24.I 2018.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Posmatrajmo jedan elektron u stacionarnom magnetnom polju $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Razmotriti samo interakciju spinskog stepena slobode sa magnetnim poljem. U trenutku $t = 0$ stanje elektrona je opisano statističkim operatorom
$$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Da li je elektron u $t = 0$ u čistom ili u mešanom stanju? Ako je u čistom stanju, naći odgovarajući vektor stanja $|\psi(0)\rangle$.
   (b) Odrediti statistički operator $\hat{\rho}(t)$ koji opisuje stanje elektrona u trenutku t.
   (c) Izračunati očekivanu vrednost operatora magnetnog momenta elektrona $\hat{\boldsymbol{\mu}}_s$ asociranog sa spinskim stepenom slobode u trenutku t.

2. Parna korelaciona funkcija $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ $(\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2)$ definisana je kao
$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\langle \hat{\rho}(\mathbf{r}_1)\hat{\rho}(\mathbf{r}_2)\rangle}{\langle \hat{\rho}(\mathbf{r}_1)\rangle\langle \hat{\rho}(\mathbf{r}_2)\rangle},$$
   gde je $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ operator gustine broja čestica u tački $\mathbf{r}$.
   (a) Izračunati parnu korelacionu funkciju $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ za trodimenzionalni idealni Fermi gas na $T = 0$.
   (b) Ispitati asimptotsko ponašanje $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ u graničnim slučajevima velikih $(k_F|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg 1)$ i malih $(k_F|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll 1)$ rastojanja, gde je k_F Fermijev talasni vektor.

3. Pokazati da dva elektrona koji međusobno interaguju privlačnom interakcijom u prisustvu potpuno popunjenog Fermijevog mora na nuli temperature formiraju vezano stanje (tzv. Cooperov par) i naći energiju veze E_b. Zanemariti interakciju posmatranog para elektrona sa elektronima iz Fermijevog mora. Pretpostaviti da se orbitalni deo talasne funkcije osnovnog stanja para može razviti po bazisu ravnih talasa kao
$$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ |\mathbf{k}|>k_F}} g_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}.$$
   Takođe pretpostaviti da su matrični elementi potencijala međusobne interakcije posmatranog para elektrona (Ω je zapremina na koju se vrši normiranje)
$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})$$
   oblika
$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \epsilon_F \leq \epsilon_{\mathbf{k}}, \epsilon_{\mathbf{k}'} \leq \epsilon_F + \hbar\omega_c \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$
   gde je $V > 0$, ϵ_F je Fermijeva energija, $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/(2m)$, dok je $\hbar\omega_c \ll \epsilon_F$. Specijalno, naći E_b u limesu $N(\epsilon_F)V \ll 1$, gde je $N(\epsilon_F)$ jednočestična gustina stanja na Fermijevoj površi za jednu vrednost spina. Prokomentarisati dobijeni rezultat za energiju veze E_b.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

2.II 2018.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Operator gustine broja čestica u tački $\mathbf{r}$, $\hat{\rho}(\mathbf{r})$, definisan je kao $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i)$, gde se sumiranje vrši po svim česticama sistema, dok su $\hat{\mathbf{r}}_i$ operatori koordinate pojedinačnih čestica. Posmatrajmo sistem identičnih fermiona spina $\frac{1}{2}$.

   (a) Polazeći od gornje definicije, izraziti operator $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ pomoću operatora polja $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})$.

   (b) Izraziti Fourierovu transformaciju $\hat{\rho}(\mathbf{q})$ operatora $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ pomoću operatora $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}$.

   (c) Izračunati komutator $[\hat{\rho}(\mathbf{q}), \hat{\rho}(\mathbf{q}')]$.

2. Posmatrajmo idealni gas koji se sastoji od N bozona sa jednočestičnom gustinom stanja

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} \alpha\, \varepsilon^{\eta-1}, & \varepsilon \geq 0 \\ 0, & \varepsilon < 0, \end{cases}$$

   gde je $\eta > 1$, dok je α pozitivna konstanta odgovarajućih dimenzija. Naći:

   (a) temperaturu Bose–Einstein kondenzacije T_0,

   (b) energiju i toplotni kapacitet gasa na temperaturama $T < T_0$.

