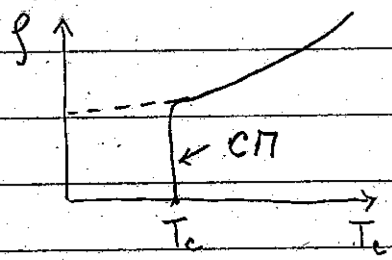
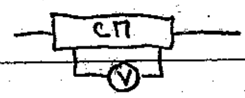
VI Суперпроводност

(A) Особине

(1.) Протицање струје без отпора



$\rho = 0$



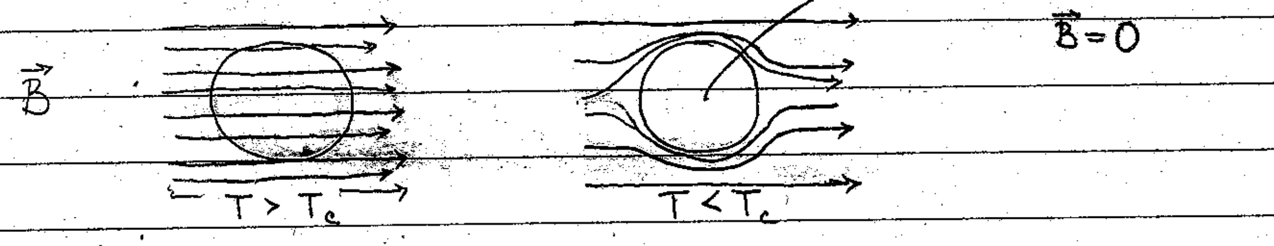
$$V = RI = 0$$

микроскопски: $\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E}$

$$\Rightarrow \sigma = \infty \;,\; \vec{E} = 0$$

↑ карактеризација одзивом фазе - транспортном особином
без тер. равнотеже

(2) Meissner-ов ефекат -



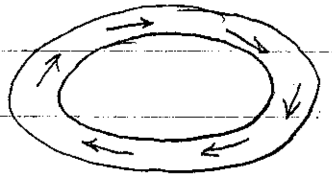
у exp то треба проверити!

- карактеристика термодинамичке равнотеже (не зависи од историје да ли $\vec{B} \neq 0$ или $T < T_c$ пре)
- неки системи $\rho = 0$ ($\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_H \\ \rho_H & 0 \end{bmatrix} \to \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_H} \\ \frac{1}{\rho_H} & 0 \end{bmatrix}$! у кв. Холовом ефекту

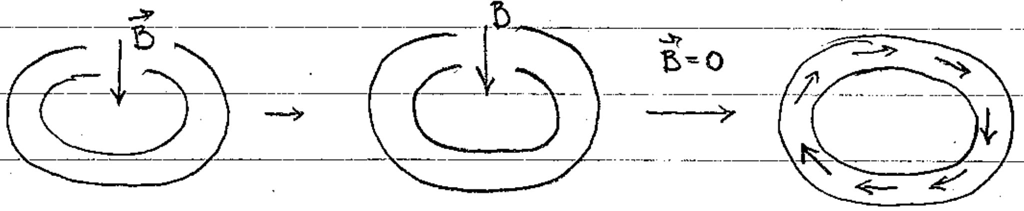
а нису суперпроводници а само

мерење ρ може зависити од контаката

(3.) Непрекидне струје :



у СП: $\vec{E}=0$ $\quad \frac{d\Phi}{dt}=0$, Φ - флукс кроз унутрашњост:



$T > T_c$ $\qquad$ $T < T_c$ $\qquad$ СП ствара свој Φ

(може и у кв. Холовом ефекту)

Зашто Meissner-ов ефекат?

– претпоставимо неку бозе кондензацију и постојање параметра уређења $\Psi(\vec{r})$ тј. макроскопске таласне функције

$$\Rightarrow \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2m^* i}\left(\Psi^*\left(\vec{\nabla} - i\frac{e^*}{c\hbar}\vec{A}\right)\Psi - \left(\left(\vec{\nabla} - i\frac{e^*}{c\hbar}\vec{A}\right)\Psi\right)^*\Psi\right)$$

Суперфлуид је наелектрисан

и опис је инваријантан на gauge трансформације

$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \Rightarrow$ можемо наћи унитарну трансформацију на Ψ: $\Psi \to e^{i\frac{e^*}{c\hbar}\chi}\Psi$ који нас враћа у почетни опис.

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_s = \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}\Theta - \frac{e^*}{m^* c}\vec{A} \qquad \left(\vec{j} = |\Psi|^2\vec{v}_s\right)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}_s = -\frac{e^*}{m^* c}\vec{B}$$ – "vorticity"

⇒ Убацивање хомогеног магнетног поља би изазвало ригидну ротацију целог система (само систем повезан СП корелацијама) која је термодинамички неисплатива!

(5) Гинзбург - Ландау опис

- историјски настао пре микроскопске BCS теорије

(може и обрнуто: фракциони кв. Холов ефекат: прво Лафлинова таласна функција историјски па ефективне тополошке теорије поља)

(а) претпоставка: <u>близине фазног прелаза</u> $\Rightarrow$

(1) уопштавање Ландау описа фазних прелаза помоћу параметра уређења на СП

$$F[\Psi^*,\Psi] \approx |\Psi|^2 \ldots |\Psi|^4 \ldots$$

развој функције слободне енергије

(2) флуктуације су важне $\Psi \longrightarrow \Psi(\vec{x})$!

