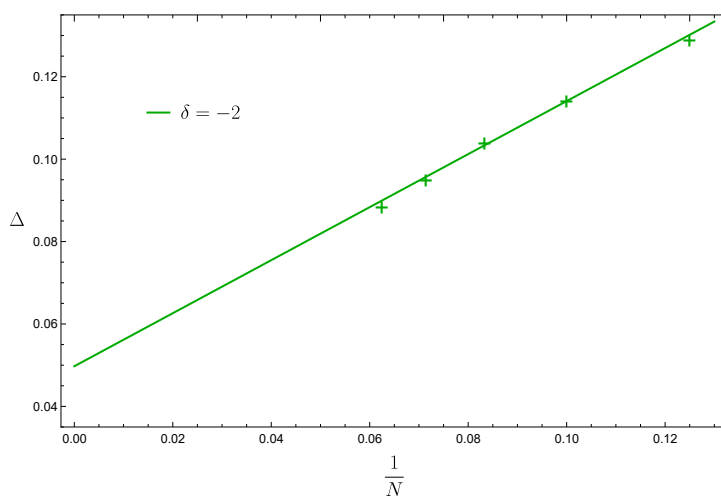
$$H = V \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} P_{ijk}(L_{\text{max}}), \quad (4.21)$$

gde je $P_{ijk}(\max)$ projektor na triplet ugaonog momenta L_{\max} .

Korišćenjem programskog paketa *DiagHam* [62] za $N=8-16$ bozona na sferi, u slučaju kontaktne dvočestične interakcije $V(\vec{q}) = V_0 \exp\left(-\frac{l_B^2 q^2}{2}\right)$, računat je spektar stanja $2Q = N - 2$ (šift $\delta = -2$). Treba istaći da je jedina skala dužine l_B (radimo u jedinicama u kojima je $l_B = 1$), i jedina skala energije je $\frac{V_0}{l_B^2}$. Rezultati su prikazani na Slici 4.2. Ovde možemo da vidimo prisustvo procepa između osnovnog i prvog pobuđenog stanja za svako računato N . Tačke procepa imaju finu konvergenciju ka termodinamičkom limesu i procenjeno je ekstrapolacijom ovih tačaka (linearnim fitom, Slika 4.3) da Fafijan ima procep 0.05(1) (što je potvrda rezultata u [24]).