3. Hamiltonijan slabo neidealnog Bose gasa koji se sastoji od N bozona spina 0 u zapremini V je oblika

$$\hat{H} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N^2}{V}\left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\right) + \sum_{\mathbf{p}\neq 0}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\left(\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} + 2\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\right),$$

   gde je m masa pojedinačne čestice gasa, a je dužina rasejanja (koja zavisi od potencijala parne interakcije među česticama), dok operatori $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ ($\hat{a}_{\mathbf{p}}$) kreiraju (anihiliraju) jednu česticu impulsa $\mathbf{p}$. Prelazeći na operatore $\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}$ ($\mathbf{p} \neq 0$) relacijama

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \mathrm{ch}(\theta_p)\,\hat{b}_{\mathbf{p}} + \mathrm{sh}(\theta_p)\,\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{p}}, \qquad \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{p}} = \mathrm{sh}(\theta_p)\,\hat{b}_{\mathbf{p}} + \mathrm{ch}(\theta_p)\,\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{p}},$$

   (a) naći uslov koji treba da zadovoljavaju parametri θ_p da bi se Hamiltonijan $\hat{H}$ dijagonalizovao,

   (b) koristeći dobijeni rezultat, izračunati relativni broj čestica van kondenzata na nuli temperature.

   Da biste uprostili izraze, možete koristiti da je kvadrat brzine zvuka na $T = 0$ $u^2 = \dfrac{4\pi\hbar^2 aN}{m^2 V}$.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

12.VI 2018.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Sistem sa dva nivoa (osnovno stanje $|g\rangle$ i pobuđeno stanje $|e\rangle$) opisan je Hamiltonijanom

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} H_{gg} & H_{ge} \\ H_{eg} & H_{ee} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta/2 & W/2 \\ W/2 & \Delta/2 \end{pmatrix}$$

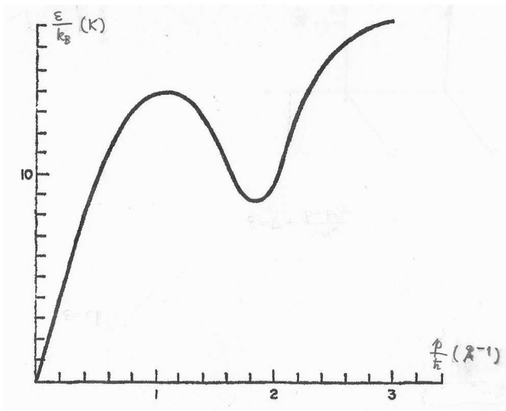
pri čemu su $-\Delta/2$ i $\Delta/2$ energije stanja $|g\rangle$ i $|e\rangle$, respektivno, dok je $W/2$ matrični element Hamiltonijana koji opisuje prelazak između stanja $|g\rangle$ i $|e\rangle$. Sistem se nalazi u termalnoj ravnoteži na temperaturi T. Odrediti matricu gustine koja opisuje ravnotežno stanje sistema

   (a) u energijskoj reprezentaciji,

   (b) u bazisu $\{|g\rangle, |e\rangle\}$.

2. Posmatrajmo idealni gas fotona u zapremini V i na temperaturi T. Disperziona relacija fotona je $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar c|\mathbf{k}|$, gde je $\mathbf{k}$ talasni vektor fotona. Izračunati relativnu fluktuaciju srednjeg broja fotona $\dfrac{\Delta N}{\langle \hat{N} \rangle}$, gde je $\hat{N}$ operator broja fotona, dok je $(\Delta N)^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2$.

3. Ponašanje ^{4}He na niskim temperaturama može se opisati modelom (Landau, 1941, 1947) po kome se ^{4}He sastoji od superfluida i kvazičestičnih ekscitacija čija je disperziona relacija (zavisnost kvazičestične energije ε od impulsa $p = |\mathbf{p}|$) prikazana na slici.