јер близу смо фазног прелаза и њихова мера $\xi \to \infty$

(3) ефективно описујемо - најважнија физика у дуготаласном опису: $|\vec{\nabla}\Psi| \ll \frac{1}{a}$ (микроскопска дужина: a ~ средње растојање)

па је развој могућ до $\sim|\vec{\nabla}\Psi|^2$

$$\Longrightarrow \quad F_s = F_n + \int f\, d^3\vec{r}$$

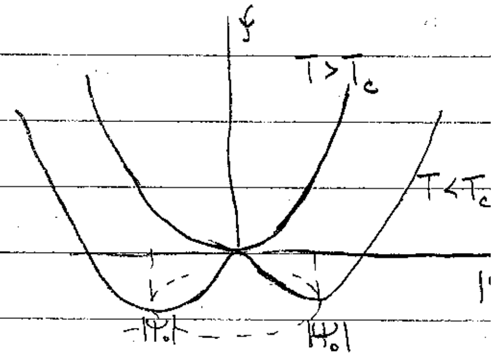
$$f = a|\Psi|^2 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right)\Psi\right|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{8\pi}|\vec{B}|^2$$

$\vec{A} = 0$, Ψ хомогено $\Longrightarrow$ минимизацијом f

$$|\Psi| = \sqrt{\frac{-a}{b}}, \quad a = \bar{a}(T - T_c)$$

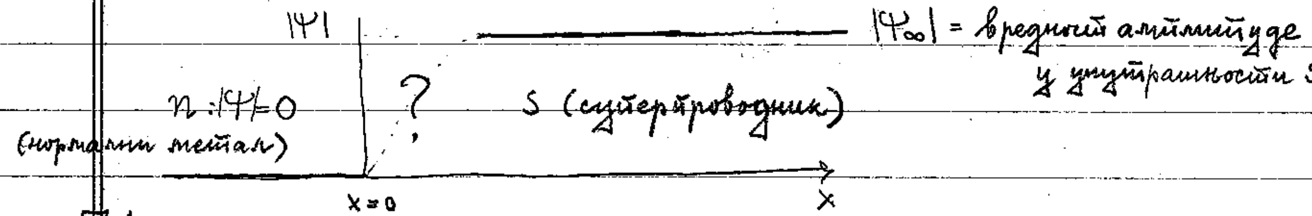
$T > T_c$: $|\Psi| = 0$

$T < T_c$ $\quad |\Psi_0| = \sqrt{\frac{\bar{a}}{b}}\sqrt{T_c - T}$



(б) дужина кохеренције

пример нехомогености, $\vec{A} = 0$



ГЛ:

$$\frac{\delta F[\Psi,\Psi^*]}{\delta \Psi^*} = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi = 0$$

у унутрашности ($x \to \infty$) $\quad |\Psi_\infty| = \sqrt{\frac{|a|}{b}}$

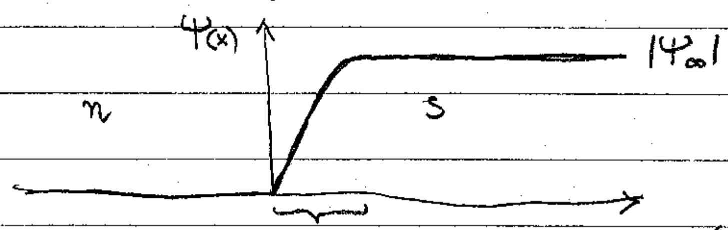
$$f(x) = \frac{\Psi(x)}{|\Psi_\infty|} \Longrightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*|a|}\frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0 \quad , \quad \xi^2(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*\bar{a}(T_c - T)}}$$

први интеграл: $\quad \xi^2\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - f^2)^2 \quad$ где $\frac{df}{dx} \to 0$ како $f \to 1$, $x \to \infty$ ✓

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{\xi}\frac{(1 - f^2)}{\sqrt{2}} \longrightarrow \Psi(x) = |\Psi_\infty| \operatorname{tgh}\frac{x}{\sqrt{2}\,\xi}$$

$\Rightarrow$



ξ = „дужина кохеренције"

= дужина мерена од површине дуж које се Ψ враћа у вредност у унутрашности

→ мора бити исто што и корелациона дужина (везана и за флуктуације близу фазног прелаза) јер је једина карактеристична дужина

→ за ξ мало рубни делови не утичу на унутрашност — флуктуације на рубу и унутрашњости не корелисане

(- да ξ има смисао корелационе дужине:

развијамо $\Psi = \Psi_0 + \eta \leftarrow$ мала флуктуација и тражимо

$\langle \eta(0)\, \eta(\vec{r}) \rangle$ —

~~очекивану вредност користећи технику~~ $\sim e^{-\beta F_G[\eta, \eta^*]}$ ← квадратни развој F по

(Гаусијански опис) и вредности $\eta_{\vec{q}} = \int d\vec{r}\, \eta(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}}$ интегралимо од $-\infty$ до $+\infty$.