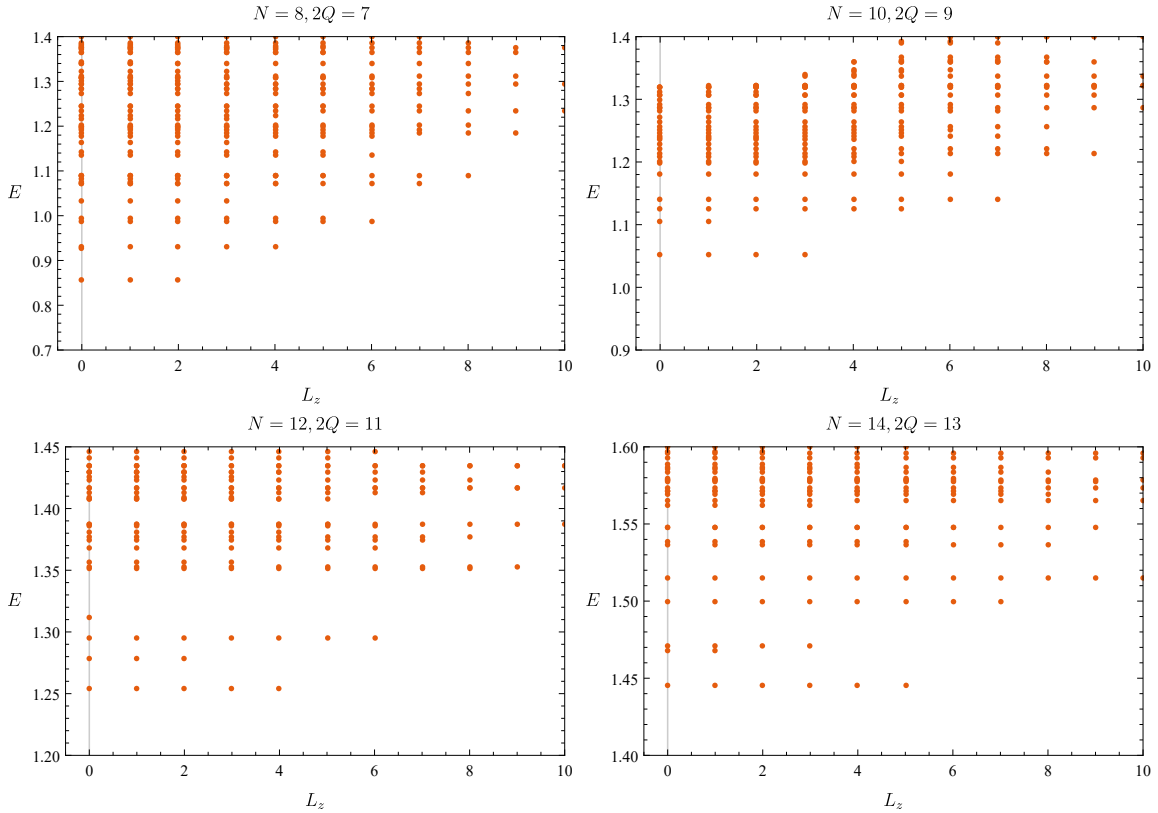


Slika 4.2: Spektar stanja $2Q = N - 2$



Slika 4.3: Procena procepa stanja $2Q = N - 2$ u termodinamičkom limesu

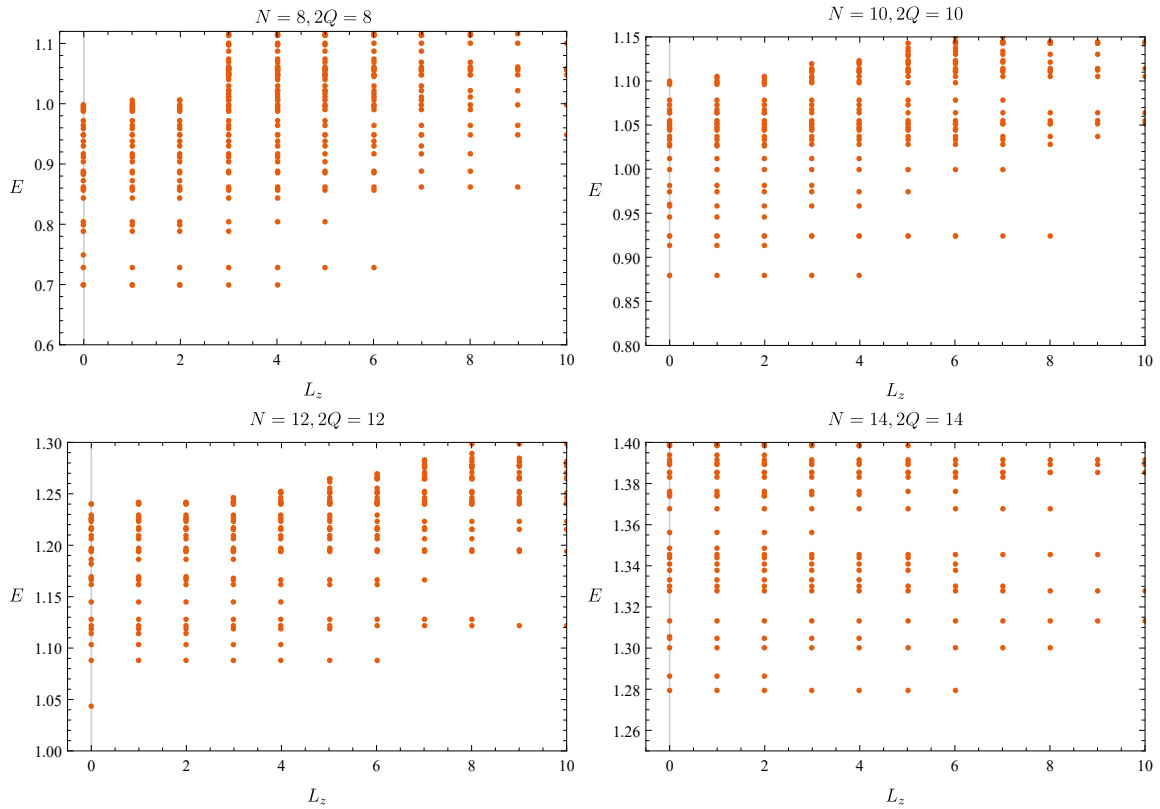
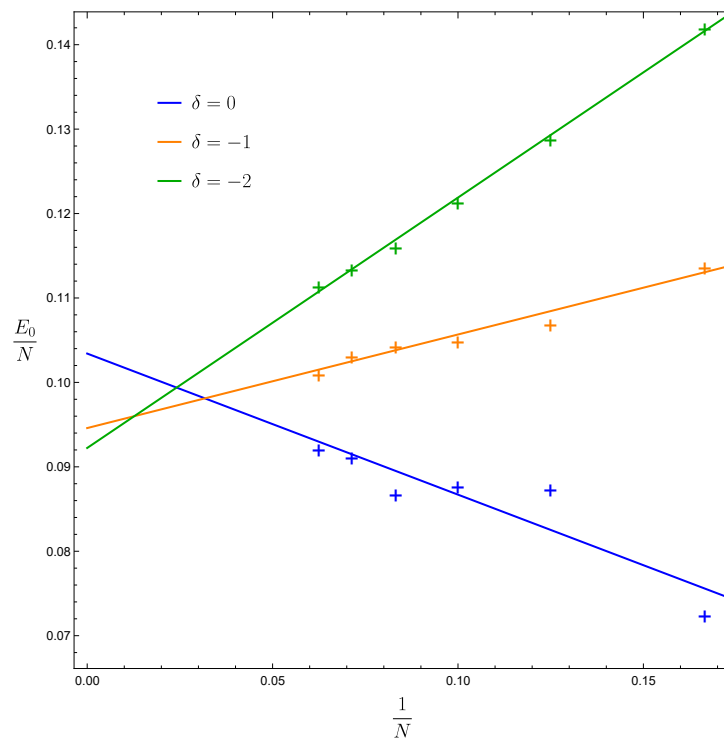
Takođe, računat je spektar za još dva relevantna stanja. Prvo sa šiftom $\delta = -1$ koje odgovara stanju Fermi tečnosti kompozitnih fermiona. Njegov spektar, prikazan na Slici 4.4, pokazuje odsustvo procepa za svako merenje (numeričko računanje) - što je bilo i očekivano.



Slika 4.4: Spektar stanja $2Q = N - 1$

Drugo, $\delta = 0$ korespondira $l = 1$ kanalu p-talasnog sparivanja (zvaćemo ga konjugovani Fafijan). Njegov spektar takođe pokazuje odsustvo procepa, osim u slučaju sa $N=12$ bozona gde možemo uočiti (Slika 4.5) nedegenerisano osnovno stanje sa blagim razmakom između osnovnog i prvog pobuđenog stanja. Ovo stanje ne pokazuje jasne znake konvergencije procepa, stoga nije moguće oceniti da li je u termodinamičkom limesu ovo stanje kompresibilno ili nije.