Minimum koji se uočava pri vrednostima impulsa u okolini $p_R/\hbar = 1.9$ Å^{-1} (rotonski minimum) se može opisati zakonom

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(p_R) + \frac{(p - p_R)^2}{2m_R} + O((p - p_R)^3),$$

pri čemu je $\varepsilon(p_R) = \Delta$, gde je $\Delta/k_B = 8.7\,\mathrm{K}$, dok je $m_R = 0.16\, m(^4\mathrm{He}) = 6.65 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Ove kvazičestične ekscitacije nazivaju se rotonima. Izračunati srednji broj rotona N_{rot} na temperaturi T.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

28.VI 2018.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Posmatrajmo jednodimenzionalni harmonijski oscilator mase m i frekvencije ω, pri čemu su $\hat{b}^\dagger$ i $\hat{b}$ redom operatori kreacije i anihilacije jednog kvanta energije.

   (a) Izračunati ($\alpha \in \mathbb{C}$) $\mathrm{e}^{-\alpha \hat{b}^\dagger} \hat{b}\, \mathrm{e}^{\alpha \hat{b}^\dagger}$.

   (b) Pokazati da je $|\alpha\rangle = \mathcal{N}_\alpha\, \mathrm{e}^{\alpha \hat{b}^\dagger} |0\rangle$, gde je $|0\rangle$ vakuumsko stanje, svojstveni vektor operatora $\hat{b}$ i odrediti odgovarajuću svojstvenu vrednost. Takođe, odrediti normalizacionu konstantu $\mathcal{N}_\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) Izračunati proizvod neodređenosti koordinate i impulsa $(\Delta x)_\alpha (\Delta p)_\alpha$ oscilatora u stanju α. Kvadrat neodređenosti koordinate je definisan kao $(\Delta x)^2_\alpha = \langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle^2$, i slično za kvadrat neodređenosti impulsa.

2. Posmatrajmo idealni gas koji se sastoji od N fermiona sa jednočestičnom gustinom stanja

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} \alpha\, \varepsilon^{\eta - 1}, & \varepsilon \geq 0 \\ 0, & \varepsilon < 0, \end{cases}$$

   gde je $\eta > 1$, dok je α pozitivna konstanta odgovarajućih dimenzija. Izračunati:

   (a) Fermijevu energiju ε_F u funkciji N, α i η,

   (b) energiju gasa na $T = 0$ u funkciji N, η i ε_F.

3. Cooper je 1956. godine pokazao da dva elektrona koji međusobno interaguju privlačnom interakcijom [potencijal interakcije je $V(\mathbf{r})$] u prisustvu potpuno popunjenog Fermijevog mora na nuli temperature formiraju vezano stanje (tzv. Cooperov par). Izračunati srednji radijus Cooperovog para u osnovnom stanju, koji se definiše kao $\sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle}$, gde je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ vektor relativnog položaja jednog elektrona iz para u odnosu na drugi, dok se usrednjavanje vrši po orbitalnom delu talasne funkcije $\psi_0(\mathbf{r})$ osnovnog stanja para

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{\int \mathrm{d}\mathbf{r} |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \mathbf{r}^2}{\int \mathrm{d}\mathbf{r} |\psi_0(\mathbf{r})|^2}.$$

   Energiju veze para E_b i Fermijevu energiju ε_F smatrati poznatim. Pretpostaviti da se orbitalni deo talasne funkcije osnovnog stanja para može razviti po bazisu ravnih talasa kao

$$\psi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ |\mathbf{k}| > k_F}} g_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}.$$

   Zanemariti interakciju posmatranog para elektrona sa elektronima iz Fermijevog mora. Matrični elementi potencijala međusobne interakcije posmatranog para elektrona (Ω je zapremina na koju se vrši normiranje)

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})$$

   su oblika

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \varepsilon_F \leq \varepsilon_{\mathbf{k}}, \varepsilon_{\mathbf{k}'} \leq \varepsilon_F + \hbar\omega_c \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

   gde je $V > 0$, $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / (2m)$, dok je $E_b \ll \hbar\omega_c \ll \varepsilon_F$.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