$$\langle \eta(0)\, \eta(\vec{r}) \rangle \sim \int d\vec{q}\, \langle \eta_{-q}\, \eta_q \rangle e^{i\vec{q}\vec{r}} \quad \text{и}$$

$$\langle \eta_{-q}\, \eta_q \rangle \sim \frac{1}{q^2 + \xi^{-2}} \Rightarrow \langle \eta(0)\, \eta(\vec{r}) \rangle \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r} \Bigg)$$

(в) дужина уласка магнетног поља у СП

$$\vec{j} \equiv \vec{j}_{el} = \frac{q^*}{2m^*}\left[\Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q^*}{c}\vec{A}\right)\Psi - \left(\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q^*}{c}\vec{A}\right)\Psi\right)^*\Psi\right]$$

$$= |\Psi|^2 \cdot \frac{q^*\hbar}{m^*}\vec{\nabla}\Theta - \frac{(q^*)^2}{m^* c}|\Psi|^2\vec{A}$$

$$q^* = -2e \qquad m^* = 2m \qquad n_s = 2|\Psi|^2$$

$$\vec{j} = \left(-\frac{e\hbar}{m}\vec{\nabla}\Theta - \frac{e^2 2}{mc}\vec{A}\right)|\Psi|^2$$

ако $|\Psi|^2 \approx \text{const}$

$$(1) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc}\vec{B}$$

$$(2) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=0}\right)$$

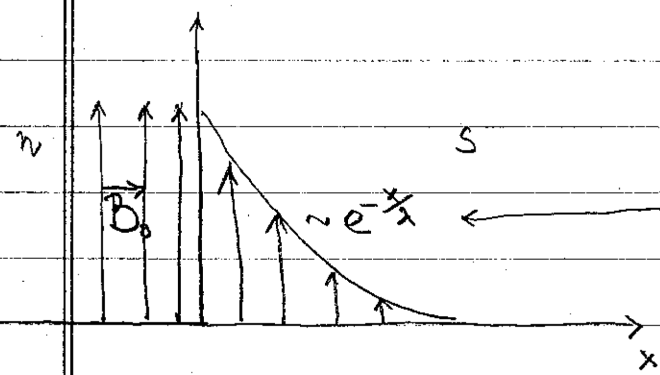
~~(стационарно стање)~~

$$(1) + (2) \Longrightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})} = -\frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} \vec{B}$$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{B} + \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{B})}_{=0} = -\frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

$$\frac{1}{\lambda} \sim \sqrt{n_s} \sim \sqrt{T_c - T}$$

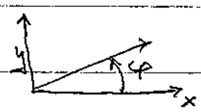


λ – Лондонова дужина уласка B

(I) Вортексне ексцитације

описујемо као у неутралном суперфлуиду кад $r \to \infty$: $\Psi \sim e^{in\varphi}$

и претпостављамо симетрију дуж z осе



Како да спречимо доприносе на великим растојањима који су водили до дивергенције енергије у случају неутралног суперфлуида?

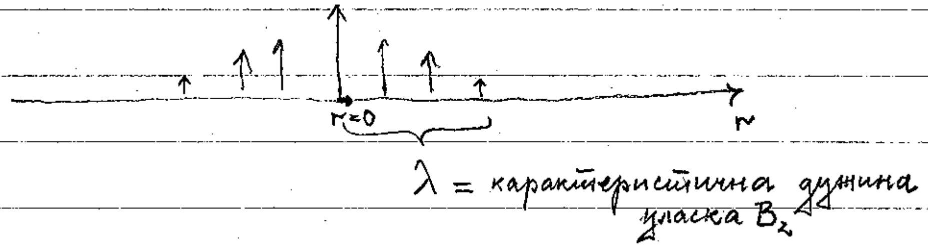
$$\left| \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q^*}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 \sim 0 \quad |\vec{r}| \to \infty : \quad \frac{q^*}{c\hbar} \vec{A} = \frac{n}{r} \hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \oint \vec{A} d\vec{l} = \frac{hc}{q^*} n \Rightarrow \frac{hc}{2e} = \text{квант флукса}$$