Na kraju smo ispitali koje stanje od ova tri ima veću verovatnoću realizacije u termodinamičkom limesu. Ovo smo procenili na sledeći način. Najpre smo energije osnovnog stanja po čestici za sva tri šifta i različite veličine sistema ucrtali na grafik (Slika 4.6). Zatim je za svaki set tačaka (koje odgovaraju određenom šiftu) određen linearni fit, čiji presek na y -osi grafika upravo predstavlja energiju osnovnog stanja u termodinamičkom limesu ($N \rightarrow \infty$). Sa grafika možemo da vidimo da u termodinamičkom limesu najnižu energiju ima stanje sa šiftom $\delta = -2$ (bozonski Fafijan). Ako je Fafijan zaista dobro uspostavljena faza u termodinamičkom limesu očekivali bismo da stanje sa šiftom $\delta = -1$ i $\delta = 0$ reprezentuju naelektrisane ekscitacije jedne, odnosno dve kvazišupljine, respektivno, i to je ono što trenutno vidimo.

Slika 4.5: Spektar stanja $2Q = N$ Slika 4.6: Grafik zavisnosti energije osnovnog stanja po čestici E_0/N od inverza broja čestica $1/N$, za tri različite vrednosti šifra: $\delta = -2, -1, 0$.

5. Mehanizam sparivanja kompozitnih fermiona

U poglavlju 4 smo videli da direktan analitički pristup uz aproksimaciju srednjeg polja vodi jednom kompresibilnom stanju bozona na punjenju $\nu = 1$. Sa druge strane, kako smo se i sami uverili u poglavlju 5. ovome protivreče numerički proračuni koji tvrde da je osnovno stanje nekompresibilno. Cilj ovog poglavlja jeste da ponudi rešenje za trenutnu koliziju rezultata analitike i numerike.

Do sada smo već mogli da primetimo da topologija predstavlja važan aspekt kvantnog Holog sistema. Jako magnetno polje uzrokuje specifičnu organizuju čestica, odnosno njihovo kolektivno ponašanje koje je rigidno na kontinualne deformacije sistema. U reprezentaciji kompozitnih fermiona ona je izražena kroz prisustvo vorteksa, odnosno, u formalizmu bozona na $\nu = 1$, kroz prisustvo $SU(N)_R$ gejdž simetrije. Kao što znamo Rid je dinamiku kompozitnih fermiona sistema bozona na punjenju $\nu = 1$ formulisao sa hamiltonijanom

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V(|\vec{q}|) : \rho_{\vec{q}}^L \rho_{-\vec{q}}^L : \quad (5.1)$$

Međutim, upravo gore pomenuta gejdž simetrija nam omogućava da modifikujemo ovaj hamiltonijan dodavajući mu član koji isključivo komutira sa vezom $\rho^R(\vec{q}) = 0$, ($\vec{q} \neq 0$), odnosno dodavajući operator koji je nula na fizičkom prostoru stanja. Modifikovani hamiltonijan koji predložimo je oblika

$$H^{\text{mod}} = H + C \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{V(|\vec{q}|)}{2} \rho_{-\vec{q}}^R (\rho_{\vec{q}}^R - \rho_{\vec{q}}^L) \quad (5.2)$$

gde je C pozitivan broj. Razlog dodavanja ovog člana (skraćeno zapisanog $\rho^R(\rho^R - \rho^L)$) je motivisan sa dva razloga: (1) kada se za njega samog ispita mogućnost sparivanja dobija se da ona odgovara kanalu $l = -1$ i (2) u dugotalasnom limesu kada ga prevedemo pomoću inverza Čern-Sajmons transformacije u reprezentaciju elementarnih bozona (Dodatak A) dobijamo sledeći izraz za tročestičnu interakciju

$$H = \sum_{i < j < k} \delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \delta^2(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \quad (5.3)$$

za koji smo ranije rekli da predstavlja modelnu interakciju za (idealni) Fafijan (4.18).

Pošto u modifikovanom hamiltonijanu imamo dva člana: Ridov (5.1) koji favorizuje stanje Fermi tečnost i $C \rho_{-\vec{q}}^R (\rho_{\vec{q}}^R - \rho_{\vec{q}}^L)$ koji favorizuje idealni fafijan, prva stvar koju želimo da ispitamo jeste za koje vrednosti broja C možemo da dobijemo stanje u kojem su kompozitni fermioni p-talasno upareni? Procedura je ista kao ona koju smo sproveli u Odeljku 3.3. Mi ćemo ovde izneti samo najvažnije instance računa.

Polazimo sa raspisivanjem modifikovanog hamiltonijana preko c^\dagger , c operatora:

$$H^{\text{mod}} = \iiint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{V}(|\vec{q}|)}{2} e^{-\frac{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \times \vec{q}}{2}} c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2}^- c_{\vec{k}_1}^- + \\ + C \iiint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{V}(|\vec{q}|)}{2} e^{-\frac{i\vec{k}_1 \times \vec{q}}{2}} (-2i) \sin\left(\frac{i\vec{k}_2 \times \vec{q}}{2}\right) c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_1}^- c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2}^- \cdot \quad (5.4)$$

Kada iskoristimo antikomutacione relacije da normalno uredimo c^\dagger , c operatore dobijamo

$$\begin{aligned}
 H^{\text{mod}} &= \iiint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{V}(|\vec{q}|)}{2} e^{-\frac{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \times \vec{q}}{2}} c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} - \\
 &- iC \iint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{V}(|\vec{q}|) e^{-\frac{i\vec{k} \times \vec{q}}{2}} \sin\left(\frac{i\vec{k} \times \vec{q}}{2}\right) c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} - \\
 &- iC \iiint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \tilde{V}(|\vec{q}|) e^{-\frac{i\vec{k}_1 \times \vec{q}}{2}} \sin\left(\frac{i\vec{k}_2 \times \vec{q}}{2}\right) c_{\vec{k}_1 + \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2 - \vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}_2} c_{\vec{k}_1} . \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Primetimo da prisustvo jednočestičnog člana u drugom redu izraza (5.5). narušava bust invarijantnost odnosno ovakva dinamika sama po sebi uključuje mešanje Landauovih nivoa koje je inače neophodno za stabilizaciju fafijana. Dalje, oblik hamiltonijana adaptiran na p -talasni kanal u aproksimaciji srednjeg polja je

$$K_{\text{eff}} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\xi_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} + \frac{1}{2} (\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^\dagger c_{-\vec{k}}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}} c_{\vec{k}}) \right) \quad (5.6)$$

gde je parametar uredenja

$$\Delta_{\vec{k}} = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{q}|) \left(e^{i\vec{k} \times \vec{q}} + C e^{-i\vec{k} \times \vec{q}} - C \right) \langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle. \quad (5.7)$$