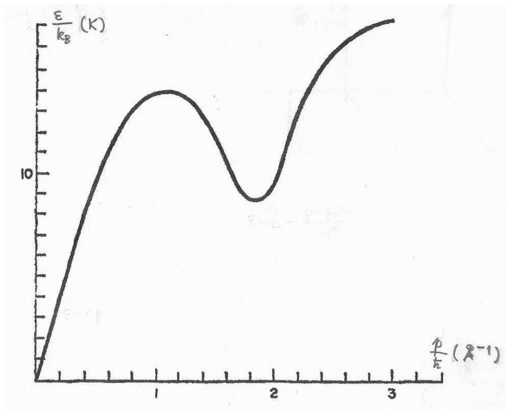
21.VIII 2018.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Razmotriti Hamiltonijan
$$\hat{H} = \epsilon\, \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\delta}{2}(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger),$$
gde operatori $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$ zadovoljavaju bozonske komutacione relacije, dok za realne konstante ϵ i δ važi $|\delta/\epsilon| < 1$.
   (a) Uvodeći kanonsku transformaciju $\hat{a} = u\hat{b} + v\hat{b}^\dagger$, $u, v \in \mathbb{R}$, naći energijski spektar Hamiltonijana $\hat{H}$.
   (b) Ako je $|GS\rangle$ osnovno stanje Hamiltonijana $\hat{H}$, izračunati očekivane vrednosti
$$\left\langle GS \left| \hat{a}^\dagger \hat{a} \right| GS \right\rangle \quad \text{i} \quad \langle GS \left| \hat{a}\hat{a} \right| GS \rangle .$$

2. Posmatrajmo idealni gas koji se sastoji od N fermiona sa jednočestičnom gustinom stanja $g(\varepsilon) = G\Theta(\varepsilon)$, gde je Θ Heavisideova step funkcija, dok je G realna konstanta odgovarajućih dimenzija.
   (a) Izraziti Fermijevu energiju ε_F u funkciji N i G.
   (b) Izračunati hemijski potencijal gasa μ na proizvoljnoj temperaturi u funkciji ε_F i temperature T. Posebno, ispitati ponašanje μ u graničnim slučajevima niskih ($k_B T/\varepsilon_F \ll 1$) i visokih ($k_B T/\varepsilon_F \gg 1$) temperatura.

3. Ponašanje ^{4}He na niskim temperaturama može se opisati modelom (Landau, 1941, 1947) po kome se ^{4}He sastoji od superfluida i kvazičestičnih ekscitacija čija je disperziona relacija (zavisnost kvazičestične energije ε od impulsa $p = |\mathbf{p}|$) prikazana na slici.



Podaci dobijeni u eksperimentima rasejanja neutrona daju da za male p kriva $\varepsilon(p)$ može aproksimirati linearnim zakonom $\varepsilon(p) = up$, pri čemu je $u = 2.4 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$. Ove kvazičestične ekscitacije odgovaraju običnim hidrodinamičkim zvučnim talasima, odnosno fononima, a u je brzina zvuka. Izračunati srednji broj fonona N_{ph} i fononski doprinos unutrašnjoj energiji E_{ph} na temperaturi T.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

25.I 2017.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Posmatrajmo jednu slobodnu česticu mase m u oblasti prostora zapremine V i na temperaturi T.

   (a) Naći matrične elemente ravnotežnog statističkog operatora $\hat{\rho}$ koji opisuje stanje te čestice u koordinatnoj reprezentaciji, $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}|\hat{\rho}|\mathbf{r}'\rangle$.

   (b) Koliko je $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r})$? Kako se ponaša matrični element $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kada $T \to \infty$?

   (c) Izračunati srednju energiju čestice na temperaturi T.