довољно далеко од центра вортекса

$\vec{B} = 0 \quad \vec{r} \to \infty$

али постоји ненулти флукс (квантизован) $\Rightarrow$

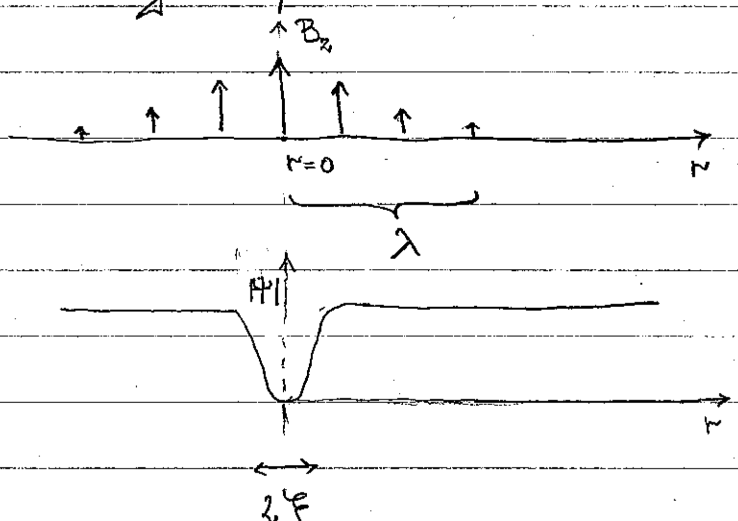


$$\Delta B_z = \frac{B_z}{\lambda^2}$$

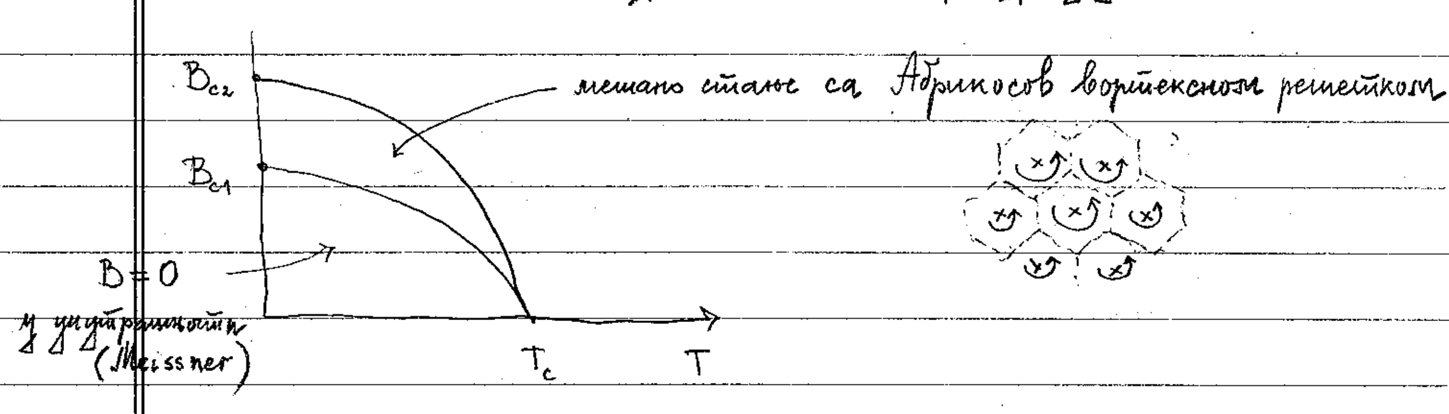
- посматрајмо $r \ll \lambda \longrightarrow \Delta B_z = \frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dB_z}{dr} \approx 0$

$\Rightarrow B_z \sim \ln r \to$ опет проблем за $r \to 0 \to |\Psi|^2 = 0$ за $r = 0$

- ако постоји вортекс:



Показује се да за $\sqrt{2}\lambda > \xi$ тј. СП II врсте вортекс је стабилна конфигурација.



Сваки СП може подржавати само одређену коначну - критичну струју.

$$f \sim -\frac{1}{\xi^2}|\Psi|^2 + |\vec{\nabla}\Psi|^2$$

димензиона анализа:

J_c : $\left|\frac{\Delta\Theta}{\Delta L}\right| \sim \frac{1}{\xi}$ тј што ξ веће J_c мање

Како објаснити са микроскопског становишта?

Имајући у виду ефективне параметре

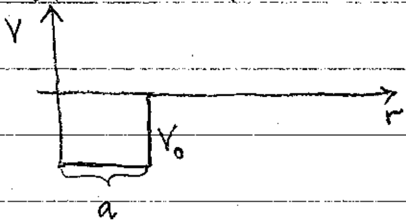
$q^* = -2e$, $m^* = 2m$, $n_s = 2|\Psi|^2$ у сагласју са exp.

$\Longrightarrow$

(B) Куперов пар

— претпоставимо слабу привлачну интеракцију између два електрона

→ у 3dim праг за везана стања:



тражено eigen-стање

$$\tilde{\Psi} = \Psi r$$

$$\Rightarrow \; -\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dr^2} + V(r)\tilde{\Psi}(r) = E\tilde{\Psi}(r)$$

везана стања $\Rightarrow \tilde{\Psi} \sim \cos kr, \sin kr$ али за $\Psi(r) = \frac{\tilde{\Psi}(r)}{r}$ само $\sin kr$!

→ нискоенергетска $\sim \cos kr$ нису eigen-стања

и постоји праг (довољно дубока јама $\sim V_0$ и широка $\sim a$)

Разматрајмо следећи физички аргумент, аргумент за постојање Куперовог пара и нестабилност Ферми система у присуству и најмање привлачне интеракције али када се узме у обзир присуство осталих фермиона на начин редукована фазног простора пара.

Присуство других електрона је укључено преко забране да импулси пара, $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, буду мањи од k_F $\Rightarrow$ вани: $|\vec{k}_1| \geq k_F$ и $|\vec{k}_2| \geq k_F$ (Паули блокирање)

$\hbar = 1$ два електрона: $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ $\quad \vec{k}_1, \vec{k}_2$

релативно кретање: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\quad \vec{k} = \dfrac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2}$

кретање центра масе: $\vec{R} = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ $\quad \vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$

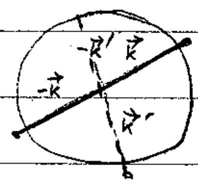
$$e^{i\vec{k}_1\vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2\vec{r}_2} = e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{i\vec{K}\vec{R}}$$