Uzimanjem, na $T=0$ da je $\langle c_{-\vec{q}} c_{\vec{q}} \rangle = u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} = -\frac{\Delta_{\vec{q}}}{2E_{\vec{q}}}$ i $\Delta_{\vec{q}} = |\Delta_{\vec{q}}| e^{i\varphi}$ dobija se samousaglašena jednačina

$$\Delta_{\vec{k}} = - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{V}(|\vec{k} - \vec{q}|) \left(e^{i\vec{k} \times \vec{q}} + C e^{-i\vec{k} \times \vec{q}} - C \right) \frac{\Delta_{\vec{q}}}{2E_{\vec{q}}}. \quad (5.8)$$

Pretpostavljajući da je interakcija ponovo kontaktna, nakon integracije po ugaonom delu i zamenu $E_{\vec{k}} = \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}$ dobijamo

$$\Delta_{\vec{k}} = -\frac{V_0}{2} e^{-\frac{k^2}{2}} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} q e^{-\frac{q^2}{2}} (kq - C I_1(kq)) \frac{|\Delta_{\vec{q}}|}{\sqrt{\xi_{\vec{q}}^2 + |\Delta_{\vec{q}}|^2}} \quad (5.9)$$

gde $I_1(x)$ predstavlja modifikovanu Beselevu funkciju (prve vrste) koja kada se razvije u red ima oblik

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \mathcal{O}(x^7). \quad (5.10)$$

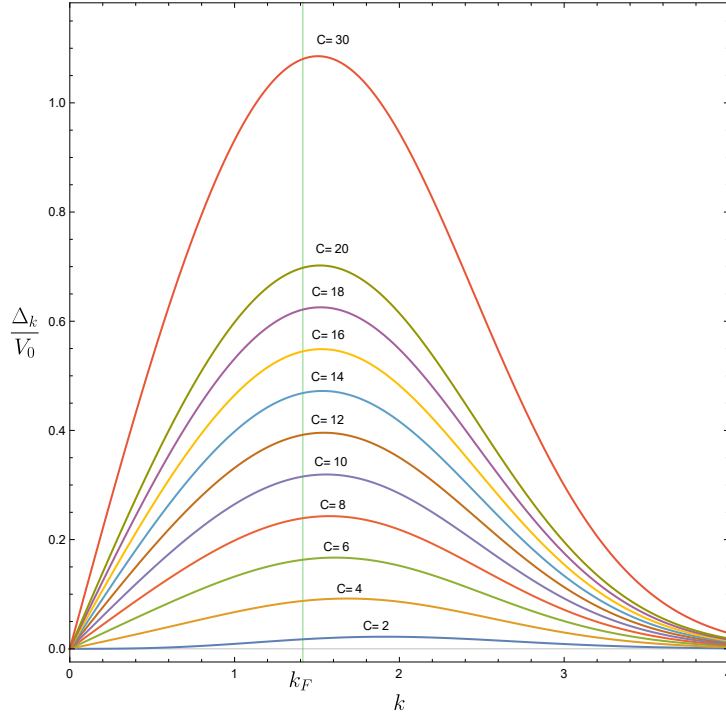
Odavde možemo da zaključimo da (1) stanje sa kanalom $l = -1$ dobijamo samo za $C > 2$ i (2) tada u dugotalasnom limesu imamo ponašanje $\Delta_k \sim k$, što prema [28] doprinosi uverenju da se zaista radi o fafijanu. Ipak neophodno je ispitati disperzionu relaciju i energiju Bogoljubona za razne vrednosti C , kako bismo imali jasniju sliku o sparivanju.

Disperziona relacija ima dva doprinosa. Jedan dolazi od jednočestičnog dela modifikovanog hamiltonijana (5.5):

$$\epsilon_1(\vec{k}) = \frac{C}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V_0 e^{-\frac{q^2}{2}} \left(1 - e^{i\vec{k} \times \vec{q}} \right) \quad (5.11)$$

odakle se nakon integracije dobija

$$\epsilon_1(\vec{k}) = \frac{CV_0}{4\pi} \left(1 - e^{-\frac{k^2}{2}} \right). \quad (5.12)$$



Slika 5.1: Grafik zavisnosti parametra uredjenja od impulsa kvazičestice k , dobijen numeričkim rešavanjem samousaglašene jednačine (5.9).