2. Korelaciona funkcija gustine broja čestica $\nu(|\mathbf{r}|)$ je definisana izrazom

$$\langle \Delta\hat{n}(\mathbf{r_1})\Delta\hat{n}(\mathbf{r_2})\rangle = \bar{n}\,\delta(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) + \bar{n}\,\nu(|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|),$$

   gde je $\Delta\hat{n}(\mathbf{r}) = \hat{n}(\mathbf{r}) - \hat{\bar{n}}$, $\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum\limits_{\sigma} \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r})\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ je operator gustine broja čestica u tački $\mathbf{r}$, dok je operator $\hat{\bar{n}} = \hat{N}/V$ ($\hat{N}$ je operator broja čestica). Izračunati korelacionu funkciju gustine broja čestica $\nu(|\mathbf{r}|)$ za idealni trodimenzionalni elektronski gas na $T = 0$. Specijalno, ispitati ponašanje $\nu(|\mathbf{r}|)$ u limesima

   (a) velikih rastojanja $|\mathbf{r}|$, $k_F|\mathbf{r}| \gg 1$,

   (b) malih rastojanja $|\mathbf{r}|$, $k_F|\mathbf{r}| \ll 1$,

   gde je k_F Fermijev talasni vektor.

3. Pokazati da dva elektrona koji međusobno interaguju privlačnom interakcijom u prisustvu potpuno popunjenog Fermijevog mora na nuli temperature formiraju vezano stanje (tzv. Cooperov par) i naći energiju veze E_b. Zanemariti interakciju posmatranog para elektrona sa elektronima iz Fermijevog mora. Pretpostaviti da se orbitalni deo talasne funkcije osnovnog stanja para može razviti po bazisu ravnih talasa kao

$$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ |\mathbf{k}|>k_F}} g_\mathbf{k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}.$$

   Takođe pretpostaviti da su matrični elementi potencijala međusobne interakcije posmatranog para elektrona (Ω je zapremina na koju se vrši normiranje)

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})$$

   oblika

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \epsilon_F \le \epsilon_\mathbf{k}, \epsilon_{\mathbf{k}'} \le \epsilon_F + \hbar\omega_c \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

   gde je $V > 0$, $\epsilon_\mathbf{k} = \hbar^2\mathbf{k}^2/(2m)$, dok je $\hbar\omega_c \ll \epsilon_F$. Specijalno, naći E_b u limesu $N(\epsilon_F)V \ll 1$, gde je $N(\epsilon_F)$ jednočestična gustina stanja na Fermijevoj površi za jednu vrednost spina. Prokomentarisati dobijeni rezultat za energiju veze E_b.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

3.II 2017.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Posmatrajmo sistem elektrona koji međusobno interaguju parnom interakcijom potencijala $V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.

   (a) Napisati Heisenbergove jednačine kretanja za operatore polja $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r},t), \hat{\psi}^\dagger_\sigma(\mathbf{r},t)$.

   (b) Koristeći rezultate dobijene u (a), izvesti oblik operatora gustine struje čestica $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ izraženog preko operatora polja. Operator gustine broja čestica $\hat{\rho}(\mathbf{r},t)$ i operator gustine struje čestica $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta
   $$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(\mathbf{r},t) + \operatorname{div}\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) = 0.$$

   (c) Kako izgleda izraz za operator gustine struje čestica dobijen u (b) kada se sistem nalazi u elektromagnetnom polju čiji su potencijali $\Phi(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$? Obrazložiti odgovor.

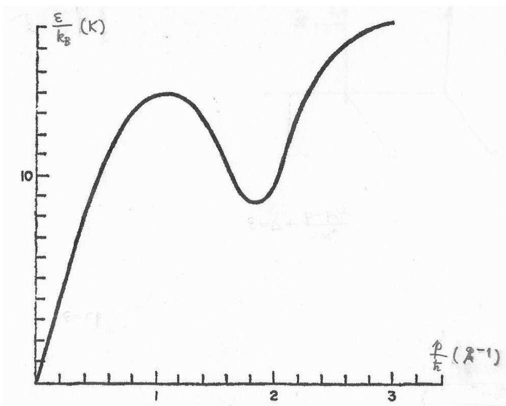
2. Posmatrajmo idealni dvodimenzionalni elektronski gas koji se sastoji od N elektrona koji zauzimaju oblast dvodimenzionalnog prostora površine A. Disperziona relacija za elektrone je oblika $\varepsilon(\mathbf{p}) = \dfrac{p_x^2}{2m_x} + \dfrac{p_y^2}{2m_y}$, gde su m_x i m_y konstante dimenzije mase.