$\vec{K}$ је константа кретања за проблем са $V(\vec{r})$ интеракцијом $\Rightarrow$

$$\psi_{\vec{K}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{e^{i\vec{K}\vec{R}}}{\sqrt{V}} \cdot \varphi(\vec{r}) \quad \text{где} \quad \varphi(\vec{r}) = \sum_{|\vec{k}| \geq k_F} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}} \alpha_{\vec{k}}$$

$$V(\vec{r}): \quad V_{\vec{k},\vec{k}'} = \frac{1}{V}\int d^3\vec{r}\; e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} \cdot V(\vec{r}) =$$

$$= \langle \vec{k}, -\vec{k} \,|\, V \,|\, \vec{k}', -\vec{k}' \rangle$$



$$\left(\frac{\vec{k}_1^2 + \vec{k}_2^2}{2m} = \frac{4\vec{k}^2 + \vec{K}^2}{4m} \right)$$

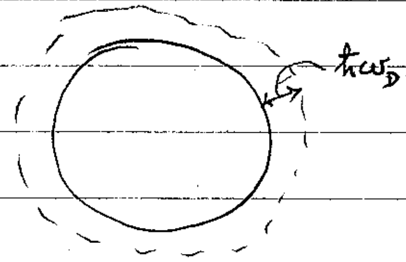
$$\left[-\frac{\vec{\nabla}}{m} + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad 2\epsilon_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \sum_{k'} V_{k,k'} \alpha_{k'} = E\alpha_{\vec{k}}$$

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\vec{k}^2}{2m}$$

Разматрајмо: $V_{k,k'} = -V_0$ тј. модел ел.-фонон интеракције са cut-off-ом на енергији $\hbar\omega_D$

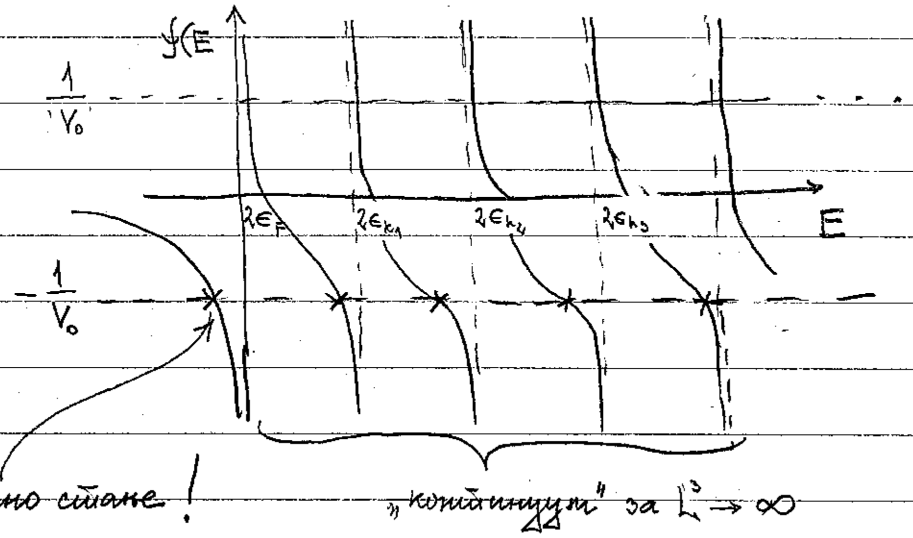
$\underline{\underline{V_0 > 0}}$



$$\left(2\epsilon_k - E\right)\alpha_k = V_0 \sum_{k'}{}' \alpha_{k'}$$

$$\sum_k{}' \alpha_k = \sum_k{}' \frac{V_0}{2\epsilon_k - E} \cdot \sum_{k'}{}' \alpha_{k'}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{V_0} = \sum_k \frac{1}{E - 2\epsilon_k} = f(E)$$



$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{V_0} = -\int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_D} d\epsilon\, \rho(\epsilon) \frac{1}{2\epsilon - E} \approx -\frac{\rho(\epsilon_F)}{2} \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \hbar\omega_D} \frac{1}{\epsilon - \frac{E}{2}} \quad \ldots$$

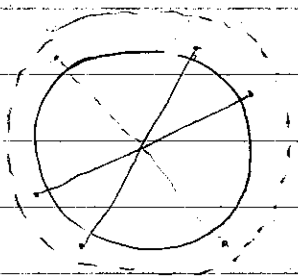
$$\Rightarrow \quad E = 2\epsilon_F - \frac{2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{\rho(\epsilon_F) V_0}}}{\left(1 - e^{-\frac{2}{\rho(\epsilon_F) V_0}}\right)}$$

— не постоји праг: $V_0 \to 0$

$$E = 2\epsilon_F - 2\hbar\omega_D\, e^{-\frac{2}{\rho(\epsilon_F)V_0}}$$

($\hbar\omega_D \sim 100K$ али експоненцијалан фактор)

— $\varphi(r) = \sum_k{}' \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}}\alpha_k$, $\alpha_k \neq 0$ за $|k| \geq k_F$



— два електрона се ексцитују изнад Ферми површине, привлачно интерагују, снижавају своју енергију и образују Куперов пар

везивна енергија: $W = 2\hbar\omega_D\, e^{-\frac{2}{\rho(\epsilon_F)V_0}}$

Шта ако $\vec{K} \neq 0$? Ненулти импулс центра масе?