Drugi doprinos dolazi od Hartri-Fokovog usrednjavanja dvočestičnog dela modifikovanog hamiltonijana (5.5):

$$\epsilon_{\text{HF}}(\vec{k}) = \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \tilde{V}(0) n_{\vec{k}_1} - \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{k} - \vec{k}_1) (1 - C e^{i\vec{k} \times \vec{k}_1}) n_{\vec{k}_1}, \quad (5.13)$$

gde nakon integracije dobijamo sledeći izraz

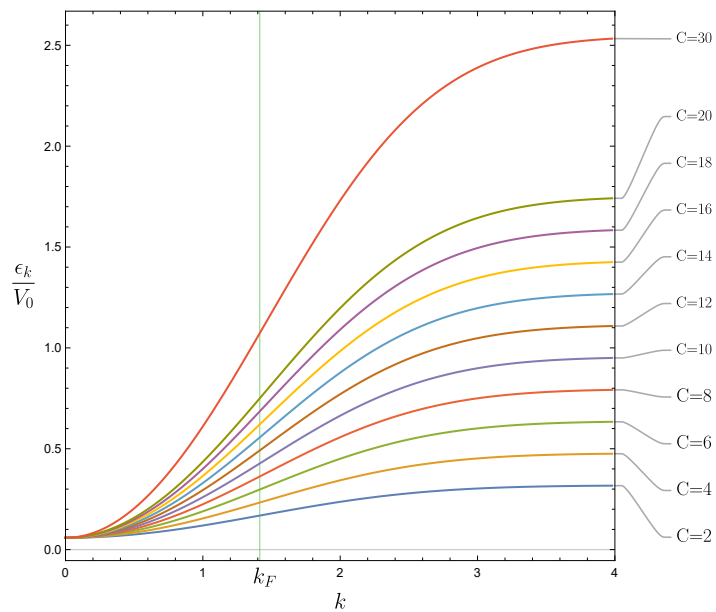
$$\epsilon_{\text{HF}}(\vec{k}) = V_0 \left(\frac{k_F}{4\pi} + \frac{C}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2}} \left(1 - e^{-\frac{k_F^2}{2}} - (1 + C) \int_0^{k_F} \frac{dk_1}{2\pi} k_1 e^{-\frac{k_1^2}{2}} I_0(kk_1) \right) \right), \quad (5.14)$$

u kome je preostali integral sa modifikovanom Beselevom funkcijom $I_0(kq)$ dalje računat numerički korišćenjem programa Wolfram Mathematica. U istom programu je dobijen i grafik ukupne jednočestične energije $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_{\text{HF}}$ dat na Slici 5.1. Ovde možemo da vidimo da je disperzija dobro definisana (monotono rastuća funkcija sa porastom k) za svako $C > 2$.

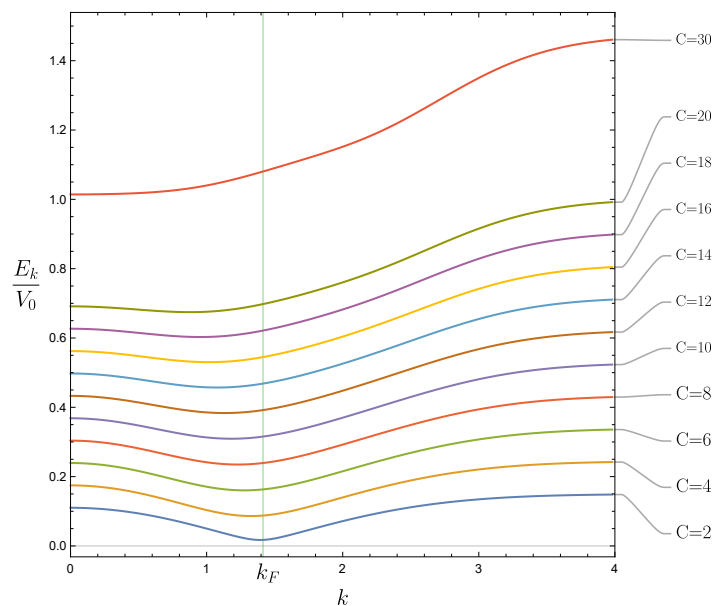
Sledeće što želimo jeste da ispitamo zavisnost najniže energije bogoljubona od impulsa za $C > 2$. Ona u p-talsnom sparivanju ima oblik

$$E_0 = \sum_k \left(\frac{\xi_{\vec{k}} - E_{\vec{k}}}{2} + \frac{|\Delta_{\vec{k}}|^2}{4E_{\vec{k}}} \right) \quad (5.15)$$

Numeričkim rešavanjem samousaglašene jednačine (5.9) i ubacivanjem rešenja u (5.15) dobija se grafik za najnižu energiju bogoljubona dat na Slici 5.2. Ovde možemo da primetimo da najniža energija bogoljubona za $C \approx 2$ ima minimum u $k = k_F$, što odgovara slabom kuplovanju (koje imamo u običnim superprovodnicima). Povećavajući C vidimo postepeno pomeranje minimuma iz $k = k_F$ do $k = 0$, odnosno kontinualni prelazak iz faze sa slabim u fazu sa jakim kuplovanjem (sparivanjem na nivou svih kvazičestica). Ovim zaključujemo da naš modifikovani hamiltonijan (5.2), za veće vrednosti C , zaista generiše stabilno osnovno stanje fafijanskog tipa.



Slika 5.2: Grafik totalne jednočestične energije u zavisnosti od impulsa kvazičestice k za različite vrednosti C .



Slika 5.3: Grafik najniže energije bogoljubona u zavisnosti od impulsa kvazičestice k za različite vrednosti C .

6. Zaključak

U ovom radu, problemu prirode osnovnog stanja sistema bozona na punjenju jedan, pristupili smo na dva načina. U Poglavlju 4 je numeričkom metodom egzaktne dijagonalizacije na sferi dobijen spektar za tri relevantna šifta, gde smo se, uz ekstrapolaciju tačaka do termodinamičkog limesa, uverili da je nekompresibilno stanje sa šiftom -2 najniže energije. Ostala dva stanja predstavljaju naelektrisane ekscitacije u poretku koji je u saglasnosti sa očekivanjem da je osnovno stanje sistema p-talasno spareno stanje kompozitnih fermiona. U Poglavlju 5 smo uspeli da analitički u aproksimaciji srednjeg polja dođemo do mehanizma za sparivanje, modifikujući Ridov hamiltonijan sa (5.2). Neka pitanja ostaju otvorena i u ovom poglavlju ćemo ih kratko prodiskutovati.