   (a) Izračunati jednočestičnu gustinu stanja $g(\varepsilon)$ i skicirati njen grafik.

   (b) Izračunati Fermijevu energiju ε_F.

   (c) Naći hemijski potencijal μ na proizvoljnoj temperaturi T. Specijalno, odrediti hemijski potencijal u graničnim slučajevima niskih ($k_BT \ll \varepsilon_F$) i visokih ($k_BT \gg \varepsilon_F$) temperatura.

3. Ponašanje ^{4}He na niskim temperaturama može se opisati modelom (Landau, 1941, 1947) po kome se ^{4}He sastoji od superfluida i kvazičestičnih ekscitacija čija je disperziona relacija (zavisnost kvazičestične energije ε od impulsa $p = |\mathbf{p}|$) prikazana na slici.



   Podaci dobijeni u eksperimentima rasejanja neutrona daju da za male p kriva $\varepsilon(p)$ može aproksimirati linearnim zakonom $\varepsilon(p) = up$, pri čemu je $u = 2.4 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$. Ove kvazičestične ekscitacije odgovaraju običnim hidrodinamičkim zvučnim talasima, odnosno fononima, a u je brzina zvuka. Izračunati srednji broj fonona N_{ph} i fononski doprinos unutrašnjoj energiji E_{ph} na temperaturi T.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

13.VI 2017.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Napisati operator ukupnog spina sistema elektrona $\hat{\mathbf{S}} = \sum_i \hat{\mathbf{s}}_i$ u reprezentaciji druge kvantizacije koristeći kompletni ortonormirani jednočestični bazis $\{|f\rangle|\sigma\rangle\}$, gde kvantni broj f opisuje stanja elektrona u orbitnom prostoru, dok je $\sigma =\uparrow,\downarrow$. Koristeći dobijeni rezultat i prelazeći u koordinatni bazis $\{|\mathbf{r}\rangle|\sigma\rangle\}$, napisati operator gustine spina $\hat{\boldsymbol{s}}(\mathbf{r})$ u tački $\mathbf{r}$. Izračunati komutator $[\hat{s}_i(\mathbf{r}), \hat{s}_j(\mathbf{r}')]$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

2. Posmatrajmo idealni gas fotona u zapremini V i na temperaturi T. Disperziona relacija fotona je $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar c|\mathbf{k}|$, gde je $\mathbf{k}$ talasni vektor fotona. Izračunati:

   (a) srednju energiju fotonskog gasa $\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle$ ($\hat{\mathcal{H}}$ je Hamiltonijan fotonskog gasa),

   (b) relativnu fluktuaciju srednje energije $\dfrac{\Delta\mathcal{H}}{\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle}$, gde je $(\Delta\mathcal{H})^2 = \langle\hat{\mathcal{H}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{H}}\rangle^2$.

3. Cooper je 1956. godine pokazao da dva elektrona koji međusobno interaguju privlačnom interakcijom u prisustvu potpuno popunjenog Fermijevog mora na nuli temperature formiraju vezano stanje (tzv. Cooperov par). Izračunati srednji radijus Cooperovog para u osnovnom stanju, koji se definiše kao $\sqrt{\langle\mathbf{r}^2\rangle}$, gde je $\mathbf{r}$ vektor relativnog položaja jednog elektrona iz para u odnosu na drugi, dok je

$$\langle\mathbf{r}^2\rangle = \frac{\int \mathrm{d}\mathbf{r}|\psi_0(\mathbf{r})|^2\mathbf{r}^2}{\int \mathrm{d}\mathbf{r}|\psi_0(\mathbf{r})|^2}.$$

   Energiju veze para E_b smatrati poznatom. Pretpostaviti da se orbitalni deo talasne funkcije osnovnog stanja para može razviti po bazisu ravnih talasa kao

$$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ |\mathbf{k}|>k_F}} g_{\mathbf{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}.$$