$$2\epsilon_{\vec{k}} \longrightarrow \epsilon_{\vec{k}+\frac{\vec{K}}{2}} + \epsilon_{\vec{k}-\frac{\vec{K}}{2}} \Rightarrow \Delta\epsilon \sim o(K^2)$$

Да ли је то једина промена? Није! Морамо узети у обзир Pauli блокиране $\Rightarrow$ $|\vec{k} \pm \frac{\vec{K}}{2}| \geq k_F \Rightarrow k \geq k_F + \frac{K}{2}$

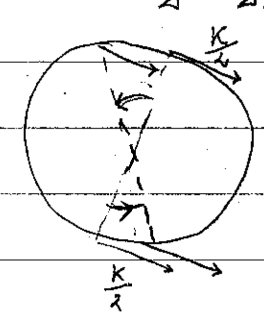
Промена доње границе у интеграцији по ϵ $\Rightarrow$

$$W = 2\hbar\omega_D\, e^{-\frac{2}{\rho(\epsilon_F)V_0}} - v_F K$$

За довољно велико K у континууму – пар може да се дисоцира

Зашто такав утицај?

Забрањени канали расејања:



Због смањена броја могућих ниско-лежећих стања Куперов пар не може да ефикасно снизи своју енергију.

$$W = 2\Delta - v_F K$$

Можемо дефинисати критично K тј. дужину када $W = 0$

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{2\Delta}$$

Ако проценимо $2\Delta \sim k_B T_c \longrightarrow \xi_0 \sim 10^{-3}\,mm$

тј. $\frac{\xi_0}{a} \sim 10^3$.

Као природна карактеристична дужина $\left(\frac{p_F p}{2m} \sim \Delta \right)$ она је и оцена радијуса Куперовог пара.

Радијус Куперовог пара је веома велики у односу на средње растојање међу електронима, $\frac{R_c}{a} \sim 10^3$, јер ефективна ел.-фононска интеракција је веома слаба што је последица велике разлике у масама електрона и јона (чије осцилације производе фононе).

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{k \geq k_F} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}} \alpha_k \quad , \quad \alpha_k = \frac{\sum'_{k'} \alpha_{k'}}{2\epsilon_k - E}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\vec{k}} = \alpha_{-\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \varphi(-\vec{r})$$

$\Rightarrow$ Куперов пар мора бити спин-синглет:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \right)$$

(Г) BCS теорија - микроскопски опис

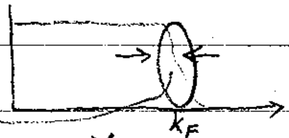
(а) Увод:

BCS опис најчешће подразумева системе електрона

(1) који интерагују слабом ел.-фонон интеракцијом

(2) и на које је могуће применити апроксимацију усредненог поља ($\hat{O} \to O$: занемаривање флуктуација).

(3) Разлика у односу на сличне Бозе системе:



је да веома мали бр. електрона (стања) је у кондензату и формира Куперове парове. Стања испод околине Ферми нивоа су инертна (ван кондензата) али чине суперструју на $T=0$.

Дакле „нуловање“ је слабо $\rho(\epsilon_F)V_0 \leq 0.3$, последица тога је да $\frac{\xi_0}{a} \sim 10^3$ и оцена важности флуктуација (Гинзбургов критеријум) у ГЛ опису даје нам за право да користимо апроксимацију усредненог поља јер $\frac{\xi_0}{a} \sim 10^3$!

Очекиван максимум критичне температуре за системе у коме је присутна ел.-фонон интеракција је $T_c \sim 30K$ (ако систем није изложен јаком притиску).

Високо-температурни суперпроводници са $T_c \lesssim 130K$ имају $\frac{\xi_0}{a} \sim 1$ и важне су ел-ел интеракције.

(б) BCS микроскопски опис

– радимо у великом канонском ансамблу због очекиване Бозе кондензације

$$\hat{\Omega} = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu)\, c^{+}_{k\sigma} c_{k\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{\substack{k_1,k_2\\ q}} V(\vec{q})\, c^{+}_{k_1+q,\sigma_1} c^{+}_{k_2-q,\sigma_2} c_{k_2,\sigma_2} c_{k_1,\sigma_1}$$

(1) ефективна физика је физика Куперових парова

(редукујемо $\hat{\Omega}$ на Куперов канал)

(2) ел.-фононска интеракција је ефективно константа: $V(\vec{q}) \approx -g$ $\rightarrow$ константа $g>0$

али уз cut-off $\hbar\omega_D$!

$$\hat{\Omega}_{eff} = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu)\, c^{+}_{k\sigma} c_{k\sigma} - \frac{g}{V} \sum_{k,k'} c^{+}_{k'\uparrow} c^{+}_{-k'\downarrow} c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}$$

У обичној бозе кондензацији $|\Psi_0\rangle$ је суперпозиција различитих бројева $\vec{k}=0$ честица

$$\langle \hat{a}_0 \rangle \neq 0 \quad \rightarrow \quad \langle \psi(\vec{x}) \rangle \neq 0$$

Овде $|\Psi_0\rangle$ очекујемо као суперпозицију различитог броја Куперових парова

$$\langle \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow} \rangle \neq 0 \longrightarrow \langle \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) \rangle \neq 0$$