Mi smo za našu konstrukciju pokazali da ona daje osnovno stanje fafijanskog tipa, ali ne znamo koje C bi odgovaralo problemu u izolovanom najnižem LL. Ono što možemo, sa jedne strane, imajući u vidu naš opis i numeričke rezultate u [63, 64], jeste da zaključimo da za dvočestičnu interakciju nemamo idealan Fafijan i da je C verovatno reda (u blizini) 2 tj. u izolovanom najnižem LL sa dosta velikom verovatnoćom imamo slabo kuplovani sistem sa p-talasnim sparivanjem. Sa druge strane, prema referenci [65] postoji mogućnost da modifikacijom interakcije – dodavanjem, pored V_0 , i Holdejnovog pseudopotencijala V_2 (dužeg dometa) – “pojačamo” p-talasno sparivanje, odnosno da utičemo na vrednosti C . Ovim bismo mogli da stignemo do idealnog Fafijana koji se kao takav verovatno nalazi u blizini kritične tačke, između nekompresibilnog, sparenog i kompresibilnog stanja prema referenci [65]. Naš sledeći zadatak, u budućem radu, biće da taj prelaz opišemo u okviru formalizma koji smo ovde primenili. Na kraju, cilj nam je da formulišemo analogan formalizam za sistem elektrona u polupopunjenom Landauovom nivou.

A. Inverzni Čern-Sajmons prelaz za $\rho^R(\rho^R - \rho^L)$

U ovom dodatku želimo da odredimo oblik interakcije

$$H_{\text{Pf}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V_0 e^{-\frac{q^2}{2}} \rho_{-\vec{q}}^R (\rho_{\vec{q}}^R - \rho_{\vec{q}}^L) \quad (\text{A.1})$$

na jeziku elementarnih bozona. U dugotalasnom limesu, $|\vec{q}| \ll 1$, uzimamo u razvoju samo linearne članove po q

$$\begin{aligned} \rho_{\vec{q}}^R - \rho_{\vec{q}}^L &= -2i \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \sin\left(\frac{\vec{k} \times \vec{q}}{2}\right) c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}} \\ &\approx \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \vec{k} \times \vec{q} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}} = -i\vec{K} \times \vec{q}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

gde $\vec{K} = \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} i\vec{k} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}}$ predstavlja kanonski impuls KF, i

$$\rho_{\vec{q}}^R = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\frac{i}{2}\vec{k} \times \vec{q}} c_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger c_{\vec{k}} \approx \rho_{\vec{q}}, \quad (\text{A.3})$$

gde je $\rho_{\vec{q}}$ neprojektovana gustina bozona. Tada (A.1) postaje

$$H_{\text{Pf}} \approx \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V_0 \rho_{-\vec{q}} (-i\vec{K} \times \vec{q}). \quad (\text{A.4})$$

Ako se bozoni, naelektrisanja $q = -e$, nalaze u prisustvu spoljašnjeg polja $\nabla \times \vec{A} = -B$ ($B > 0$), Čern-Sajmons (CS) transformacija (koju smo uveli u Odeljku 2.2) preslikava kovarijantni impuls bozona $\vec{\Pi}_b = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$ u kovarijantni impuls kompozitnih fermiona $\vec{\Pi}_{KF} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} + \frac{e}{c}\vec{a}$, gde je

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{x}) &= \frac{\phi_0}{2\pi} \int dy \vec{\nabla} \alpha(x, y) \rho(\vec{y}) \\ \text{ili } \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{x}) &= \phi_0 \rho(\vec{x}). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

U reprezentaciji druge kvantizacije je

$$\Psi^\dagger(\vec{p}_{CF})\Psi = \Phi^\dagger(\vec{p}_b - \frac{e}{c}\vec{a})\Phi = \Phi^\dagger \vec{p}_b \Phi - \frac{e}{c} \vec{a} \rho \quad (\text{A.6})$$

Stoga, inverznom CS transformacijom prelazimo sa (A.4) na hamiltonijan bozona (dat u funkcionalnom zapisu)

$$H_{\text{Pf}} \approx \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V_0 \rho_{\vec{q}} \left(-i(\vec{K} - \frac{e}{c}\vec{a}\rho)_{\vec{q}} \times \vec{q} \right). \quad (\text{A.7})$$

Dalje nas zanima samo član

$$H_{\text{Pf}} \approx \frac{ie}{2c} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} V_0 \rho_{-\vec{q}} (\vec{a}\rho)_{\vec{q}} \times \vec{q}. \quad (\text{A.8})$$

Može se lako pokazati da je Furijeov transform veličine $\vec{a}\rho$

$$(\vec{a}\rho)_{\vec{q}} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \vec{a}_{\vec{q}-\vec{k}} \rho_{\vec{k}}. \quad (\text{A.9})$$

Kad ovo uvrstimo u (A.8) i napravimo smenu $\vec{k} \rightarrow \vec{k} + \vec{q}$ dobijemo

$$\begin{aligned} H_{\text{Pf}} &\approx \frac{ie}{2c} \iint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} V_0 \rho_{-\vec{q}} \rho_{-\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}+\vec{q}} \times \vec{q} \\ &= \frac{ieV_0}{2c} \iint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \rho_{-\vec{q}} \rho_{-\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}+\vec{q}} \times \frac{\vec{q} + \vec{k}}{2} \\ &= \frac{eV_0}{2c} \iint \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \iiint d^2r_1 d^2r_2 d^2r_3 e^{i\vec{r}_1 \cdot \vec{q}} e^{i\vec{r}_2 \cdot \vec{k}} e^{-i\vec{r}_3 \cdot (\vec{q} + \vec{k})} \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) \nabla \times \vec{a} \end{aligned}$$

Na kraju integralimo po impulsima, iskoristimo da je $\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) = \phi_0 \rho(\vec{r})$ i konačno dobijamo

$$H_{\text{Pf}} \approx \frac{e\phi_0 V_0}{2c} \iiint d^2r_1 d^2r_2 d^2r_3 \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) \rho(\vec{r}_3) \delta^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3). \quad (\text{A.10})$$