   Zanemariti interakciju posmatranog para elektrona sa elektronima iz Fermijevog mora, dok su matrični elementi potencijala međusobne interakcije posmatranog para elektrona (Ω je zapremina na koju se vrši normiranje)

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})$$

   oblika

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \epsilon_F \leq \epsilon_{\mathbf{k}}, \epsilon_{\mathbf{k}'} \leq \epsilon_F + \hbar\omega_c \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

   gde je $V > 0$, $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/(2m)$, dok je $E_b \ll \hbar\omega_c \ll \epsilon_F$.

Zadatke pripremio
Veljko Janković

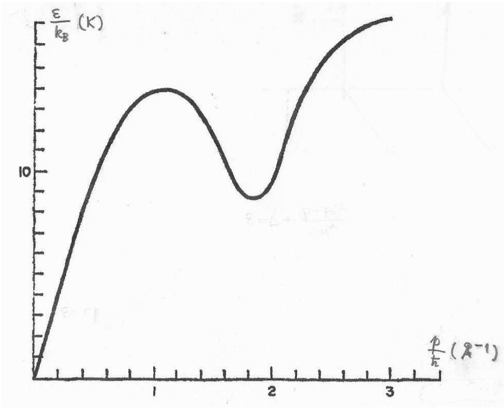
29.VI 2017.

Pismeni deo ispita iz KVANTNE STATISTIČKE FIZIKE

1. Posmatrajmo jednodimenzionalni harmonijski oscilator mase m i frekvencije ω, pri čemu su $\hat{b}^\dagger$ i $\hat{b}$ redom operatori kreacije i anihilacije jednog kvanta energije.
   (a) Izračunati ($\alpha \in \mathbb{C}$) $\mathrm{e}^{-\alpha\hat{b}^\dagger}\hat{b}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{b}^\dagger}$.
   (b) Pokazati da je $|\alpha\rangle = \mathcal{N}_\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{b}^\dagger}|0\rangle$ svojstveno stanje operatora $\hat{b}$ i odrediti odgovarajuću svojstvenu vrednost. Takođe, odrediti normalizacionu konstantu $\mathcal{N}_\alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) Izračunati proizvod neodređenosti koordinate i impulsa $(\Delta x)_\alpha(\Delta p)_\alpha$ oscilatora u stanju α. Kvadrat neodređenosti koordinate je definisan kao $(\Delta x)^2_\alpha = \langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle^2$, i slično za kvadrat neodređenosti impulsa.

2. Posmatrajmo idealni gas koji se sastoji od N bozona spina s u zapremini V i na temperaturi T takvoj da je ispunjen uslov $n\lambda_T^3 \ll 1$, gde je $n = N/V$, dok je λ_T termalna talasna dužina. Naći prvu kvantnu korekciju termičke jednačine stanja klasičnog idealnog gasa. Komentarisati dobijeni rezultat.

3. Ponašanje ^{4}He na niskim temperaturama može se opisati modelom (Landau, 1941, 1947) po kome se ^{4}He sastoji od superfluida i kvazičestičnih ekscitacija čija je disperziona relacija (zavisnost kvazičestične energije ε od impulsa $p = |\mathbf{p}|$) prikazana na slici.



Minimum koji se uočava pri vrednostima impulsa u okolini $p_R/\hbar = 1.9\,\mathring{A}^{-1}$ (rotonski minimum) se može opisati zakonom

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(p_R) + \frac{(p-p_R)^2}{2m_R} + O((p-p_R)^3),$$

pri čemu je $\varepsilon(p_R) = \Delta$, gde je $\Delta/k_B = 8.7\,\mathrm{K}$, dok je $m_R = 0.16\,m(^4\mathrm{He}) = 6.65\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Ove kvazičestične ekscitacije nazivaju se rotonima. Naći srednji broj rotona N_{rot} na temperaturi T. Izračunati rotonski doprinos entropiji S i toplotnom kapacitetu C_V na temperaturi T.

Zadatke pripremio
Veljko Janković