Претпостављамо слабе флуктуације и примењујемо Боголјубовљев прилаз $(\hat{O} \rightarrow 0)$ тј. прилаз усредњеног поља:

$$\hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow} = \langle \hat{c}_{-k\downarrow} \hat{c}_{k\uparrow} \rangle + \hat{\delta}_k$$

$$c^{+}_{k'\uparrow} c^{+}_{-k'\downarrow} c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} = -\langle c^{+}_{k'\uparrow} c^{+}_{-k'\downarrow} \rangle \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle + c^{+}_{k'\uparrow} c^{+}_{-k'\downarrow} \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle + \langle c^{+}_{k'\uparrow} c^{+}_{-k'\downarrow} \rangle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \underbrace{\cancel{\hat{\delta}^{+}_{k'} \hat{\delta}_k}}_{=0}$$

$=0$ је апроксимација усредњеног поља.

$$\Rightarrow \hat{\Omega}_{BCS} = \sum_{k,\sigma} \xi_k c^+_{k\sigma} c_{k\sigma} + \sum_k \Delta c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow} + \Delta^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}$$

где $\Delta = -\frac{g}{V}\sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \rangle$ (функција спаривања)

Апроксимацијом усредњеног поља смо редуковали проблем на разматрање појединачних Куперових парова (фиксирано k)

Узећемо $\Delta = \Delta^*$ јер сваку фазу у Δ можемо да уклонимо глобалном трансформацијом $c \to e^{i\alpha} c$.

Решавамо $\hat{\Omega}_{BCS}$ на начин каноничке трансформације

$$b_{k\uparrow} = u_k c_{k\uparrow} - v_k c^+_{-k\downarrow}$$
$$b^+_{-k\downarrow} = u_k c^+_{-k\downarrow} + v_k c_{k\uparrow}$$

где $u_k = u_k^*$, $v_k = v_k^*$, $u_k^2 + v_k^2 = 1$

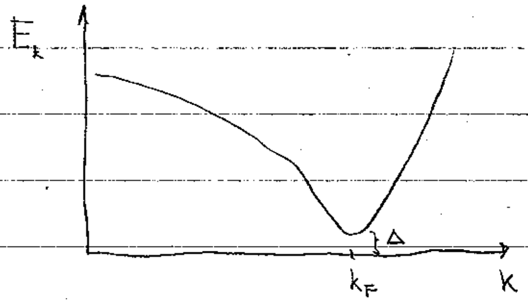
Тражимо $\hat{\Omega}_{BCS} = \text{const} + \sum_{k,\sigma} E_k b^+_{k\sigma} b_{k\sigma}$

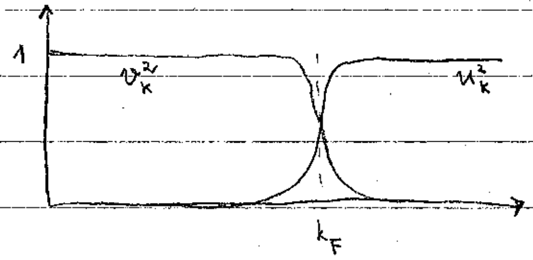
$$[b_{k\uparrow}, \hat{\Omega}_{BCS}] = E_k (u_k c_{k\uparrow} - v_k c^+_{-k\downarrow})$$
$$= \xi_k u_k c_{k\uparrow} + \xi_k v_k c^+_{-k\downarrow} + \Delta u_k c^+_{-k\downarrow} - \Delta v_k c_{k\uparrow}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} E_k u_k &= \xi_k u_k - \Delta_k v_k \\ E_k v_k &= -\xi_k v_k - \Delta_k u_k \end{aligned} \quad \Rightarrow E_k^2 = \xi_k^2 + \Delta^2$$

$$\Rightarrow v_k u_k = -\frac{\Delta}{2E_k}, \quad u_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right), \quad v_k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right)$$

$$\Longrightarrow$$





$\Delta \equiv \Delta_0$

$2\Delta_0 \sim k_B T_c$ у BCS (доле)

$$\Rightarrow \frac{\Delta_0}{\epsilon_F} \sim \frac{10\,\mathrm{K}}{10\,000\,\mathrm{K}} \sim \frac{1\,\mathrm{meV}}{1\,\mathrm{eV}} \sim 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\Delta_0}{\hbar v_F k_F} \sim \frac{a}{\xi_0} \sim 10^{-3}$$

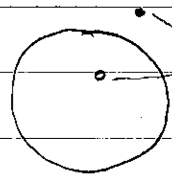
$$\Rightarrow \boxed{\delta k \sim 10^{-3} k_F}$$

Ексцитације $b_{k\sigma}$ су фермиони – „Боголубони".

– Комбинације су честице (u_k) и шупљине (v_k) и добијају карактер: шупљине $k \ll k_F$ и честице за $k \gg k_F$.

– Неутралне су честице на k_F (не носе наелектрисање).

– Уопште, честица-шупљина ексцитација је ексцитација идеалног Ферми гаса неутралне природе (не размењују се електрони са околином).



$c^{+}_{k_1>k_F,\sigma} c_{k<k_F,\sigma}|FS\rangle$: одржава се, не мења вредност спина

– Овде тоже одговара $b^{+}_{k_1\downarrow} b^{+}_{k_2\uparrow}|\Psi_{BCS}\rangle$ али $\xi_{k_1} = -\xi_{k_2}$ (ако неутралне

тако да је најнижа енергија ексцитације: $2\Delta_0$.