Bibliografija

- [1] K. V. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, “New method for high-accuracy determination of the fine structure constant based on quantized Hall resistance”, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494, (1980).
- [2] D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard, “Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit”, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
- [3] R. B. Laughlin, “Anomalous Quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally excitations”, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [4] F. D. M. Haldane, “Fractional quantization of the Hall effect: A hierarchy of incompressible quantum fluid state”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605 (1993).
- [5] B. I. Halperin, “Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall state”, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1583 (1984).
- [6] J.K. Jain, “Composite-fermion approach for the fractional Quantum Hall effect”, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989).
- [7] A. Lopez, E. Fradkin, “Fractional quantum Hall effect and Chern-Simons gauge theories”, *Phys. Rev B* **44**, 5246 (1991).
- [8] B. I. Halperin, P. A. Lee, N. Read, “Theory of the half-filled Landau level”, *Phys. Rev. B.* **47**, 7312 (1993).
- [9] V. Kalmeyer, S.C. Zhang, “Metallic phase of the quantum Hall system at even-denominator filling fractions”, *Phys. Rev. B* **46**, 9889 (1992).
- [10] R. Willet, J. P. Eisenstein, H. L. Stormer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, J. N. English, “Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1776 (1987).
- [11] G. Moore, N. Read, “Nonabelions in the fractional quantum Hall effect”, *Nucl. Phys. B* **360**, 362 (1991).
- [12] M. Greiter, X. G. Wen, F. Wilczek, “Paired Hall state at half-filled”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3205 (1991).
- [13] M. Greiter, X. G. Wen, F. Wilczek, “Paired Hall state”, *Nucl. Phys. B* **374**, 567 (1992).
- [14] R. H. Morf, “Transition from quantum Hall to compressible state in the second Landau level: New light on the $\nu = 5/2$ enigma”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1505 (1998); [arXiv:cond-mat/9809024](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9809024).
- [15] E. H. Rezayi, F. D. M. Haldane, “Incompressible paired state Hall state, stripe order, and the composite fermion liquid phase in half-filled Landau levels”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4685 (2000); [arXiv:cond-mat/9906137](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9906137).

- [16] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, S. Das Sarma, “Non-Abelian anyons and topological quantum computation”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1089 (2008).
- [17] D. Bohm, D. Pines, “A collective description of electron interactions: III. Coulomb interactions in degenerate electron gas”, *Phys. Rev.* **92**, 609 (1953).
- [18] G. Murty, R. Shankar, “Hamiltonian theories of the Fractional quantum Hall effect”, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1101 (2003).
- [19] N. Read, “Theory of the half-filled Landau level”, *Semicond. Sci. Technol.* **9**, 1859 (1994); [arXiv:cond-mat/9501090](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9501090).
- [20] V. Pasquier, F. D. M. Haldane “A dipole interpretation of the $\nu = 1/2$ state”, *Nucl. Phys. B* **516**, 719 (1998); [arXiv:cond-mat/9712169](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9712169).
- [21] N. Read “Lowest-Landau-level theory of the Quantum Hall effect: The Fermi-liquid-like state of bosons at filling factor one”, *Phys. Rev. B* **58**, 16262 (1998); [arXiv:cond-mat/9804294](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9804294).
- [22] G. Conright, S. Girvin, “Anyons, the Quantum Hall effect and two-dimensional superconductivity”, *International Journal of Modern Physics B* **3**, 12, 1943 (1989).
- [23] N. R. Cooper, N. K. Wilkin, J. M. F. Gunn “Quantum phases of vortices in rotating Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120405 (Aug 2001).
- [24] N. Regnault, Th. Jolicoeur, “Quantum Hall fractions in Rotating Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 3, (2003); [arXiv:cond-mat/0212477](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0212477)
- [25] C.C. Chang, N. Regnault, Th. Jolicoeur, J. K. Jain, “Composite-fermionization of bosons in rapidly rotating atomic traps“, *Phys. Rev. A* **72**, 013611 (2005); [arXiv:cond-mat/0412253v1](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0412253v1).
- [26] N.R. Cooper, “Rapidly rotating atomic gases“ *Advances in Physics* **57**, 539 (2008); [arXiv:0810.4398](https://arxiv.org/abs/0810.4398).
- [27] Z. Dong, T. Senthil, “Noncommutative field theory and composite fermion liquids in some quantum Hall systems”, *Phys. Rev. B* **102**, 205126 (2020); [arXiv:2006.01282](https://arxiv.org/abs/2006.01282).
- [28] D. Green, N. Read, “Paired state of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect”, *Phys. Rev. B* **61**, 10267-10297 (2000); [arXiv:cond-mat/9906453](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9906453).
- [29] Steven Girvin, “The quantum Hall effect: Novel Excitations and Broken Symmetries”, in A. Comtet, T. Jolicoeur, S. Ouvry, F. David, editors, *Topological Aspects of Low Dimensional Systems*. Addison Wesley (2000); <https://arxiv.org/abs/cond-mat/9907002>
- [30] Richard E. Prange, Steven M. Girvin, “The Quantum Hall Effect”, (2nd ed.), Springer-Verlag, 1990.
- [31] Michael Stone (editor), “Quantum Hall Effect”, World Scientific, 1992.
- [32] A. H. MacDonald, “Introduction to the Physics of Quantum Hall Regime”, [arXiv:cond-mat/9410047](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9410047), 1994.
- [33] T. Chakraborty, P. Pietilainen, “The Quantum Hall Effect, Integral and Fractional”, Springer-Verlag, 1995.

