8.II 2019.

# Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Operator gustine broja čestica u tački $\mathbf{r}$ čija je projekcija spina $\sigma$, u oznaci $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r})$, definisan je kao

$$\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i)\delta_{\sigma\sigma_i},$$

gde se sumiranje vrši po svim česticama ($i$) sistema, $\hat{\mathbf{r}}_i$ je operator koordinate $i-$te čestice, a $\sigma_i$ je projekcija spina $i-$te čestice. Posmatrajmo sistem identičnih fermiona spina $\frac{1}{2}$.

   (a) Polazeći od gornje definicije, izraziti operator $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r})$ pomoću operatora polja $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r})$.

   (b) Izraziti Fourierovu transformaciju $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{q})$ operatora $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r})$ pomoću operatora $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$.

   (c) Izračunati komutator $[\hat{\rho}_{\sigma_1}(\mathbf{q}_1), \hat{a}_{\mathbf{q}_2\sigma_2}]$.

2. Parna korelaciona funkcija $g_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ definisana je kao

$$g_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\langle \hat{\rho}_{\sigma_1}(\mathbf{r}_1)\hat{\rho}_{\sigma_2}(\mathbf{r}_2)\rangle}{\langle \hat{\rho}_{\sigma_1}(\mathbf{r}_1)\rangle\langle \hat{\rho}_{\sigma_2}(\mathbf{r}_2)\rangle},$$

gde je operator $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r})$ definisan u zadatku 1, dok se usrednjavanje vrši po ravnotežnom kvantnom ansamblu.

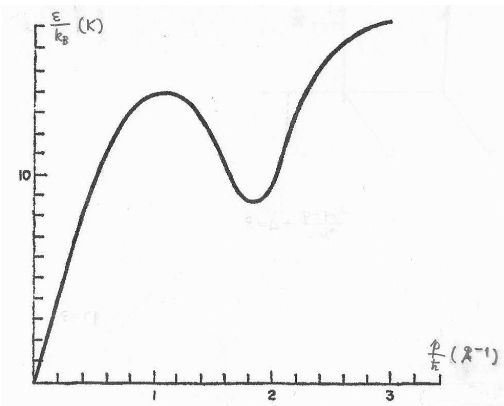
   (a) Izračunati parnu korelacionu funkciju $g_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ za trodimenzionalni idealni Fermi gas na $T = 0$. Koncentraciju elektrona $n$ smatrati poznatom.

   (b) Komentarisati dobijeni rezultat u slučajevima ($k_F$ je Fermijev talasni vektor):

      (i) $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$;

      (ii) $\sigma_1 = \sigma_2$, $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$, uz ispitivanje asimptotskog ponašanja u slučajevima malih ($k_F|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll 1$) i velikih ($k_F|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg 1$) rastojanja $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

3. Ponašanje $^4$He na niskim temperaturama može se opisati modelom (Landau, 1941, 1947) po kome se $^4$He sastoji od superfluida i kvazičestičnih ekscitacija čija je disperziona relacija (zavisnost kvazičestične energije $\varepsilon$ od impulsa $p = |\mathbf{p}|$) prikazana na slici.




Podaci dobijeni u eksperimentima rasejanja neutrona daju da se za male $p$ kriva $\varepsilon(p)$ može aproksimirati linearnim zakonom $\varepsilon(p) = up$, pri čemu je $u = 2.4 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$. Ove kvazičestične ekscitacije odgovaraju običnim hidrodinamičkim zvučnim talasima, odnosno fononima, a $u$ je brzina zvuka. Izračunati srednji broj fonona $N_{\mathrm{ph}}$, kao i fononski doprinos toplotnom kapacitetu $C_{V,\mathrm{ph}}$ na temperaturi $T$.


Zadatke pripremio
dr Veljko Janković