То је енергија потребна да се раздвоји (дисоцира) један Куперов пар

(b) $\Delta = ?$

$$c_{k\uparrow} = u_k b_{k\uparrow} + v_k b^+_{-k\downarrow}$$
$$c^+_{-k\downarrow} = u_k b^+_{-k\downarrow} - v_k b_{k\uparrow}$$

$$\Delta = -\frac{g}{V}\sum_k \langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}\rangle$$

$$= -\frac{g}{V}\sum_k \langle (u_k b_{-k\downarrow} - v_k b^+_{k\uparrow})(u_k b_{k\uparrow} + v_k b^+_{-k\downarrow})\rangle$$

$$= -\frac{g}{V}\sum_k u_k v_k \overbrace{\left(\langle b_{-k\downarrow} b^+_{-k\downarrow}\rangle - \langle b^+_{k\uparrow} b_{k\uparrow}\rangle\right)}^{\neq 0 \text{ на коначној } T}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{g}{V}\sum_k \frac{\Delta}{2E_k}\left(1 - 2\overbrace{f(E_k)}^{\text{Ферми-Дирак расподела}}\right)$$

→ За ел фонон интеракцију постоји природни cut-off: $\hbar\omega_D$

$$\Delta = \frac{g}{V}\int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\epsilon\, \rho(\epsilon)\, \frac{\Delta}{2E_k}\left(1 - 2f(E_k)\right)$$

$$\epsilon_F \gg \hbar\omega_D \Rightarrow \rho(\epsilon) \approx \rho(\epsilon_F)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = g\rho(\epsilon_F)\int_0^{\hbar\omega_D} d\epsilon\, \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}}\, \mathrm{tgh}\,\frac{\sqrt{\epsilon^2+\Delta^2}}{2k_BT}$$

(1) $T = 0$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sinh\frac{1}{g\rho(\epsilon_F)} = \frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \Rightarrow \Delta \approx 2\hbar\omega_D\, e^{-\frac{1}{\rho(\epsilon_F)V_0}}$$

– нема двојке у односу на Куперов проблем

– $\frac{2}{2\rho(\epsilon_F)}$ јер учествују у спаривању и честице испод!

(2) $\Delta = 0 \Rightarrow T_c : k_BT_c \approx 1.13\,\hbar\omega_D\, e^{-\frac{1}{\rho(\epsilon_F)V_0}}$

(решавањем горње једначине)

$$\Rightarrow \frac{2\Delta}{k_BT_c} \sim 3.5 \quad \text{у складу са exp.}$$

I) $|\Psi_0\rangle$ = BCS основно стање :

$$b_{k\uparrow}|\Psi_0\rangle = 0 \; !$$

$$(u_k c_{k\uparrow} - v_k c^+_{-k\downarrow})(u_k + v_k c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow})|0\rangle =$$

$$= (u_k v_k c^+_{-k\downarrow} - v_k u_k c^+_{-k\downarrow})|0\rangle = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_k (u_k + v_k c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow})|0\rangle$$

$$= \prod_k u_k \cdot \prod_k \left(1 + \frac{v_k}{u_k} c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow}\right)|0\rangle$$

$$= \prod_k u_k \; e^{\sum_k \frac{v_k}{u_k} c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow}} |0\rangle$$

$$\sum \frac{v_k}{u_k} c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow} = \frac{1}{V} \int d\vec{x}_1 \int d\vec{x}_2 \underbrace{\left(\sum_k e^{-i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \frac{v_k}{u_k}\right)}_{g(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \Psi^+_{\uparrow}(\vec{x}_1) \Psi^+_{\downarrow}(\vec{x}_2)$$

$\|$ таласна функција пара

за N фиксирано:

$$\Psi_{BCS} \approx \mathcal{A}\left\{ g(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\chi_{12} \cdot g(\vec{x}_3 - \vec{x}_4)\chi_{3,4} \cdot \ldots \cdot g(\vec{x}_{N-1} - \vec{x}_N)\chi_{N-1,N} \right\}$$

антисиметризација колекције парова

– $g(\vec{r})$ не описује Куперов пар ! јер удео К. парова је мали.

– $\langle \Psi_\downarrow(0) \Psi_\uparrow(\vec{x}) \rangle \sim \sum_k u_k v_k e^{i\vec{k}\vec{r}}$ описује Куперов пар

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Annett, Superconductivity, Superfluids, and Condensates
2. J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity
3. M. Stone, The physics of Quantum Fields

Задаци

VI. 1. (15) Претпоставити Гинзбург-Ландау опис у металу у додиру са суперпроводником. Описати параметар уређења индукован у металу, са вредношћу $\Psi(x=0)$ на површини додира. (Линеаризовати Г.Л. опис у металу.)

VI. 2. (16) Описати утицај ненултог импулса центра масе Куперовог пара у Куперовом проблему. Како импулс мења енергију везивања

VI 3. (17) Наћи $\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\downarrow}(0)\, \hat{\psi}_{\uparrow}(\vec{x}) | \Psi_0 \rangle$ где $|\Psi_0\rangle$ је BCS стање.