-
- [34] Daijiro Yoshioka, “The Quantum Hall Effect”, Springer, 2002
- [35] Lucjan Jacak, Poitr Sitko, Konrad Wieczovek, Arkadiusz Wojs, “Quantum Hall System – Brad group, composite fermions and fractional charge”, Oxford University Press, 2003.
- [36] X. G. Wen, “Quantum field Theory of Many-Body Systems”, Oxford University Press, 2004.
- [37] Chetan Nayak, “[Quantum Condensed Matter Physics – Lecture notes](#)” (2004).
- [38] Mark O. Goerbig “Quantum Hall Effect”. In Lecture notes for the Singapore session “Ultra cold gases and Quantum Information” of Les Houches Summer School (2009); [arXiv:0909.1998](#)
- [39] Milica V. Milovanović, “[Jako korelisani elektronski sistemi](#)”, 2008
- [40] J. Jain, “Composite fermions”, Cambridge University Press, 2007.
- [41] D. Tong, “[Lectures on the Quantum Hall effect](#)”, (2016).
- [42] Steven H. Simons, “Topological Quantum: Lecture notes and Proto-Book”, 2021.
- [43] S. H. Simon, “The Chern-Simons fermi liquid description of fractional quantum Hall states” in *Composite Fermions*, 191-194, World Scientific (1998); [arXiv:cond-mat/9812186](#)
- [44] E. Hall, “On a new action of the magnet on electric currents”, *Am. J. Math.* **2**, 287 (1879).
- [45] B. I. Halperin, “Quantized Hall conductance, current-carrying edge state and the existence of extended states in two-dimensional disordered potential”, *Phys. Rev. B* **25**, 2185-2190 (1982).
- [46] S. C. Zhang, H. Hanson, S. Kivelson, “Effective-field-theory model for the fractional quantum Hall effect”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 82 (1989).
- [47] S. C. Zhang “The Chern-Simons-Landau-Ginzburg theory of fractional quantum Hall effect”, *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 25 (1992).
- [48] E. H. Rezayi, N. Read, “Fermi-liquid-like state in half-filled Landau level”, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 900 (1994).
- [49] F. D. M. Haldane, E. H. Rezayi, “Spin-singlet wave function for the half-integral quantum Hall effect”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 956 (1988).
- [50] V. W. Scarola, K. Park, J. K. Jain, “Cooper instability of composite fermions”, *Nature* **406**, 863 (2000).
- [51] Hao Wang, D. N. Sheng, F. D. M. Haldane, “Particle-hole symmetry breaking and the $\nu = \frac{5}{2}$ fractional quantum Hall effect ” *Phys. Rev. B* **80**, 241311 (2009).
- [52] Edward H. Rezayi, Steven H. Simon, “Breaking of Particle-Hole Symmetry by Landau Level Mixing in the $\nu = \frac{5}{2}$ Quantized Hall State”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 116801 (2011); [arXiv:0912.0109](#), 2009.
- [53] L. AntoniĆ, J. Vučićević, M. V. Milovanović, Paired states at 5/2: Particle-hole Pfaffian and particle-hole symmetry breaking, *Phys. Rev. B* **98**, 115107 (2018); <https://arxiv.org/abs/1807.09428>

- [54] M. Dolev, M. Heiblum, V. Umansky, A. Stern and D. Mahalu, “Observation of a Quarter of an Electron Charge at the $\nu = \frac{5}{2}$ Quantum Hall State”, *Nature* **452**, 829 (2008)
- [55] I. P. Radu, J. B. Miller, C. M. Marcus, M. A. Kastner, L. N. Pfeiffer, K. W. West, “Quasi-Particle Properties from Tunneling in the $\nu = \frac{5}{2}$ Fractional Quantum Hall State” *Science*, **320**:899, 2008
- [56] Chetan Nayak, Frank Wilczek, “ $2n$ quasihole states realize 2^{n-1} dimensional spinor braiding statistics in paired quantum Hall states”, *Nucl. Phys. B* **479**, 3, 529 (1996)
- [57] Frank Wilczek, “Majorana returns”, *Nature Physics* **5**, 614 (2009)
- [58] T. T. Wu, C. N. Yang, “Dirac monopoles without strings – Monopole harmonics”, *Nucl. Phys. B* **107**, 365 (1976).
- [59] K. Hasebe, “Hopf Maps, Lowest Landau Level, and Fuzzy Spheres” , *Sigma* **6**, 071 (2010); [arXiv:1009.1192](https://arxiv.org/abs/1009.1192)
- [60] X. G. Wen, A. Zee, “Shift and spin vector: New topological quantum numbers for the Hall fluids”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 953 (1992).
- [61] N. Read and E. H. Rezayi, “Quasiholes and fermionic zero modes of paired fractional quantum Hall states: The mechanism for non-Abelian statistics”, *Phys. Rev. B* **54**, 16864 (1996).
- [62] <http://www.nick-ux.org/diagram/>
- [63] S. A. Parameswaran, S. A. Kivelson, S. L. Sondhi, d B.Z. Spivak, “The Weakly Coupled Pfaffian as a Type I Quantum Hall Liquid”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 236801 (2011).
- [64] Yuhe Zhang, G. J. Sreejith, J. K. Jain, “Creating and manipulating non-Abelian anyons in cold atom systems using auxiliary bosons”, *Phys. Rev. B* **92**, 075116 (2015).
- [65] N. Regnault, C. C. Chang, Th Jolicoeur, J. K. Jain, “Composite fermion theory of rapidly rotating two-dimensional bosons”, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39** S89 (2006); [arXiv:cond-mat/0605343](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0605343).
- [66] B. Chung, Th. Jolicoeur, “Fermions out of dipolar bosons in the lowest Landau level”, *Phys. Rev. A* **77**, 043608 (2008).
- [67] Hidetsugu Seki, Kazusumi Ino, “Incompressible Liquid, Stripes and Bubbles in rapidly rotating Bose atoms at $\nu = 1$ ”, *Phys. Rev. A* **77**, 063602 (2008).